УДК 681.515

РАСЧЁТ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПРИ СТАБИЛИЗАЦИИ ДВИЖЕНИЯ ПОДВОДНОГО МИНИ АППАРАТА НА ПЕРИСКОПНОЙ ГЛУБИНЕ В УСЛОВИЯХ ИЗМЕНЕНИЯ МОДЕЛИ ВОЛНОВЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

А.Н. Балабанов, В.В. Красько*

Институт информационных
и коммуникационных технологий,
Болгарская Академия Наук
Болгария, г. София,
ул. Акад. Г. Бончев, 2, 1113
E-mail: alexey.balabanov83@gmail.com
*Штаб Командования подводных сил
Камчатский край, г. Вилючинск,
ул. Крашенинникова 14, 684093
E-mail: vitaliysevas@yandex.ua

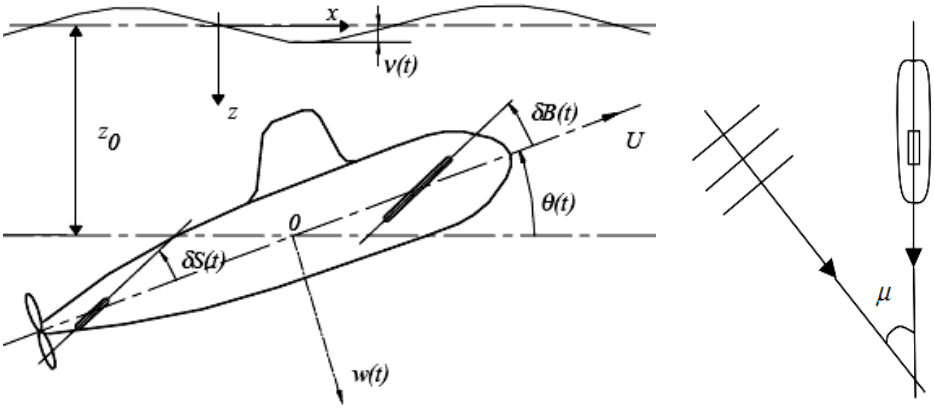
В работе рассматривается решение задачи линейно-квадратической оптимизации движения подводного аппарата при изменении модели внешних возмущений. Поиск решения этой задачи оптимизации ведётся на основе метода резольвенты, который, при его модификации, позволяет существенно сократить объёмы вычислений.

Введение. В работе рассматривается задача расчёта закона управления при стабилизации подводного аппарата (ПА) на перископной глубине. Движение ПА вблизи водной поверхности может происходить под действием вертроволновых возмущений, которые в определенных условиях можно считать стационарными случайными процессами. Изменение характеристик возмущений, и соответственно их модели, ведёт, как привило, к перерасчету закона управления.

В данной работе применяется подход вычисления линейно-квадратического оптимального управления объекта при изменении модели внешних возмущений. Рассмотренный подход ведёт к формированию эффективного вычислительного алгоритма, который предлагается применить в указанной задаче стабилизации ПА.

1. Математическая модель подводного аппарата. Рассматривается движение мини субмарины на перископной глубине [1]. На рис. 1 обозначены параметры движения рассматриваемого ПА: $w(t)$, $q(t)$, $z(t)$, $\theta(t)$, $\delta B(t)$, $\delta S(t)$ – вертикальная скорость подводного аппарата (ПА), скорость дифферента, глубина погружения, дифферент ПА, отклонения носовых и кормовых горизонтальных рулей соответственно. Как постоянные величины соответственно приняты: U, z_0, μ – продольная скорость ПА, глубина погружения, курс ПА относительно волн.

В математической модели [1] действие волновых возмущений, отражены как действие вертикальных сил и моментов, выраженных как нормированные колебательные компоненты f'_w и f'_q вертикальных сил и нормированные компоненты дрейфа s'_w и s'_q. Для упрощения изложения, компоненты s'_w, s'_q можно принять как постоянные входы на глубине z_0 и далее их действие на ПА не рассматривать.



а) б)

Р и с. 1. Движение ПА в а) вертикальной; б) горизонтальной плоскости

Линеаризованная модель, описывающая динамику субмарины, может быть представлена в форме [1]

$$\left.\begin{aligned}&\dot{\mathbf{x}}_v(t)=\mathbf{A}_v\mathbf{x}_v(t)+\mathbf{B}_v\mathbf{u}(t)+\mathbf{G}_v\mathbf{f}(t);\\&\mathbf{y}(t)=\mathbf{C}_v\mathbf{x}_v(t),\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

где

$$\mathbf{x}_v(t)=\left[w(t)\quad q(t)\quad z(t)\quad \theta(t)\right]^T;$$

$\mathbf{u}(t)=\begin{bmatrix}\delta B(t)\\ \delta S(t)\end{bmatrix}$, $\mathbf{f}(t)=\begin{bmatrix}f'_w\\ f'_q\end{bmatrix}$ – вектора управляемых переменных и возмущений соответственно; $\mathbf{A}_v, \mathbf{B}_v, \mathbf{G}_v, \mathbf{C}_v$ – заданные матрицы соответствующих размерностей.

Предполагается, что действующие на ПА возмущения также могут быть описаны линейной моделью

$$\left.\begin{aligned}&\dot{\mathbf{x}}_s(t)=\mathbf{A}_s\mathbf{x}_s(t)+\mathbf{G}_s\xi(t);\\&\mathbf{f}(t)=\mathbf{C}_s\mathbf{x}_s(t),\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

где $\xi(t)=L^{-1}\{\xi(s)\}$ – белый шум единичной интенсивности; $\mathbf{A}_s, \mathbf{G}_s, \mathbf{C}_s$ – известные матрицы конечных размерностей. Одна из техник построения модели (2) описана в оригинальной работе [1], другие подходы к построению модели (2) можно найти, например, в [2]. При этом матрица $\mathbf{A}_s$ всегда строится как гурвицева матрица.

Объединённая система уравнений (1), (2) имеет вид

$$\left.\begin{aligned}&\dot{\mathbf{x}}(t)=\mathbf{A}\mathbf{x}(t)+\mathbf{B}\mathbf{u}(t)+\mathbf{G}_\xi\xi(t);\\&\mathbf{y}(t)=\mathbf{C}\mathbf{x},\end{aligned}\right\}\quad(3)$$

где $$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\mathbf{A}_v & \mathbf{G}_v\mathbf{C}_s\\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_s\end{bmatrix}, \mathbf{B}=\begin{bmatrix}\mathbf{B}_v\\ \mathbf{0}\end{bmatrix};\quad(4)$$

$$\mathbf{G}_\xi=\begin{bmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{G}_s\end{bmatrix},\ \mathbf{C}=\left[\mathbf{C}_v\ \mathbf{0}\right],\ \mathbf{x}(t)=\begin{bmatrix}\mathbf{x}_v(t)\\ \mathbf{x}_s(t)\end{bmatrix};$$

$\mathbf{0}$ – нулевая матрица соответствующей размерности; пусть далее $\mathbf{0}_{n,k}$ – нулевая $n\times k$ матрица.

2. Постановка задачи. Решением задачи линейно–квадратической оптимизации [3] (ЛКО) объекта управления (3) по критерию качества

$$J(\mathbf{u})=E\left\{\int_0^\infty \mathbf{x}^T\mathbf{P}\mathbf{x}+\mathbf{u}^T\mathbf{R}\mathbf{u}dt\right\}\to\min,\quad(5)$$

является управление в виде обратной связи $\mathbf{u}(t)=\mathbf{F}\mathbf{x}(t)$. В критерии (5) симметрические матрицы $\mathbf{P}\ge 0, \mathbf{R}>0$ считаются известными. Их выбор может быть произведён на этапе проектирования. Матрица коэффициентов обратной связи $\mathbf{F}$ имеет представление $\mathbf{F}=-\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}$, где $\mathbf{X}=\mathbf{X}^T$ – стабилизирующее решение (СР) алгебраического уравнения Риккати (АУР)

$$\mathbf{A}^T\mathbf{X}+\mathbf{X}\mathbf{A}+\mathbf{P}-\mathbf{X}\mathbf{Q}\mathbf{X}=\mathbf{0}_{n,n},\quad(6)$$

$\mathbf{Q}=\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}$. Стабилизирующее решение подразумевает гурвицевость матрицы замкнутой системы

$$\mathbf{A}_*=\mathbf{A}+\mathbf{B}\mathbf{F}=\ \mathbf{A}+\mathbf{Q}\mathbf{X},\quad(7)$$

а его поиск является основной вычислительной процедурой задачи ЛКО.

При смене модели возмущений (2), бортовым ЭВМ ПА необходимо заново решать задачу ЛКО (3), (5) по средствам решения уравнения (6). В работе рассматривается подход к решению этой задачи на основе метода резольвенты [4].

3. Построение СР АУР методом резольвенты (МР) [4]. В МР поиск СР АУР выполняется по линейному уравнению

$$\mathbf{U}\begin{bmatrix}\mathbf{I}_n\\ \mathbf{X}\end{bmatrix}=\mathbf{0}_{2n,n},\quad(8)$$

где вещественная $2n\times 2n$ матрица $\mathbf{U}$ определена интегралом в комплексной области

$$\mathbf{U}=\frac{1}{2\pi j}\int_C \mathbf{\Theta}(s)ds$$

от резольвенты $\mathbf{\Theta}(s)=(s\mathbf{I}_{2n}-\mathbf{H})^{-1}$ матрицы Гамильтона

$$\mathbf{H}=\begin{bmatrix}\mathbf{A} & -\mathbf{Q}\\ -\mathbf{P} & -\mathbf{A}^T\end{bmatrix}\in R^{2n\times 2n}.$$

Выше C – замкнутый контур в виде полуокружности с диаметром на мнимой оси, охватывающий при положительном обходе все полюсы резольвенты, расположенные в правой полуплоскости; $\mathbf{I}_n$, $\mathbf{I}_{2n}$ – соответственно $n\times n$ и $2n\times 2n$ единичные матрицы.

Матрица $\mathbf{U}$ может быть вычислена по представлению [4]

$$\mathbf{U}=\frac{1}{2}\mathbf{I}_{2n}+\mathbf{H}\sum_{k=0}^{n-1}\gamma_{n-k-1}\mathbf{\Psi}_k,\ \mathbf{\Psi}_0=\mathbf{I}_{2n},\quad(9)$$

где матрицы $\mathbf{\Psi}_k$, $k=0,1,...,n-1$, при $\mathbf{G}=\mathbf{H}^2$, определены как

$$\mathbf{\Psi}_k=\mathbf{G}^k+\delta_1\mathbf{G}^{k-1}+...+\delta_{k-1}\mathbf{G}+\delta_k\mathbf{I}_{2n}, \quad (10)$$

а $\delta_1, \delta_2,...,\delta_{n-1}$ – коэффициенты многочлена

$$\delta(x)=x^n+\delta_1x^{n-1}+...+\delta_{n-1}x+\delta_n, \quad (11)$$

определяющего характеристический многочлен матрицы Гамильтона $\mathbf{H}$,

$$\Delta(s)=\det\left(s\mathbf{I}_{2n}-\mathbf{H}\right)=\delta(s^2). \quad (12)$$

Коэффициенты многочлена (11) и матрицы (10) могут быть вычислены модифицированным алгоритмом Фаддеева–Леверрье [4] за n шагов;

$$\gamma_r=\frac{1}{2\pi j}\int_C\frac{s^{2r}}{\Delta(s)}ds,\ r=0,1,...,n-1, \quad (13)$$

– числа, величины интегрально–квадратических функционалов (ИКФ).

В [5] рассмотрены подходы к вычислению ИКФ (13), в частности по линейному уравнению

$$\mathbf{\Gamma\gamma}=\frac{1}{2}\mathbf{e}, \quad (14)$$

$$\gamma_0=-\sum_{i=1}^{n-1}\frac{q_{2i}}{q_0}\gamma_i,\ q_k=0,\ k>n. \quad (15)$$

где $\mathbf{\gamma}=\begin{bmatrix}\gamma_1 & \gamma_2 & \dots & \gamma_n\end{bmatrix}^T$;

$\mathbf{e}=\begin{bmatrix}0 & \dots & 0 & 1\end{bmatrix}^T$ – вектор правых частей; $q_n=1, q_{n-1}, ..., q_0$ – коэффициенты многочлена $q(s)=\sum_{k=0}^{n}q_ks^k$ факторизации

$$\Delta(s)=(-1)^nq(s)q(-s) \quad (16);$$

$$\mathbf{\Gamma}=\begin{bmatrix} q_1 & q_3 & q_5 & \dots & \dots & \dots \\ q_0 & q_2 & q_4 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & q_1 & q_3 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & q_{n-2} & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & q_{n-3} & q_{n-1} \end{bmatrix}$$

– неполная матрица Гурвица (без последних столбца и строки) размерности $(n-1)\times(n-1)$ для многочлена $\chi(z)=q_0z^n+q_1z^{n-1}+...+q_n$.

Известно [3], что многочлен $q(s)=\det\left(s\mathbf{I}_n-\mathbf{A}_*\right)$ является также характеристическим многочленом матрицы замкнутой системы (7).

Подставляя в (9), формулы (10) и собирая подобные по степеням $\mathbf{G}^k$, нетрудно получить представление

$$\mathbf{U}=\frac{1}{2}\mathbf{I}_{2n}+\mathbf{HS}, \quad (17)$$

где

$$\mathbf{S}=\sum_{k=0}^{n-1}\eta_{n-1-k}\mathbf{G}^k, \quad (18)$$

$$\eta_m=\gamma_0\delta_m+\gamma_1\delta_{m-1}+...+\gamma_m\delta_0, \quad (19)$$

$$\delta_0=1,\ m=0,1,...,n-1.$$

Таким образом, определена последовательность вычислений СР АУР по методу резольвенты, которую можно выразить как

Алгоритм 1:

1) вычислить коэффициенты характеристического многочлена (12) матрицы Гамильтона;

2) вычислить значения ИКФ (13) и их линейные комбинации (19);

3) вычислить ряд матриц $\mathbf{G}^{k+1}=\mathbf{G}^k\mathbf{G}$, *k=0,1,…,n–1* и матрицу $\mathbf{S}$ как сумму (18);

4) решить линейное уравнение (8).

Матрицы в выражениях (3), (5), (6) в контексте решения задачи (4), (5) можно записать в блочном виде как

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12}\\ \mathbf{0}_{n_2,n_1} & \mathbf{A}_{22}\end{bmatrix},\ \mathbf{B}=\begin{bmatrix}\mathbf{B}_1\\ \mathbf{0}_{n_2,m}\end{bmatrix}, \quad (20)$$

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix}\mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}_{12}\\ \mathbf{P}_{12}^T & \mathbf{P}_{22}\end{bmatrix},\ \mathbf{Q}=\begin{bmatrix}\mathbf{Q}_{11} & \mathbf{0}_{n_1,n_2}\\ \mathbf{0}_{n_2,n_1} & \mathbf{0}_{n_2,n_2}\end{bmatrix}, \quad (21)$$

$$\mathbf{A},\ \mathbf{P},\ \mathbf{Q}\in R^{n\times n},\ n=n_1+n_2,$$

$$\mathbf{A}_{11}\in R^{n_1\times n_1},\ \mathbf{A}_{12}\in R^{n_1\times n_2},\ \mathbf{A}_{22}\in R^{n_2\times n_2},$$

$$\mathbf{P}_{11}\in R^{n_1\times n_1},\ \mathbf{P}_{12}\in R^{n_1\times n_2},\ \mathbf{P}_{22}\in R^{n_2\times n_2},$$

$$\mathbf{B}_1\in R^{n_1\times m},\ \mathbf{Q}_{11}=\mathbf{B}_1\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}_1^T\in R^{n_1\times n_1}.$$

Матрица $\mathbf{A}_{22}$ предполагается гурвицевой.

4. Декомпозиция МР при вычислении матрицы прямых связей. Решение задачи оптимизации (4), (5) с матрицами (20), (21) на основе поиска СР АУР методом резольвенты по описанной общей схеме может быть рационализировано. Основные теоретические результаты такой рационализации представлены в авторских предшествующих работах [6, 7]. Далее, не вдаваясь в детали и обоснова-

ния, в этом разделе представлены основные соотношения, ведущие к формированию эффективного вычислительного алгоритма для вычисления матрицы прямых связей $\mathbf{F}_2$, см. далее.

Запишем в блочном виде матрицу

$$\mathbf{X}=\begin{bmatrix}\mathbf{X}_{11} & \mathbf{X}_{12}\\ \mathbf{X}_{12}^T & \mathbf{X}_{22}\end{bmatrix}, \qquad (22)$$

$$\mathbf{X}_{11}\in R^{n_1\times n_1},\ \mathbf{X}_{12}\in R^{n_1\times n_2},\ \mathbf{X}_{22}\in R^{n_2\times n_2}.$$

Матрица обратных связей (7) расширенного вектора состояний имеет представление

$$\mathbf{F}=-\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}_1^T\begin{bmatrix}\mathbf{X}_{11} & \mathbf{X}_{12}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{F}_1 & \mathbf{F}_2\end{bmatrix}. \qquad (23)$$

Известно [3], что матрица $\mathbf{X}_{11}$ а следовательно и матрица обратных связей $\mathbf{F}_1$ состояния объекта управления полностью не зависят от свойств возмущений и могут быть определены путём решения задачи ЛКО при отсутствии возмущений поиском СР $\mathbf{X}_{11}$ АУР

$$\mathbf{A}_{11}^T\mathbf{X}_{11}+\mathbf{X}_{11}\mathbf{A}_{11}+\mathbf{P}_{11}-\mathbf{X}_{11}\mathbf{Q}_{11}\mathbf{X}_{11}=\mathbf{0}_{n_1,n_1}, \qquad (24)$$

В тоже время, матрица $\mathbf{F}_2=-\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}_1^T\mathbf{X}_{12}$ определяет прямую связь, то есть связь от состояния возмущений к управлению. Матрица $\mathbf{X}_{12}$ и матрица прямых связей $\mathbf{F}_2$ может быть вычислена при декомпозиции процедур алгоритма 1.

Пусть для переменных, в контексте поиска СР АУР (24) по МР, введены подобные предыдущему пункту обозначения с чертой сверху. Тогда, соответственно, матрица Гамильтона, её характеристический многочлен и резольвента

$$\bar{\mathbf{H}}=\begin{bmatrix}\mathbf{A}_{11} & -\mathbf{Q}_{11}\\ -\mathbf{P}_{11} & -\mathbf{A}_{11}^T\end{bmatrix},\ \bar{\Delta}(s)=\det\left(s\mathbf{I}_{2n_1}-\bar{\mathbf{H}}\right),$$

$$\bar{\mathbf{U}}=\frac{1}{2\pi j}\int_C\bar{\mathbf{\Theta}}(s)ds.$$

Пусть на этапе проектирования вычислены последовательно следующие элементы

$$\bar{\mathbf{G}}=\bar{\mathbf{H}}^2=\begin{bmatrix}\bar{\mathbf{G}}_{11} & \bar{\mathbf{G}}_{12}\\ \bar{\mathbf{G}}_{21} & \bar{\mathbf{G}}_{22}\end{bmatrix}, \qquad (25)$$

$$\bar{\Delta}(s)=\bar{\delta}(x)\big|_{x=s^2}=\sum_{k=0}^{n_1}\bar{\delta}_k x^k,$$

$$\bar{\gamma}_r=\frac{1}{2\pi j}\int_C\frac{s^{2r}}{\bar{\Delta}(s)}ds,\ r=0,1,...,n_1-1,$$

$$\bar{\eta}_m=\bar{\gamma}_0\bar{\delta}_m+\bar{\gamma}_1\bar{\delta}_{m-1}+...+\bar{\gamma}_m\bar{\delta}_0,\ \ \bar{\delta}_0=1,$$

$$m=0,1,\ldots,\ n_1-1,$$

$$\bar{\mathbf{G}}^k=\begin{bmatrix}\bar{\mathbf{G}}_k^{11} & \bar{\mathbf{G}}_k^{12}\\ \bar{\mathbf{G}}_k^{21} & \bar{\mathbf{G}}_k^{22}\end{bmatrix},\ k=1,2,\ldots,\ n_1, \qquad (26)$$

$$\bar{\mathbf{S}}=\sum_{k=0}^{n_1-1}\bar{\eta}_{n_1-1-k}\bar{\mathbf{G}}^k=\begin{bmatrix}\bar{\mathbf{S}}_{11} & \bar{\mathbf{S}}_{12}\\ \bar{\mathbf{S}}_{21} & \bar{\mathbf{S}}_{22}\end{bmatrix}, \qquad (27)$$

$$\bar{\mathbf{U}}=\begin{bmatrix}\bar{\mathbf{U}}_{11} & \bar{\mathbf{U}}_{12}\\ \bar{\mathbf{U}}_{21} & \bar{\mathbf{U}}_{22}\end{bmatrix} \qquad (28)$$

и найдено СР $\mathbf{X}_{11}$ АУР (24).

Обозначенные в (25)–(28) матрицы-блоки имеют размерность $n_1\times n_1$. Мы полагаем также, что элементы $\bar{\Delta}(s)$, $\bar{\gamma}_r$, $r=0,1,...,n_1-1$, $\bar{\mathbf{S}}_{11}$, $\bar{\mathbf{S}}_{12}$, $\bar{\mathbf{S}}_{21}$, $\mathbf{X}_{11}$ сохранены и доступны для последующих вычислений.

Рассмотрим теперь вычисление матрицы $\mathbf{X}_{12}$. При поиске СР АУР (6) с матрицами-данными (20), (21) матрица Гамильтона будет иметь вид

$$\mathbf{H}=\begin{bmatrix}\mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & -\mathbf{Q}_{11} & \mathbf{0}_{n_1,n_2}\\ \mathbf{0}_{n_2,n_1} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{0}_{n_2,n_1} & \mathbf{0}_{n_2,n_2}\\ -\mathbf{P}_{11} & -\mathbf{P}_{12} & -\mathbf{A}_{11}^T & \mathbf{0}_{n_1,n_2}\\ -\mathbf{P}_{12}^T & -\mathbf{P}_{22} & -\mathbf{A}_{12}^T & -\mathbf{A}_{22}^T\end{bmatrix}.$$

На основе указанных в [4 – 7] свойств, для следующих матриц справедливы представления

$$\mathbf{G}=\begin{bmatrix}\mathbf{G}_{11} & \mathbf{G}_{12} & \mathbf{G}_{13} & \mathbf{0}_{n_1,n_2}\\ \mathbf{0}_{n_2,n_1} & \mathbf{G}_{22} & \mathbf{0}_{n_2,n_1} & \mathbf{0}_{n_2,n_2}\\ \mathbf{G}_{31} & -\mathbf{G}_{41}^T & \mathbf{G}_{11}^T & \mathbf{0}_{n_1,n_2}\\ \mathbf{G}_{41} & \mathbf{G}_{42} & \mathbf{G}_{12}^T & \mathbf{G}_{22}^T\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{G}^k=\begin{bmatrix}\mathbf{G}_k^{11} & \mathbf{G}_k^{12} & \mathbf{G}_k^{13} & \mathbf{0}_{n_1,n_2}\\ \mathbf{0}_{n_2,n_1} & \mathbf{G}_k^{22} & \mathbf{0}_{n_2,n_1} & \mathbf{0}_{n_2,n_2}\\ \mathbf{G}_k^{31} & -\mathbf{G}_k^{41T} & \mathbf{G}_k^{11T} & \mathbf{0}_{n_1,n_2}\\ \mathbf{G}_k^{41} & \mathbf{G}_k^{42} & \mathbf{G}_k^{12T} & \mathbf{G}_k^{22T}\end{bmatrix}, \qquad (29)$$

$$\mathbf{S}=\begin{bmatrix}\bar{\mathbf{S}}_{11} & \mathbf{S}_{12} & \bar{\mathbf{S}}_{12} & \mathbf{0}_{n_1,n_2}\\ \mathbf{0}_{n_2,n_1} & \mathbf{S}_{22} & \mathbf{0}_{n_2,n_1} & \mathbf{0}_{n_2,n_2}\\ \bar{\mathbf{S}}_{21} & -\mathbf{S}_{41}^T & \bar{\mathbf{S}}_{11}^T & \mathbf{0}_{n_1,n_2}\\ \mathbf{S}_{41} & \mathbf{S}_{42} & \mathbf{S}_{12}^T & \mathbf{S}_{22}^T\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{U}=\begin{bmatrix}\bar{\mathbf{U}}_{11} & \mathbf{U}_{12} & \bar{\mathbf{U}}_{12} & \mathbf{0}_{n_1,n_2}\\ \mathbf{0}_{n_2,n_1} & \mathbf{0}_{n_2,n_2} & \mathbf{0}_{n_2,n_1} & \mathbf{0}_{n_2,n_2}\\ \bar{\mathbf{U}}_{21} & \mathbf{U}_{41}^T & \mathbf{I}_{n_1}-\bar{\mathbf{U}}_{11}^T & \mathbf{0}_{n_1,n_2}\\ \mathbf{U}_{41} & \mathbf{U}_{42} & \mathbf{U}_{12}^T & \mathbf{I}_{n_2}\end{bmatrix}. \quad (30)$$

Из (8), (17), (30) следует, что матрица $\mathbf{X}_{12}$ может быть определена как

$$\mathbf{X}_{12}=\left(\mathbf{X}_{11}\mathbf{U}_{12}-\mathbf{U}_{41}^T\right), \quad (31)$$

где

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{U}_{41}&=-\mathbf{P}_{12}^T\bar{\mathbf{S}}_{11}-\mathbf{A}_{12}^T\bar{\mathbf{S}}_{21}-\mathbf{A}_{22}^T\mathbf{S}_{41};\\ \mathbf{U}_{12}&=\bar{\mathbf{S}}_{11}\mathbf{A}_{12}+\mathbf{S}_{12}\mathbf{A}_{22}-\bar{\mathbf{S}}_{12}\mathbf{P}_{12}.\end{aligned}\right\} \quad (32)$$

Далее, также на основе проведённых в [6–7] выводах, следующие элементы алгоритма 1 могут быть вычислены упрощённо.

Так, из выражений (7), (16), (20)–(22) следует представление для многочлена (12)

$$\Delta(s)=\bar{\Delta}(s)\,\tilde{\Delta}(s), \quad (33)$$

где $\tilde{\Delta}(s)=(-1)^{n_2}\tilde{q}(s)\tilde{q}(-s)=\tilde{\delta}(x)\big|_{x=s^2}$, (34)

$$\tilde{q}(s)=\det\left(s\mathbf{I}_{n_2}-\mathbf{A}_{22}\right),\ \tilde{\delta}(x)=\sum_{k=0}^{n_2}\tilde{\delta}_k x^k\ . \quad (35)$$

Как было отмечено выше, многочлен $\bar{\Delta}(s)$ уже вычислен при поиске матрицы $\mathbf{X}_{11}$. А многочлен $\tilde{\Delta}(s)$ может быть вычислен из представления (34) по многочлену $\tilde{q}(s)$.

Далее, эффективное вычисление ИКФ (13) следует из представления подынтегральной функции в виде

$$\frac{s^{2r}}{\Delta(s)}=\frac{a^r(s^2)}{\bar{\Delta}(s)}+\frac{b^r(s^2)}{\tilde{\Delta}(s)}, \quad (36)$$

где коэффициенты *n* многочленов

$$a^r(x)=\sum_{k=0}^{n_1-1}a_k^r x^k\ ,\ b^r(x)=\sum_{k=0}^{n_2-1}b_k^r x^k\ ,$$

r=0,1,…n–1 могут быть найдены как элементы матриц

$$\mathbf{K}_1=\begin{bmatrix}a_{n_1-1}^{n-1} & a_{n_1-1}^{n-2} & \cdots & a_{n_1-1}^{k} & \cdots & a_{n_1-1}^{0}\\ a_{n_1-2}^{n-1} & a_{n_1-2}^{n-2} & \cdots & a_{n_1-2}^{k} & \cdots & a_{n_1-2}^{0}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{1}^{n-1} & a_{1}^{n-2} & \cdots & a_{1}^{k} & \cdots & a_{1}^{0}\\ a_{0}^{n-1} & a_{0}^{n-2} & \cdots & a_{0}^{k} & \cdots & a_{0}^{0}\end{bmatrix}\in R^{n_1\times n},$$

$$\mathbf{K}_2=\begin{bmatrix}b_{n_2-1}^{n-1} & b_{n_2-1}^{n-2} & \cdots & b_{n_2-1}^{k} & \cdots & b_{n_2-1}^{0}\\ b_{n_2-2}^{n-1} & b_{n_2-2}^{n-2} & \cdots & b_{n_2-2}^{k} & \cdots & b_{n_2-2}^{0}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\ b_{1}^{n-1} & b_{1}^{n-2} & \cdots & b_{1}^{k} & \cdots & b_{1}^{0}\\ b_{0}^{n-1} & b_{0}^{n-2} & \cdots & b_{0}^{k} & \cdots & b_{0}^{0}\end{bmatrix}\in R^{n_2\times n},$$

из выражения

$$\begin{bmatrix}\mathbf{K}_1\\ \mathbf{K}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{M}_1 & \mathbf{M}_2\end{bmatrix}^{-1} \quad (37)$$

для матриц

$$\mathbf{M}_1=\begin{bmatrix}\tilde{\delta}_{n_2} & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \tilde{\delta}_{n_2-1} & \tilde{\delta}_{n_2} & \ddots & \vdots & 0\\ \vdots & \tilde{\delta}_{n_2-1} & \ddots & 0 & \vdots\\ \tilde{\delta}_{1} & \vdots & \ddots & \tilde{\delta}_{n_2} & 0\\ \tilde{\delta}_{0} & \tilde{\delta}_{1} & \cdots & \tilde{\delta}_{n_2-1} & \tilde{\delta}_{n_2}\\ 0 & \tilde{\delta}_{0} & \ddots & \vdots & \tilde{\delta}_{n_2-1}\\ 0 & 0 & \ddots & \tilde{\delta}_{1} & \vdots\\ \vdots & \vdots & \ddots & \tilde{\delta}_{0} & \tilde{\delta}_{1}\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \tilde{\delta}_{0}\end{bmatrix}\in R^{n\times n_2},$$

$$\mathbf{M}_2=\begin{bmatrix}\bar{\delta}_{n_1} & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \bar{\delta}_{n_1-1} & \bar{\delta}_{n_1} & \cdots & \vdots & 0\\ \vdots & \bar{\delta}_{n_1-1} & \ddots & 0 & \vdots\\ \bar{\delta}_{1} & \vdots & \ddots & \bar{\delta}_{n_1} & 0\\ \bar{\delta}_{0} & \bar{\delta}_{1} & \cdots & \bar{\delta}_{n_1-1} & \bar{\delta}_{n_1}\\ 0 & \bar{\delta}_{0} & \ddots & \vdots & \bar{\delta}_{n_1-1}\\ 0 & 0 & \ddots & \bar{\delta}_{1} & \vdots\\ \vdots & \vdots & \cdots & \bar{\delta}_{0} & \bar{\delta}_{1}\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \bar{\delta}_{0}\end{bmatrix}\in R^{n\times n_1}.$$

Согласно (36), ИКФ (13) имеют представление

$$\gamma_r=\gamma_r^a+\gamma_r^b,\ r=0,1,...,n-1. \quad (38)$$

Числа $\gamma_r^a=\dfrac{1}{2\pi j}\displaystyle\int_C\frac{a^r(s^2)}{\bar{\Delta}(s)}ds$ и $\gamma_r^b=\dfrac{1}{2\pi j}\displaystyle\int_C\frac{b^r(s^2)}{\tilde{q}(s)\tilde{q}(-s)}ds$ определяются посредством элементарных операций соответственно, как

$$\gamma_r^a=(-1)^{n_1-1}\sum_{k=0}^{n_1-1}a_k^r\bar{\gamma}_k\,,\gamma_r^b=(-1)^{n_2-1}\sum_{k=0}^{n_2-1}b_k^r\tilde{\gamma}_k\ , \quad (39)$$

где $\tilde{\gamma}_k = (-1)^{n_2} \dfrac{1}{2\pi j} \int\limits_C \dfrac{s^{2r}}{\tilde{q}(s)\tilde{q}(-s)} ds$, (40)

$k = 0,1,...,n_2 - 1$.

Наконец, из выражений (32) видно, что для поиска матриц $\mathbf{U}_{12}$, $\mathbf{U}_{41}$ необходимо лишь вычислить матрицы

$$\mathbf{S}_{12} = \sum_{k=0}^{n-1} \eta_{n-1-k} \mathbf{G}_k^{12},\ \mathbf{S}_{41} = \sum_{k=0}^{n-1} \eta_{n-1-k} \mathbf{G}_k^{41}. \quad (41)$$

В свою очередь, согласно блочному представлению (29) для вычисления необходимых матриц $\mathbf{G}_k^{12}$, $\mathbf{G}_k^{41}$ можно воспользоваться следующими выражениями

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{G}_{k+1}^{12} = \mathbf{G}_{11}\mathbf{G}_k^{12} + \mathbf{G}_{12}\mathbf{G}_k^{22} - \mathbf{G}_{13}\mathbf{G}_k^{41T}; \\ &\mathbf{G}_{k+1}^{41} = \mathbf{G}_k^{41}\mathbf{G}_{11} + \mathbf{G}_k^{12T}\mathbf{G}_{31} + \mathbf{G}_k^{22T}\mathbf{G}_{41}; \\ &\mathbf{G}_{k+1}^{22} = \mathbf{G}_k^{22}\mathbf{G}_{22} \end{aligned}\right\} (42)$$

для $k = 1,2,...,n-1$, с

$$\mathbf{G}_0^{22} = \mathbf{I}_{n_2},\ \mathbf{G}_0^{12} = \mathbf{0}_{n_1,n_2},\ \mathbf{G}_0^{41} = \mathbf{0}_{n_2,n_1}.$$

Таким образом, последовательность вычислений матриц $\mathbf{X}_{12}$, $\mathbf{F}_2$ составляет следующий

Алгоритм 2:

1) найти многочлены (33)–(35);

2) вычислить числа (40) по линейному уравнению (14) и (15).

3) вычислить коэффициенты многочленов $a^r(x)$, $b^r(x)$ из выражения (37);

4) вычислить числа η_r, $r = 0,1,....n-1$ на основе ИКФ (13) по представлениям (38), (39);

5) вычислить матрицы $\mathbf{G}_k^{12}$, $\mathbf{G}_k^{41}$, $\mathbf{G}_k^{22}$ рекуррентным алгоритмом (42) и матрицы сумм $\mathbf{S}_{12}$, $\mathbf{S}_{41}$ (41);

6) определить матрицы $\mathbf{U}_{12}$, $\mathbf{U}_{41}$ по (32) и окончательно матрицы $\mathbf{X}_{12}$ по (31) и $\mathbf{F}_2 = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}_1^T\mathbf{X}_{12}$.

Входными данными алгоритма 2 является линейная модель возмущений (2), а также величины $\overline{\Delta}(s)$, $\overline{\gamma}_r$, $r = 0,1,...,n_1 - 1$, $\overline{\mathbf{S}}_{11}$, $\overline{\mathbf{S}}_{12}$, $\overline{\mathbf{S}}_{21}$, $\mathbf{X}_{11}$, которые, как мы предполагаем уже известны.

Таким образом, при изменении математической модели внешних воздействий, вместо повторного решения задачи ЛКО (3), (5) расширенной размерности *n*, можно провести вычисления по алгоритму 2. Выгоды проявляются в объёме сниженных вычислений. В случае $n_1 = n_2$ легко получить грубую оценку сниженных арифметических вычислений, которая составляет приблизительно 9 раз.

5. Пример. Управление движением ПА при волновых возмущениях заданных формулой спектральной плотности Пирсона–Масковица. Рассматривается мини субмарина VELEBIT с данными объекта и среды взятыми в [1]. Рассмотрим случай, когда отклонение кормовых рулей производится синхронно и разнонаправлено с носовыми рулями, $\delta S(t) = -\delta B(t)$;

Как параметры движения выбраны величины $V = 2$ *м/с*, $z_0 = 5$ *м*, $\mu = 0$.

Пусть, волновые возмущения на поверхности заданы формулой спектральной плотности Пирсона–Масковица

$$S(\omega) = \frac{a}{\omega^5} \exp\left(-\frac{b}{\omega^4}\right), \quad (43)$$

где $a = \alpha g^2$; g – ускорение свободного падения; $\alpha = 0,0081$ – константа Филипса; $b = 3,109 h_s^{-2}$; h_s – высота значительных волн, определяется как средняя одной трети наиболее высоких (из всей совокупности) волн [2], далее принято $h_s = 1$.

Действие волн на ПА на глубине z_0 ослабляется и может быть учтено введением в (43) множителя $\mathrm{R}(z_0) = \mathrm{e}^{-\frac{\omega^2}{g} z_0}$. Тогда функция спектральной плотности для смещений (*k*=0), скорости (*k*=1) и ускорений (*k*=2) может быть записана как

$$S_z(k,\omega) = \omega^{2k} e^{-2\frac{\omega^2}{g} z0} S(\omega).$$

Далее, для $S_z(2,\omega)$ вводится аппроксимирующая дробно–рациональная функция спектральной плотности $S_a(\omega)$. В свою очередь, для $S_a(\omega)$ имеет место представление

$$S_a(\omega) = W_f(j\omega) W_f(-j\omega),$$

где передаточную функцию $W_f(s)$ формирующего фильтра будем искать в виде

$$W_f(s) = \frac{ks^2}{s^4 + g_3 s^3 + g_2 s^2 + g_1 s + g_0}.$$

Решением задачи минимизации

$$\int_{\omega 1}^{\omega 2}\left[S_z(2,\omega)-S_a(\omega)\right]^2 d\omega \to \min$$

на интересующем интервале $[\omega_1 .. \omega_2]$ частот, получена передаточная функция формирующего фильтра $W_f(s) =$

$$= \frac{0{,}1054 s^2}{s^4 + 1{,}2187 s^3 + 4{,}2664 s^2 + 2{,}1758 s + 3{,}4262}$$

Согласно [1], значения горизонтальных сил f_w, f_q пропорциональны ускорению морской волны на глубине z_0 и имеют вид

$$\left.\begin{aligned} f_w &= c_{fw} W_f(s)\xi(s); \\ f_q &= c_{fq}\omega_0 \frac{1}{s} W_f(s)\xi(s), \end{aligned}\right\} \qquad (44)$$

где c_{fw} и c_{fq} – коэффициенты выраженные как

$$c_{fw} = (1{,}5\sin^2\mu + 1)(1 - 0{,}02U\cos\mu);$$

$$c_{fq} = (1 - 0{,}02U\cos\mu)\operatorname{sgn}(\cos\mu);$$

$\omega_0 = 1{,}3$ – резонансная частота; $\xi(t) = L^{-1}\{\xi(s)\}$ – белый шум единичной интенсивности.

Выражениям (44) соответствует система уравнений (2) с матрицами

$$\mathbf{A}_s = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -g_0 & -g_1 & -g_2 & -g_3 \end{bmatrix}, \ \mathbf{G}_s = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ k \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C}_s = \begin{bmatrix} 0 & 0 & c_{fw} & 0 \\ 0 & \omega_0 c_{fq} & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Тогда численные значения матриц для глубинной модели (4) в обозначениях (20) имеют следующие значения

$$\mathbf{A}_{11} = \begin{bmatrix} -0{,}1020 & 0{,}5980 & 0 & 0 \\ 0{,}0182 & -0{,}2460 & 0 & -0{,}0095 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0{,}6374 & 0 \\ 0 & 0{,}2384 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{A}_{22} = \mathbf{A}_s,$$

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 0{,}0276 & 0{,}0282 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T.$$

Далее, матрицы

$$\mathbf{P}_{11} = diag\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.6065 & 0 \end{bmatrix}\right),$$

$$\mathbf{P}_{12} = \mathbf{P}_{22} = \mathbf{0}_{4,4}, \ R = 1$$

функционала качества (5) выбраны путём многократных проб и анализа ошибок при решении приемлемым образом задачи стабилизации ПА на перископной глубине.

Конечные вычисления представлены ниже. Это матрицы–блоки СР АУР (22)

$$\mathbf{X}_{11} = \begin{bmatrix} 47{,}46 & -159{,}5 & 12{,}81 & -124{,}1 \\ -159{,}5 & 873{,}1 & -40{,}10 & 514{,}8 \\ 12{,}81 & -40{,}10 & 4{,}515 & -33{,}28 \\ -124{,}1 & 514{,}8 & -33{,}28 & 353{,}7 \end{bmatrix},$$

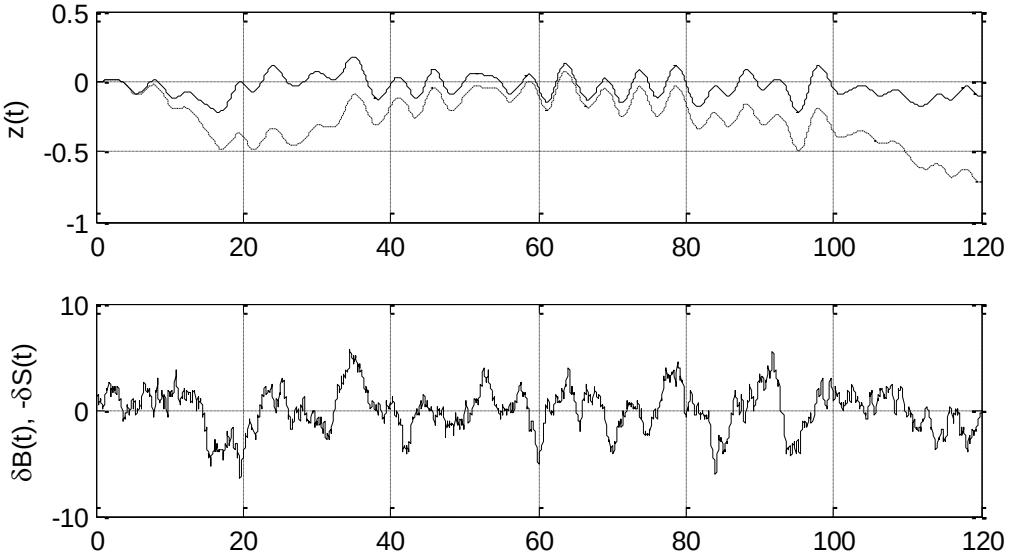
$$\mathbf{X}_{12} = \begin{bmatrix} 23{,}42 & -47{,}53 & -5{,}424 & -3{,}854 \\ -165{,}0 & 165{,}7 & 19{,}42 & 14{,}65 \\ 4{,}956 & -12{,}36 & -1{,}35 & -0{,}911 \\ -85{,}52 & 126{,}0 & 14{,}60 & 10{,}56 \end{bmatrix}$$

и матрицы–блоки обратной связи (23)

$$\mathbf{F}_1 = \begin{bmatrix} -3{,}193 & 20{,}23 & -0{,}7787 & 11{,}10 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{F}_2 = \begin{bmatrix} -4{,}009 & 3{,}365 & 0{,}3988 & 0{,}3074 \end{bmatrix}.$$

На рис. 2 приведены результаты моделирования движения ПА при его стабизации на перископной глубине. При воздействии внешних возмущений на нестабилизированный ПА среднеквадратическое отклонение от заданной глубины составляет 0,18 м, рис. 2 пунктирная линия сверху. При оптимальной стабилизации ПА среднеквадратическое отклонение от заданной глубины составляет 0,08 м, рис. 2 сплошная линия сверху, а среднеквадратическое отклонение носовых и кормовых горизонтальных рулей составляют 2 градуса, рис. 2 снизу. Что, по нашему мнению, свидетельствует об успешности решения задачи примера.



Р и с. 2. Переходные процессы при стабизации ПА

Благодарности*: The research work presented in this paper is partially supported by the FP7 grant* ***AComIn*** *No. 316087, funded by the European Commission in Capacity Programme in 2012–2016.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Mandzuka S.* Mathematical Model of a Submarine Dynamics at the Periscope Depth / Proceedings of International Symposium: Waves – Physical and Numerical Modelling, Vancouver, 1994. – P. 833–841.
2. *Вагущенко Л.Л., Вагущенко А.Л., Заичко С.И.* Бортовые автоматизированные системы контроля мореходности. – Одесса: Фенікс, 2005. – 274 с.
3. *Квакернаак Х., Сиван Р.* Линейные оптимальные системы управления. − М.: Мир, 1977. – 650 с.
4. *Барабанов А.Т.* Стабилизирующее решение алгебраического уравнения Риккати. Метод резольвенты // Изв. РАН. Теория и системы управления. – 2008. – № 3. – С. 20–31.
5. *Барабанов А.Т.* Алгоритмы построения стабилизирующего решения алгебраического уравнения Риккати на основе его линейной редукции в задачах аналитического конструирования регуляторов // Изв. РАН. Теория и системы управления. – 2008. − № 5. − С. 53−68.
6. *Балабанов А.Н., Солдатенко Е.С.* Применение метода резольвенты и уравнения Басса при многократном поиске решения алгебраического уравнения Риккати в задаче линейно-квадратической оптимизации не полностью управляемого объекта // Современные технологии проектирования управляющих и мехатронных систем – 2013: матер. Междунар. науч.-техн. конф., Севастополь, 16–19 апреля 2013 г. – Севастополь. – 2013. – С. 253−256.
7. *Балабанов А.Н.* Применение метода резольвенты и уравнения Басса в задачах линейно-квадратического оптимального регулирования и слежения с обратной связью по наблюдаемой переменной // Вестник СевНТУ. Сер. Автоматизация процессов и управление: сб. науч. тр. – Севастополь, 2014. – Вып. 154. − С. 35−44.