

ВОССТАНОВЛЕНИЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ПРОФИЛЕЙ ФИЗИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ ПО ДАННЫМ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ПРОФИЛЕМЕРОВ УОЛША

В.А. Гайский, П.В. Гайский

Институт природно-технических систем, РФ, г. Севастополь, ул. Ленина, 28

E-mail: gaysky@inbox.ru

Рассматривается технология построения непрерывного профиля из ступенчатого, который дают распределенные термопрофилемеры с разложением профиля по функциям Уолша. Дается сравнительная оценка погрешностей такого восстановления и интерполяции по данным измерений цепочки точечных датчиков.

Ключевые слова: распределенный профилемер, цепочка датчиков, интерполятор, элиайзинг.

Введение. Распределенные профилемеры Уолша (РПУ) физических полей с разложением профиля измеряемой величины по функциям Уолша используют равномерную модуляцию погонной чувствительности на участках пространственного разрешения, которая относительно просто реализуется. Это делает их перспективными для изготовления и применения. Однако непосредственно даваемый ими профиль измеряемой величины является ступенчатым, неудобным для дальнейшего использования [1].

Постановка задачи. Разработать методы восстановления непрерывного профиля измеряемой величины по данным ступенчатого профиля РПУ. Провести оценку погрешностей восстановления непрерывного профиля по данным РПУ и эквивалентной цепочки точечных датчиков.

Характеристика ступенчатого профиля РПУ. Непосредственно даваемый РПУ профиль измеряемой величины содержит ступеньки на участках пространственного разрешения, причем абсолютная величина (уровень) ступеньки соот-

ветствует среднему значению измеряемой величины на ширине ступеньки, очищенному от аддитивных шумов элиайзинга фильтрацией при обобщенной дискретизации, осуществляемой разложением профиля по ортогональному базису.

Следовательно измерительная информация на выходе РПУ фактически представлена рядом из N отсчетов неких средних значений измеряемой величины между отсчетами, привязанных к серединам пространственных участков разрешения.

Цепочка из N точечных датчиков, размещенных вдоль профиля дает ряд из N отчетов непосредственно измеряемой величины, содержащих шумы элиайзинга.

Схема погрешностей, возникающих при дискретизации случайных непрерывных процессов и полей окружающей среды, для которых характерны бесконечные спадающие временные и пространственные спектры, представлена на рис. 1.

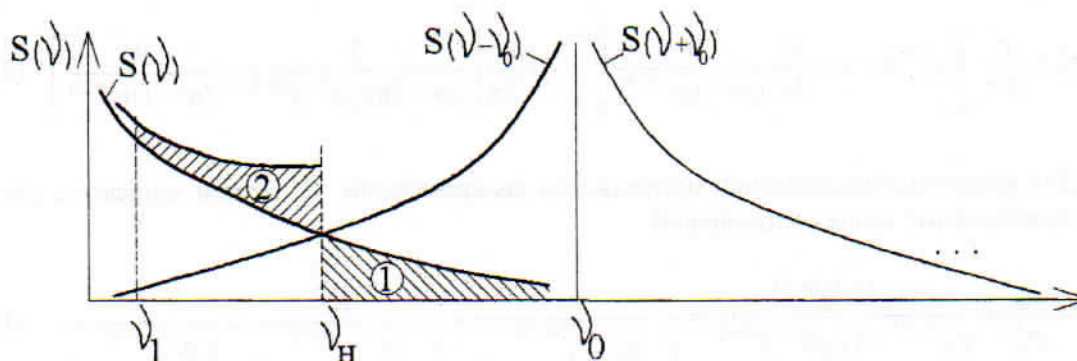


Рис. 1. График наложения функции спектральной плотности $S(v)$ сечения поля при дискретизации

На рис.1 представлен график наложения функции спектральной плотности $S(\nu)$ сечения поля при дискретизации, где ν – пространственная частота, ν_0 – частота пространственной дискретизации, $\nu_H = \nu_0/2$ – частота Найквиста, $\nu_1 = L^{-1} = \nu_0 N^{-1}$ – нижняя граничная частота рабочего диапазона пространственных частот $[\nu_1, \nu_H]$. Имеющее место бесконечное повторение спектра на частотах $i\nu_0$ на рисунке не показано.

Частота Найквиста ν_H разделяет ось частот на две части. Справа лежит отсекаемый ВЧ-хвост, который в принципе информативен и его отсечение означает потерю информации (заштрихованная область 1 на рис. 1) и возникновение погрешности с дисперсией сигнала этого хвоста по формуле

$$\varepsilon^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\nu_H}^{\infty} S(\nu) a \nu \quad (1)$$

Слева от ν_H лежит рабочая полоса частот, нижняя граница которой определяется длиной базы L или числом

участков разрешения N на базе.

За счет элиазинга ВЧ-хвост складывается гармошкой в рабочую полосу частот (вообще говоря, от 0 до ν_H) со своей интегральной энергией помехи с дисперсией по формуле (1) (заштрихованная область 2 на рис. 1).

При непосредственной дискретизации профиля гирляндой точечных датчиков присутствуют обе погрешности: погрешность отсечения ВЧ-хвоста и равная ей погрешность элиазинга.

При обобщенной дискретизации РПУ элиазинга нет, и остается только погрешность отсечения ВЧ-хвоста. Следовательно интегральная погрешность дискретизации распределенным профиломером с N участками всегда как минимум в два раза меньше чем погрешность дискретизации N точечными датчиками.

Количественные оценки погрешностей дискретизации проведем для характерных спектров сечений полей окружающей среды. Таковыми являются степенные спектры вида $S(\nu) = c|\nu|^{-m}$, где $2 \leq m \leq 5$. Для дисперсии погрешности отсечения ВЧ-хвоста из формулы (1) получим

$$\varepsilon_m^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\nu_H}^{\infty} c|\nu|^{-m} = -\frac{c(\nu)^{-(m-1)}}{2\pi(m-1)} \Big|_{\nu_H}^{\infty} = \frac{c}{2\pi(m-1)\nu_H^{(m-1)}} \quad (2)$$

Для того, чтобы перейти к относительной погрешности, определим дисперсию процесса в рабочей полосе $[\nu_1, \nu_H]$

$$\sigma_m^2 = \frac{c}{2\pi} \int_{\nu_0 N^{-1}}^{\nu_H} |\nu|^{-m} a \nu = -\frac{c}{2\pi} \frac{1}{(m-1)\nu^{(m-1)}} \Big|_{\nu_0 N^{-1}}^{\nu_H} = \frac{c}{2\pi} \left[\frac{1}{(m-1)(\nu_0 N^{-1})^{(m-1)}} - \frac{1}{(m-1)\nu_H^{(m-1)}} \right] \quad (3)$$

Для квадрата относительной погрешности дискретизации δ^2 можем записать с учетом приведенных выше соотношений

$$\delta_m^2 = \frac{\varepsilon_m^2}{\sigma_m^2} = \frac{(\nu_0 N^{-1})^{(m-1)}}{\nu_H^{(m-1)} - (\nu_0 N^{-1})^{(m-1)}} = \frac{1}{\left(\frac{\nu_H}{\nu_0 N^{-1}}\right)^{(m-1)} - 1} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2N^{-1}}\right)^{(m-1)} - 1} = \frac{1}{\left(\frac{N}{2}\right)^{(m-1)} - 1} \quad (4)$$

или

$$\delta_m \approx \left(\frac{N}{2}\right)^{-\left(\frac{m-1}{2}\right)} \quad (5)$$

Протабулируем выражение (4).

Таблица 1. Квадрат относительной погрешности дискретизации δ_m^2

δ_m^2	N	2	4	8	16	32	64	128
δ_2^2	∞	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{31}$	$\frac{1}{63}$	$\frac{1}{127}$
δ_3^2	∞	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{63}$	$\frac{1}{255}$	$\frac{1}{1023}$	$\frac{1}{4095}$	$\frac{1}{16383}$
δ_4^2	∞	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{63}$	$\frac{1}{511}$	$\frac{1}{4095}$	$\frac{1}{2^{15}-1}$	$\frac{1}{2^{18}-1}$	$\frac{1}{2^{21}-1}$
δ_5^2	∞	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{255}$	$\frac{1}{2^7-1}$	$\frac{1}{2^{16}-1}$	$\frac{1}{2^{20}-1}$	$\frac{1}{2^{24}-1}$	$\frac{1}{2^{28}-1}$

Для наглядности по приближению 5 построим таблицу 2.

Таблица 2. Относительная погрешность дискретизации δ_m

δ_m	N	2	4	8	16	32	64	128
δ_2	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2\sqrt{2}}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4\sqrt{2}}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8\sqrt{2}}$
δ_3	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{128}$
δ_4	1	$\frac{1}{2\sqrt{2}}$	$\frac{1}{8}$	–	$\frac{1}{16\sqrt{2}}$	$\frac{1}{128\sqrt{2}}$	$\frac{1}{256\sqrt{2}}$	$\frac{1}{512\sqrt{2}}$
δ_5	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{256}$	$\frac{1}{1024}$	$\frac{1}{4096}$	$\frac{1}{16384}$

Можно сделать вывод о том, что погрешность дискретизации профиля поля, имеющего степенную функцию спектральной плотности с параметром m , распределенным термопрофилемером Уолша с N участками не может ниже оценки 5, а цепочкой из N точечных датчиков в два раза большей.

Представляют интерес оценки требуемого числа N_m при заданной δ_m по формуле

$$N \cong 2^{m-1} \delta_m^{-1} \quad (6)$$

Эти оценки представлены в таблице 3.

Таблица 3. Оценки минимального числа участков разрешения N_m при заданной погрешности дискретизации δ

N_m	δ	1	0,5	0,1	0,05	0,01	0,005	0,001	0,0001
N_2		6	10	42	82	402	802	4002	40002
N_3		4	6	10	14	23	42	90	284
N_4		3	4	6	7	12	15	26	32
N_5		3	3	5	6	8	10	14	24

Анализ этой таблицы не вселяет оптимизма по обеспечению точности измерений выше 1% доступными средствами для профилей с $m < 4$.

Приведенные выше оценки интегральной погрешности дискретизации относились к профилю измеряемой величины во всей полосе пространственных частот $-\infty < \nu < \infty$, которая при вычислениях ограничивалась диапазонами $[0, \infty]$ или $[\nu_1, \infty]$. Если необходимо рассмотреть изменчивость профиля в узкой полосе $[\nu_1, \nu_2]$ в пределах рабочей полосы $[\nu_1, \nu_H]$, то можно воспользоваться формулами, приведенными в [2].

Если отсекаемый распределенным профиломером ВЧ-хвост в полосе $[\nu_H, \infty]$ измеряемого профиля не представляет интереса для исследования, то, следовательно, его отсутствие не создает погрешности. При одновременном отсутствии погрешности наложения получается, что в рабочей полосе $[\nu_1, \nu_H]$ РПУ не должен иметь погрешности дискретизации.

Для этого восстанавливаемый по отсчетам высот ступенек непрерывный профиль должен сохранять соотношение гармоник в спектре исходного измеряемого профиля. Это возможно, если использовать дискретное преобразование Фурье (ДПФ) для получения из ряда отсчетов высот ступенек амплитуд гармоник тригонометрического ряда Фурье, по которому и восстановить непрерывный профиль [3].

Другие интерполяторы не сохраняют соотношения составляющих в спектре исходного профиля и дают погрешности.

Их широкое применение для интерполяции временных сигналов по коротким временным рядам оправдано стремлением сократить временную задержку в системах реального времени и, иногда, уменьшить объем вычислений.

Пространственный профиль, выдаваемый РПУ, одновременно имеет весь ряд отсчетов и пригоден для выполнения быстрого преобразования Фурье (БПФ).

Визуализация профилей измеряемой величины во времени наиболее наглядна в виде временного хода изолиний. Фактически для получения пространственной координаты изолинии измеряемой величины необходимо осуществить «обратную» интерполяцию. При интерполяции полиномами малых порядков это можно выполнить аналитически. Например, линейный интерполятор $\theta(x_i)$ между двумя отсчетами $\theta(0)$ и $\theta(1)$ в точках 0 и 1 с расстоянием Δx работает по формуле

$$\theta(x) = \left(1 - \frac{x}{\Delta x}\right)\theta(0) + \frac{x}{\Delta x}\theta(1) \quad (7)$$

Формула «обратной» интерполяции для координаты x для заданного значения θ_{uz} будет иметь вид

$$x_{uz} = \frac{[\theta_{uz} - \theta(0)]\Delta x}{\theta(1) - \theta(0)} \quad (8)$$

При построении изолиний по тригонометрическому ряду Фурье формулы «обратной» интерполяции не существует и координату заданного значения θ из изолинии можно установить настройкой аргумента x в формуле ряда. Такая настройка (поиск) может осуществляться разными методами.

Восстановление ВЧ-хвоста пространственного спектра профиля. Выше было показано, что при восстановлении ступенчатого профиля измеряемой величины по функциям Уолша ВЧ-хвост в спектре измеряемой величины отсекается. Рассмотрим возможность его восстановления. Разложение профиля по функциям Уолша может реализовываться аппаратно и аппаратно-программно. В первом случае модуляция пространственной функции чувствительности распределенных проводников выполняется непосредственно по функциям Уолша (± 1) и сигнал на выходе проводников прямо связан со значением соответствующей орты разложения. При этом ВЧ-хвост пространственного спектра профиля отфильтровывается и информация о нем теряется.

Во втором случае модуляция пространственной функции чувствительности распределенных проводников выполняется только на участках разрешения равномерно (+1) и по выходным сигналам проводников программно формируются орты разложения по функциям Уолша. Однако вместо последней операции (или дополнительно) можно выполнить процедуру антиэлиазинга по восстановлению амплитуд от гармоник в рабочей полосе $[v_1, v_H]$ и частично ВЧ-хвоста методом формирования и решения системы уравнений наложения для модулированных спектральных составляющих прореженных рядов отсчетов [4]. При равномерной модуляции на участках x_i разрешение l_0 выходные сигналы проводников $\theta_i(x_i)$ пропорциональны средним значениям измеряемой величины $\bar{\theta}(x_i)$ на этих участках.

При этом пространственный спектр $\dot{\theta}(v)$ непрерывного профиля $\theta(x)$ трансформируется и с привязкой сдвига на $\frac{l_0}{2}$ будет равен

$$\dot{\theta}_{l_0}(v) = \dot{\theta}(v) \left| \frac{\sin 2\pi v l_0}{2\pi v l_0} \right| e^{-jv \frac{l_0}{2}} = \quad (9)$$

$$= [\dot{\theta}_c(v) - j\dot{\theta}_s(v)] \left| \frac{\sin 2\pi v l_0}{2\pi v l_0} \right| \left(\cos 2\pi v \frac{l_0}{2} - j \sin 2\pi v \frac{l_0}{2} \right) = \dot{\theta}_{c_{l_0}}(v) - j\dot{\theta}_{s_{l_0}}(v),$$

$$\text{где } \dot{\theta}_{c_{l_0}}(v) = \left| \frac{\sin 2\pi v l_0}{2\pi v l_0} \right| \theta_c(v) \cos 2\pi v \frac{l_0}{2} + \left| \frac{\sin 2\pi v l_0}{2\pi v l_0} \right| \theta_s(v) \sin 2\pi v \frac{l_0}{2}; \quad (10)$$

$$\dot{\theta}_{s_{l_0}}(v) = \left| \frac{\sin 2\pi v l_0}{2\pi v l_0} \right| \theta_c(v) \sin 2\pi v \frac{l_0}{2} + \left| \frac{\sin 2\pi v l_0}{2\pi v l_0} \right| \theta_s(v) \cos 2\pi v \frac{l_0}{2}. \quad (11)$$

При последовательном объединении m участков осреднения вместо l_0 в формулах (9–11) ставится ml_0 .

После дискретизации ступенчатого профиля рядом отсчетов, привязанных к серединам участков осреднения (ступе-

нек), для вычисляемых по результатам измерения составляющих дискретного спектра для разных ml_0 получим систему линейных алгебраических уравнений вида

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_{c,ml_0}^*(\nu) = \frac{1}{ml_0} & \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} \left| \frac{\sin 2\pi ml_0 \left(\nu \pm i \frac{V_0}{m} \right)}{2\pi ml_0 \left(\nu \pm i \frac{V_0}{m} \right)} \right| \theta_c \left(\nu \pm i \frac{V_0}{m} \right) \cos \pi ml_0 \left(\nu \pm i \frac{V_0}{m} \right) + \right. \\ & \left. + \sum_{i=0}^{\infty} \left| \frac{\sin 2\pi ml_0 \left(\nu \pm i \frac{V_0}{m} \right)}{2\pi ml_0 \left(\nu \pm i \frac{V_0}{m} \right)} \right| \theta_s \left(\nu \pm i \frac{V_0}{m} \right) \sin \pi ml_0 \left(\nu \pm i \frac{V_0}{m} \right) \right\}; \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_{s,ml_0}^*(\nu) = \frac{1}{ml_0} & \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} \left| \frac{\sin 2\pi ml_0 \left(\nu \pm i \frac{V_0}{m} \right)}{2\pi ml_0 \left(\nu \pm i \frac{V_0}{m} \right)} \right| \theta_c \left(\nu \pm i \frac{V_0}{m} \right) \sin \pi ml_0 \left(\nu \pm i \frac{V_0}{m} \right) + \right. \\ & \left. + \sum_{i=0}^{\infty} \left| \frac{\sin 2\pi ml_0 \left(\nu \pm i \frac{V_0}{m} \right)}{2\pi ml_0 \left(\nu \pm i \frac{V_0}{m} \right)} \right| \theta_s \left(\nu \pm i \frac{V_0}{m} \right) \cos \pi ml_0 \left(\nu \pm i \frac{V_0}{m} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (13)$$

где неизвестными являются составляющие спектра измеряемого профиля $\theta_c \left(\nu \pm i \frac{V_0}{m} \right)$ и $\theta_s \left(\nu \pm i \frac{V_0}{m} \right)$ при $i = \overline{0, \infty}$ во всей полосе пространственных частот от $-\infty$ до $+\infty$. Реально по-

лоса будет ограничена при некотором $m^{-1}iV_0$ из-за спада функции $|S_i(i\nu)|$ и система будет содержать конечное число уравнений $2n$, $\nu = \overline{0, n-1}$.

Введем обозначения для коэффициентов модуляции спектральных составляющих

$$C_m \left(\nu \pm im^{-1}V_0 \right) = \frac{1}{ml_0} \left| \frac{\sin 2\pi ml_0 \left(\nu \pm i \frac{V_0}{m} \right)}{2\pi ml_0 \left(\nu \pm i \frac{V_0}{m} \right)} \right| \cos \pi ml_0 \left(\nu \pm i \frac{V_0}{m} \right) \quad (14)$$

$$S_m \left(\nu \pm im^{-1}V_0 \right) = \frac{1}{ml_0} \left| \frac{\sin 2\pi ml_0 \left(\nu \pm i \frac{V_0}{m} \right)}{2\pi ml_0 \left(\nu \pm i \frac{V_0}{m} \right)} \right| \sin \pi ml_0 \left(\nu \pm i \frac{V_0}{m} \right) \quad (15)$$

Уравнения (12–13) примут вид

$$\dot{\theta}_{c,ml_0}^*(\nu) = \sum_{i=0}^{n-1} C_m \left(\nu \pm im^{-1}V_0 \right) \theta_c \left(\nu \pm im^{-1}V_0 \right) + \sum_{i=0}^{n-1} S_m \left(\nu \pm im^{-1}V_0 \right) \theta_s \left(\nu \pm im^{-1}V_0 \right) \quad (16)$$

$$\dot{\theta}_{s,ml_0}^*(\nu) = \sum_{i=0}^{n-1} S_m \left(\nu \pm im^{-1}V_0 \right) \theta_c \left(\nu \pm im^{-1}V_0 \right) + \sum_{i=0}^{n-1} C_m \left(\nu \pm im^{-1}V_0 \right) \theta_s \left(\nu \pm im^{-1}V_0 \right)$$

Процедура объединения участков профиля для осреднения эквивалентна прореживанию числа отсчетов, т.е. снижению пространственной частоты дискретизации ν_0 в целое число раз и образованию новых спектральных шкал, число которых равно числу делителей.

Для примера на рис. 2 представлена пила элиазинга и схема формирования системы из 2×25 уравнений для вычисления составляющих 25 частот при

начальной частоте дискретизации $\nu_0 = 24$, частоте Найквиста 12 с формированием новых спектральных шкал на 2×6 , 2×4 и 2×3 уравнений за счет прореживания с делителями 2, 3, 4. На схеме показаны принятые выше обозначения коэффициентов модуляции $S_m(\nu \pm im^{-1}\nu_0)$ $C_m(\nu \pm im^{-1}\nu_0)$ и измеряемых спектральных составляющих $\theta_{c,ml_0}^*(\nu)$ и $\theta_{s,ml_0}^*(\nu)$.

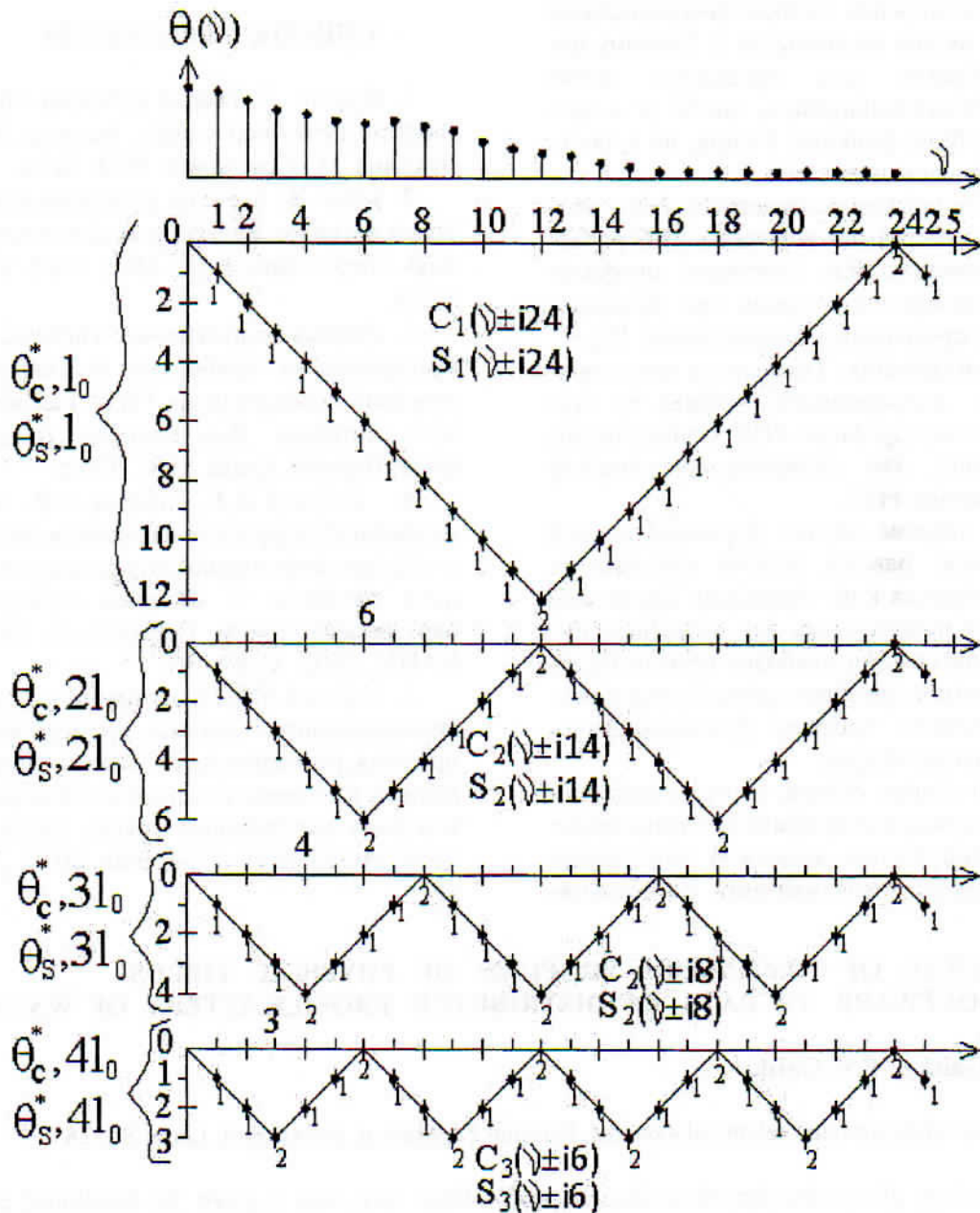


Рис. 2. Схема формирования системы уравнений для вычисления спектральных составляющих за пределами частоты Найквиста

Решение системы уравнений вида (16) для примера на рис. 2 позволяет найти амплитуды составляющих гармоник $\theta_c\left(\nu \pm i \frac{\nu_0}{m}\right)$ и $\theta_s\left(\nu \pm i \frac{\nu_0}{m}\right)$ в рабочей полосе от ν_1 до ν_H и в полосе $[\nu_H, 25]$, т.е. расширить полосу частот в два раза.

Отметим, что для частотных шкал, количество частот в которых равно степени 2, характерных для функций Уолша, а также удобных для БПФ, возможное расширение полосы восстанавливаемых частот не превысит 2. Поэтому целесообразно для процедуры антиэлиазинга выбиралось число N в пределах базы функций Уолша, но с большим числом делителей.

Для априорно известного типа профиля измеряемой величины выбор распределенного или точечного профиломера может быть сделан при использовании программы моделирования [5].

Заключение. Технология восстановления непрерывного профиля по ступенчатому профилю РПУ зависит от аппаратной или аппаратно-программной реализации РПУ.

В первом случае формируется ряд отсчетов, равных высоте ступенек и привязанных к их серединам. Далее возможно использовать все известные интерполяторы, но наиболее точным будет дискретное преобразование Фурье и восстановление профиля тригонометрическим рядом Фурье.

Во втором случае, по отсчетам средних на участках профиля без вычисления функций Уолша, возможно выполнение процедуры антиэлиазинга с восстанов-

лением гармоник в расширенной полосе частот и далее непрерывного профиля по ряду Фурье.

Восстановление непрерывного профиля по данным цепочки точечных датчиков с числом, равным числу участков пространственного разрешения на профиле, всегда имеет погрешность минимум в два раза выше, чем по данным РПУ.

Технологически при изготовлении и при использовании распределенные профиломеры всегда предпочтительнее.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Френкс Л. Теория сигналов. Нью-Джерси. 1969 / пер. с англ., под ред. Д.Е. Вакмана. М.: Сов. радио. 1974. 344 с.
2. Макс Ж. Методы и техника обработки сигналов при физических измерениях / пер. с франц. М.: Мир. 1983. Т. 1. 312 с.
3. Автоматизированные системы с буксируемыми приборами в океанологических исследованиях / В.А. Гайский., Ю.Г. Артемов, В.А. Блинков [и др.]. Киев: Наукова думка. 1987. 176 с.
4. Гайский В.А., Гайский П.В. Антиэлиазинг: коррекция наложения частот в спектре равномерно дискретизированного процесса // Системы контроля окружающей среды. Севастополь: МГИ НАНУ, 2002. С. 99–107.
5. Гайский П.В. Программная модель сравнительного анализа измерителей профиля температуры на базе распределенных и точечных датчиков // Системы контроля окружающей среды. Севастополь: МГИ НАНУ, 2014. Вып. 20. С. 33–43.

RENEWAL OF CONTINUOUS PROFILES OF PHYSICAL FIELDS OF SOFTWARE TO DATA OF DISTRIBUTED PROFILEMETERS OF WALSH

V.A. Gaisky, P.V. Gaisky

Institute of natural and technical systems, Russian Federation, Sevastopol, Lenin St., 28

Technology of construction of continuous profile from step, that is given by distributed profilemeters with decomposition of profile on Walsh functions is considered. The comparative estimation of error of such renewal and interpolation is given from measuring data of chainlet of point sensors.

Keywords: distributed profilemeter, chainlet of sensors, interpolator, eliazing.