

СПЕКТРАЛЬНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ДИСКРЕТИЗИРОВАННЫХ ПРОЦЕССОВ (АНТИЭЛИАЙЗИНГ)

В.А. Гайский, П.В. Гайский

Морской гидрофизический институт
г. Севастополь, ул. Капитанская, 2
E-mail: oaoimhi@inbox.ru

Предлагается метод восстановления непрерывных процессов по дискретному спектру с определением параметров гармоник, частоты которых лежат выше частоты Найквиста.

Введение. Непрерывный процесс $x(t)$ на отрезке времени $t = \overline{0, T}$ пред-

ставляется с достаточной точностью комплексным спектром

$$\dot{X}(\omega) = X_c(\omega) - jX_s(\omega), \quad \omega = \overline{0, \omega_m}, \quad (1)$$

где $X_c(\omega)$ – вещественная (косинусная) составляющая спектра; $X_s(\omega)$ – мнимая (синусная) составляющая спектра; ω_m – верхняя циклическая частота в спектре процесса.

При дискретизации процесса с интервалом времени τ_0 (частотой $f_0 = \tau_0^{-1}$, циклической частотой $\omega_0 = 2\pi f_0$ (рис. 1) получим ряд $x(i\tau_0)$ ($i = \overline{0, N-1}$) из N отсчетов ($N = Tf_0$) и спектр дискретизированного процесса

$$\dot{X}^*(\omega) = \frac{1}{\tau_0} \sum_{i=0}^N X_c(\omega \pm i\omega_0) - j \frac{1}{\tau_0} \sum_{i=0}^N X_s(\omega \pm i\omega_0) = X_c^*(\omega) - jX_s^*(\omega). \quad (2)$$

Реально вычисляемый по N отсчетам спектр $\dot{Y}^*(\omega)$ содержит гармоники не более $\frac{N}{2}$ частот с частотой Найквиста $f_H = f_0/2$ или $\omega_H = \pi f_0$.

Если $\omega_H < \omega_m$, ($f_H < f_m$), т.е. не удовлетворяются требования отсчетов Котельникова, это имеет место наложение гармоник разных частот сверткой гармоник верхних частот ($\omega > \omega_H$) в рабочую полосу $\overline{0, \omega_H}$ (элиайзинг) и возникает погрешность дискретизации, не устранимая при всех известных методах интерполяции во временной области [1, 2]. Если определить параметры всех гармоник наложения, то обратным преобразованием Фурье можно восстановить сигнал во временной области без погрешности дискретизации.

Постановка задачи. Схема элиайзинга представлена на рис. 2. Из рисунка видна регулярность наложения

$$\begin{aligned} \dot{X}_\tau(\omega) &= [X_c(\omega) - jX_s(\omega)][\cos \omega\tau - j \sin \omega\tau] = [X_c(\omega)\cos \omega\tau + X_s(\omega)\sin \omega\tau] - \\ &- j[X_c(\omega)\sin \omega\tau + X_s(\omega)\cos \omega\tau] = X_\pi(\omega) - jX_{\pi s}(\omega), \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$X_\pi(\omega) = X_c(\omega)\cos \omega\tau + X_s(\omega)\sin \omega\tau, \quad (5)$$

$$X_s(\omega) = X_c(\omega)\sin\omega\tau + X_s(\omega)\cos\omega\tau . \quad (6)$$

Для дискретизированных процессов $X(p)$ и $X_r(p)$ и наблюдаемых $X_n^*(\omega)$ и $X_s^*(\omega)$ получим

$$X_n^*(\omega) = \frac{1}{\tau_0} \sum_{i=0}^n [X_c(\omega \pm i\omega_0)\cos(\omega \pm i\omega_0)\tau + X_s(\omega \pm i\omega_0)\sin(\omega \pm i\omega_0)\tau], \quad (7)$$

$$X_s^*(\omega) = \frac{1}{\tau_0} \sum_{i=0}^n [X_c(\omega \pm i\omega_0)\sin(\omega \pm i\omega_0)\tau + X_s(\omega \pm i\omega_0)\cos(\omega \pm i\omega_0)\tau]. \quad (8)$$

Таким образом, в спектр сдвинутого на τ процесса спектральные составляющие исходного процесса войдут перекрестно с весами $\cos(\omega \pm i\omega_0)\tau$, а $\sin(\omega \pm i\omega_0)\tau$, т.е. будут модулированы («окрашены»). Для разных сдвигов будут разные вычисляемые спектры (7) и (8). Каждый новый спектр $X_r(p)$ даст $f_0/2$ уравнений типа (7) и (8). Если всего гармоник m , то потребуется

$$K = \frac{m}{f_0/2} = \frac{2m}{f_0}$$

спектров, т.е. один не сдвинутый процесс $x(t)$ и $(K-1)$ сдвинутых $x(t-\tau_1)$, $x(t-\tau_2)$... $x(t-\tau_{K-1})$ процессов и их спектров.

При этом схема перекрытия спектров и формируемой системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) показана на рис. 3.

Для исключения образования одинаковых столбцов и строк коэффициентов в определителе и равенства его нулю будущей СЛАУ период модулирующих

$$\text{гармоник по шкале частот } f = \frac{1}{2\tau}$$

должен быть больше f_m , т.е. $\tau_k \leq \frac{1}{2f_m}$. Поскольку в рассматриваемой задаче $f_m > f_0/2$, то отсчеты процессов $x(t-\tau_i)$, $i = \overline{1, k}$, целесообразно осуществить во время процесса аналого-цифрового преобразования вблизи первого отсчета, т.е. пакетом так, как показано на рис. 1.

Во многих циклических системах такая «пакетная» дискретизация может быть предпочтительнее или единственно возможной, чем соответствующее увеличение частоты дискретизации f_0 .

Комбинированные спектрально-временные методы интерполяции. Если имеется равномерно дискретизированный процесс $x(i\tau_0)$ $i = \overline{0, N}$, то дополнительно сдвинутые на τ отсчеты $x(i\tau_0 - \tau)$, можно получить временной интерполяцией с использованием известных интерполяторов. Поскольку последние дают при разных τ разные спектры восстанавливаемых процессов, то необходимо приводить их к спектру исходного процесса, т.е. осуществлять спектральную коррекцию.

Для спектра $Y_r(p)$ процесса в точке τ на выходе интерполятора с передаточной функцией $G_r(p)$ можем записать

$$Y_r(p) = X(p)G_r(p). \quad (9)$$

Далее

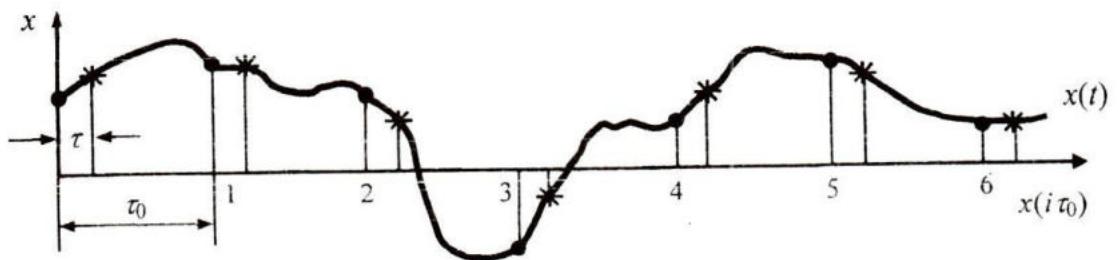
$$X(p) = \frac{Y_r(p)}{G_r(p)}, \quad (10)$$

где $Y_r(p)$ – наблюдаемая величина.

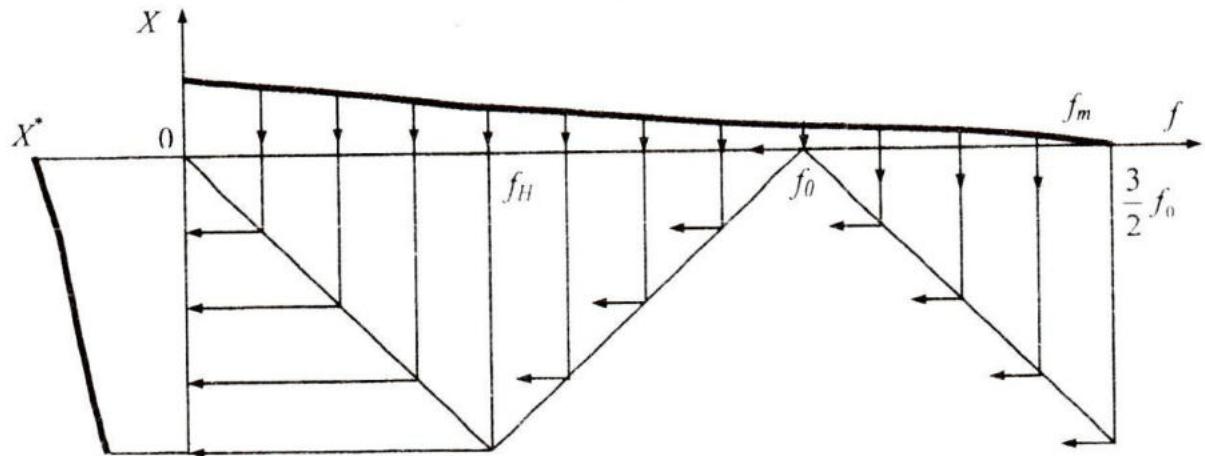
Для спектра, задержанного на τ процесса $X_r(p) = X(p)e^{-p\tau}$

$$Y_r(p) = X_r(p)G_r(p)e^{p\tau}. \quad (11)$$

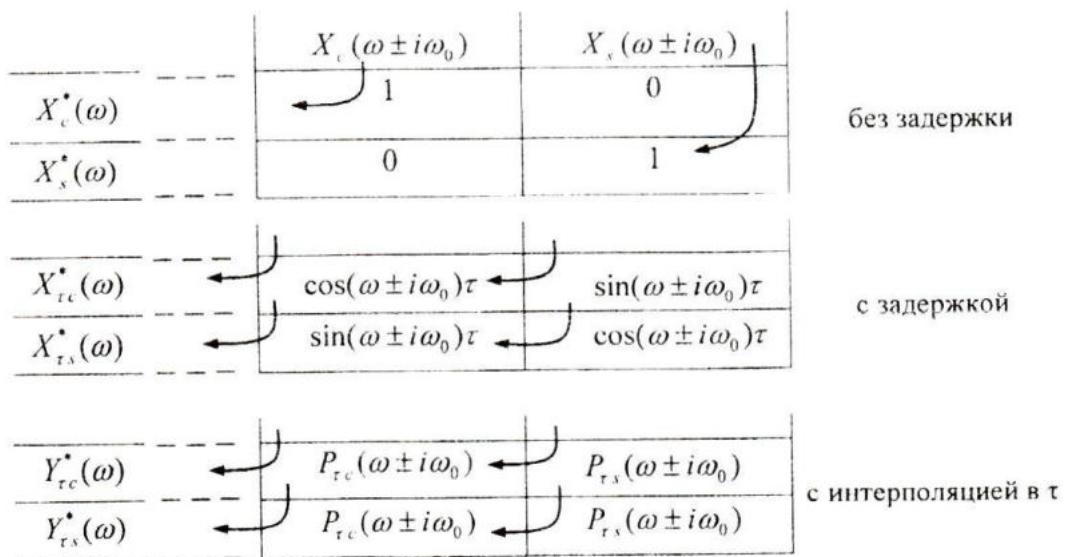
Если величина τ задана априорно, то имеет смысл вычислить множитель $\frac{1}{G_r(p)}e^{p\tau}$ заранее.



Р и с. 1. Равномерная и пакетная дискретизация



Р и с. 2. Схема элиайзинга при $f_0 < f_m < \frac{3}{2} f_0$



Р и с. 3. Схемы элиайзинга для фиксированных ω и τ

Запишем

$$G_r(p)e^{pt} = [G_n(\omega) - jG_s(\omega)](\cos \omega\tau + j \sin \omega\tau) = [P_n(\omega) + jP_s(\omega)], \quad (12)$$

где

$$P_n(\omega) = G_n(\omega) \cos \omega\tau - G_s(\omega) \sin \omega\tau. \quad (13)$$

$$P_s(\omega) = G_n(\omega) \cos \omega\tau + G_s(\omega) \sin \omega\tau, \quad (14)$$

Далее

$$\dot{Y}_r(\omega) = \dot{X}_r(\omega) \dot{P}(p) = [X_n(\omega) - jX_s(\omega)] [P_n(\omega) + jP_s(\omega)] = \quad (15)$$

$$= \{[X_n(\omega)P_n(\omega) + X_s(\omega)P_s(\omega)] + j[X_n(\omega)P_s(\omega) - X_s(\omega)P_n(\omega)]\}. \quad (16)$$

Для составляющих спектра $\dot{Y}_r(\omega)$ можем записать

$$Y_n(\omega) = [X_n(\omega)P_n(\omega) + X_s(\omega)P_s(\omega)], \quad (17)$$

$$Y_s(\omega) = [X_n(\omega)P_s(\omega) - X_s(\omega)P_n(\omega)]. \quad (18)$$

После дискретизации получим

$$Y_n^*(\omega) = \frac{1}{\tau_0} \left\{ \sum_{i=0}^n X_n(\omega \pm i\omega_0) P_n(\omega \pm i\omega_0) + \sum_{i=0}^n X_s(\omega \pm i\omega_0) P_s(\omega \pm i\omega_0) \right\}, \quad (19)$$

$$Y_s^*(\omega) = \frac{1}{\tau_0} \left\{ \sum_{i=0}^n X_n(\omega \pm i\omega_0) P_s(\omega \pm i\omega_0) - \sum_{i=0}^n X_s(\omega \pm i\omega_0) P_n(\omega \pm i\omega_0) \right\}. \quad (20)$$

Таким образом, комбинированный метод интерполяции состоит в формировании сдвинутых на разные τ последовательностей с помощью временных интерполяторов с передаточной функцией $G_r(p)$, вычисление спектров $Y_r(p)$ этих последовательностей.

Далее процедура восстановления гармоник наложения (антиэлиайзинг) осуществляется также, как в методе пакетных отсчетов.

Рассмотрим передаточные функции некоторых временных интерполяторов.

Передаточные функции интерполяторов. Для ряда отсчетов $x(i\tau_0), i = \overline{0, n}$, восстанавливаемые в точке τ значения вычисляют по формуле

$$x(\tau) = \sum_{i=0}^n a_i(\tau) x(i\tau_0), \quad (21)$$

где $a_i(\tau)$ – вес i -го отсчета.

Для таких интерполяторов передаточные функции имеют вид

$$G_r(p) = \sum_{i=0}^n a_i(\tau) e^{-pi\tau_0} = G_n(\omega) - jG_s(\omega). \quad (22)$$

Интерполятор 0-го порядка.

$$x(\tau) = x(0), \quad \tau = 0, \tau_0.$$

$$a_0(\tau) = 1, \quad a_i = 0, i \neq 0.$$

$$G_n(\omega) = \cos \omega \tau_0, \quad (23)$$

$$G_s(\omega) = -\sin \omega \tau_0. \quad (24)$$

Интерполятор 1-го порядка.

$$a_0(\tau) = \left(1 - \frac{\tau}{\tau_0}\right), \quad a_1(\tau) = \frac{\tau}{\tau_0}, \\ a_i = 0, i \geq 2.$$

$$G_{\pi}(\omega) = \left(1 - \frac{\tau}{\tau_0}\right) + \frac{\tau}{\tau_0} \cos \omega \tau_0 = 1 + \frac{\tau}{\tau_0} (\cos \omega \tau_0 - 1), \quad (25)$$

$$G_{\pi^*}(\omega) = \frac{\tau}{\tau_0} \sin \omega \tau_0. \quad (26)$$

Интерполятор 2-го порядка.

$$a_0(\tau) = \frac{2\tau_0^2 - 3\tau\tau_0 + \tau^2}{2\tau_0^2}, \quad a_1(\tau) = \frac{2\tau\tau_0 - \tau^2}{\tau_0^2}, \quad a_2(\tau) = \frac{\tau^2 - \tau\tau_0}{2\tau_0^2}, \quad a_i = 0, \quad i \geq 3.$$

$$G_{\pi}(\omega) = \frac{2\tau_0^2 - 3\tau\tau_0}{2\tau_0^2} + \frac{2\tau\tau_0 - \tau^2}{\tau_0^2} \cos \omega \tau_0 + \frac{\tau^2 - \tau\tau_0}{2\tau_0^2} \cos 2\omega \tau_0, \quad (27)$$

$$G_{\pi}(\omega) = \frac{2\tau\tau_0 - \tau^2}{\tau_0^2} \sin \omega \tau_0 - \frac{\tau^2 - \tau\tau_0}{2\tau_0^2} \sin 2\omega \tau_0. \quad (28)$$

Интерполяция по формуле Котельникова

При $n=1$.

$$a_0 = \frac{\sin(-\frac{\pi\tau}{\tau_0})}{-\frac{\pi\tau}{\tau_0}}, \quad a_1 = \frac{\sin[\pi(1 - \frac{\tau}{\tau_0})]}{\pi(1 - \frac{\tau}{\tau_0})};$$

$$G_{\pi}(\omega) = \frac{\sin \frac{\pi\tau}{\tau_0}}{\frac{\pi\tau}{\tau_0}} + \frac{\sin[\pi(1 - \frac{\tau}{\tau_0})]}{\pi(1 - \frac{\tau}{\tau_0})} \cos \omega \tau_0. \quad (29)$$

$$G_{\pi^*}(\omega) = \frac{\sin[\pi(1 - \frac{\tau}{\tau_0})]}{\pi(1 - \frac{\tau}{\tau_0})} \sin \omega \tau_0. \quad (30)$$

Заключение. При выполнении пакетной дискретизации с k отсчетами в пакете и условии $\frac{\tau_0}{2\tau_k} \geq k$ возможно расширение полосы частот восстанавливаемых гармоник в k раз, превышающее частоту Найквиста без ограничений точности при отсутствии шумов.

Для равномерно дискретизированного процесса возможно приближенное построение пакета отсчетов с использованием временных интерполяторов и далее выполнение процедуры антиэлиайзинга, точность которого требует дальнейшего исследования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Маркос Ж. Дискретизация и квантование. – М.: Энергия, 1969. – 144 с.
2. Ефимов В.М. Квантование по времени при измерении и контроле. – М.: Энергия, 1969. – 87 с.
3. Гайский В.А., Гайский П.В. Антиэлиайзинг в многоканальных системах аналого-цифрового преобразования сигнала // Системы контроля окружающей среды. – Севастополь: МГИ НАН Украины, 2012. – Вып. 18. – С. 75 – 83.