

**ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ
СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА
СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ
И ЕГО ПРИМЕНЕНИИ
К ИССЛЕДОВАНИЮ ДИНАМИКИ
СЛОЖНЫХ СИСТЕМ**

С.В. Согомонян

Научно-исследовательский центр
ВС Украины
"Государственный океанариум"
г. Севастополь, ул. Эпронская, 7
E-mail: *sogomonyan@mail.ru*

Предложен метод спектрального анализа стационарных случайных процессов, предполагающий декомпозицию спектра на элементарные спектры. Введена мера стохастической регулярности элементарного случайного процесса. Показано удобство применения предложенного метода для исследования случайных процессов, их классификации, выявления структурных особенностей, прогнозирования и моделирования

Статистические методы исследования процессов и их составная часть – спектральный анализ – широко применяются в изучении флуктуаций процессов сложных систем живой и неживой природы, в самых различных областях естествознания: в физике, медицине, биологии, сейсмологии, экономике и т.д.

На практике зачастую анализируемые случайные процессы (далее – СП) представляют собой суперпозицию множества независимых СП более простой структуры, их функции спектральной плотности полимодальны (например, спектр волнения имеет несколько максимумов вследствие наложения нескольких волновых систем; спектр качки может быть многовершинным из-за многовершинности спектра волнения, действующего на корабль, и (или) из-за определенного соотношения частот максимумов волнения и АЧХ корабля). Анализировать такие "составные" процессы достаточно сложно и во временной, и в частотной области, так как при наложении составляющих компонент маскируются и искажаются полезные закономерности. Возникает естественное желание вычленившие составляющие в анализируемом процессе. Учет структурных

особенностей СП полезен для построения оптимального прогноза, моделирования СП на ЭВМ и т.д. В частности, такая сингулярность СП, как его периодическая нестационарность (типичный пример – групповое волнение и пакетная качка судна, когда колебания возрастают и убывают с некоторой периодичностью), с одной стороны, создаёт проблемы в практическом применении оптимальных методов, а с другой стороны, её осмысление и учет может позволить существенно упростить алгоритмы, реализующие эти методы, и дополнить классический прогноз долгосрочным.

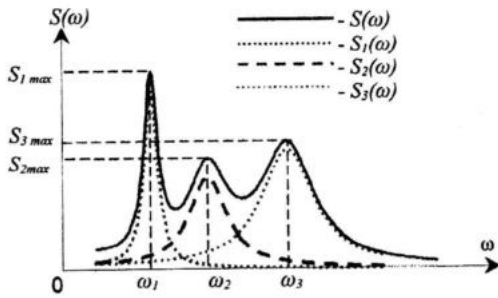
Кроме того, реальные прикладные задачи анализа СП вызывают необходимость ввести количественную характеристику (меру) их регулярности, тогда как в классической теории СП последние принято [1, 2] разделять на сингулярные (детерминированные), недетерминированные и регулярные (вполне недетерминированные).

Ограничимся достаточно широким классом стационарных однородных СП (при исследовании реальных СП в них часто можно выделить участки квазистационарности и квазиоднородности, на которых процесс можно считать эргодическим).

Введем, пока на качественном уровне, операцию **декомпозиции спектра**. Пусть спектральная плотность $S(\omega)$ исследуемого СП $x(t)$ имеет N максимумов $S_{i\max}$ на частотах ω_i . Такой полимодальный (многовершинный) спектр с N максимумами можно условно разбить на N унимодальных (одновершинных) элементарных спектров:

$$S(\omega) = \sum_{i=1}^N S_i(\omega) \quad (1)$$

так, что каждая из функций $S_i(\omega)$ имеет только один экстремум – максимум на частоте ω_i , равный $S_{i\max}$. Назовем такое разбиение декомпозицией спектра. Пример декомпозиции спектра наглядно изображен на рис. 1. Из фрагмента некоторого полимодального спектра $S(\omega)$, содержащего три максимума, выделены элементарные унимодальные спектры $S_1(\omega)$, $S_2(\omega)$, $S_3(\omega)$. В общем случае такая процедура может быть проведена при любом числе экстремумов-вершин. Каждому элементарному спектру $S_i(\omega)$



Р и с. 1. Пример декомпозиции спектра

соответствует некоторый элементарный i -й СП $x_i(t)$, совокупность которых дает в сумме искомый:

$$x(t) = \sum_{i=1}^N x_i(t), \quad x_i(t) = \int_0^{\infty} S_i(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (2)$$

причем в соответствии с декомпозицией (1) элементарные СП независимы.

Введем для элементарного спектра $S_i(\omega)$ ширину спектра ε_i , равную

$$\varepsilon_i = \int_0^{\infty} S_i(\omega) d\omega / S_{i \max} = D_i / S_{i \max}, \quad (3)$$

где D_i — дисперсия элементарного СП $x_i(t)$ (т.е. момент нулевого порядка элементарного спектра). Такое определение ширины спектра имеет следующий смысл: если представить элементарный спектр $S_i(\omega)$ в виде эквивалентного ему по площади прямоугольника с высотой $S_{i \max}$, то ε_i будет его шириной.

Покажем, что ε_i также является и мерой регулярности (в стохастическом смысле) элементарного СП $x_i(t)$. Отметим, что стохастическая регулярность процесса противоположна по смыслу понятию регулярности, принятому в инженерной практике (например, в теории корабля или в гидрологии): так, при трансформации ветрового волнения в зыбь ширина спектра ε уменьшается, а само волнение становится регулярным (гармоническим) в общепринятом смысле и теряет регулярность в стохастическом. В дальнейшем будем подразумевать стохастическую регулярность. Рассмотрим класс элементарных СП, спектры которых — гладкие ограниченные унимодальные функции, причем оптимальный линейный прогноз СП есть гармоническая функция (такой класс процессов встречается в реальности, например, это единичные волновые системы зыби или затухающего ветрового волнения с узким унимодальным спектром). Для введения количественной ме-

ры близости СП из рассматриваемого класса к гармонике сравним их спектры. Нормируем сравниваемые спектры так, чтобы они имели максимум, равный 1, на частоте, равной 1, т.е. определим преобразование спектра $S(\omega)$ с максимумом S_{\max} на частоте ω_{\max} такое, что $S(\omega) \rightarrow S^*(\omega^*) = S(\omega / \omega_{\max}) / S_{\max}$, что соответствует линейному преобразованию СП, имеющего спектр $S(\omega)$ и дисперсию σ^2 , в нормированный СП $x^*(t^*) = x(t / \omega_{\max}) / \sqrt{S_{\max}}$ с дисперсией $(\sigma^*)^2 = \sigma^2 / S_{\max}$. Наилучший линейный прогноз для всех нормированных процессов из этого класса есть гармоника с частотой 1 и амплитудой 1, а дисперсия ошибки прогноза (при времени прогноза, стремящемся к ∞) стремится к дисперсии самого процесса $(\sigma^*)^2 = \sigma^2 / S_{\max}$. Теперь можно сравнить такие СП между собой по асимптотике дисперсии ошибки прогноза. Оставаясь в рамках рассмотрения недетерминированных случайных процессов, можно условно ввести меру их регулярности (3). Чем меньше ε_i (т.е. чем уже спектр), тем менее регулярен процесс $x_i(t)$, тем ближе случайный процесс $x_i(t)$ к нерегулярному (сингулярному, детерминированному) процессу — гармонике. В пределе при $\varepsilon_i \rightarrow 0$ спектр бесконечно сужается, СП $x_i(t)$ утрачивает регулярность (дисперсия ошибки прогноза стремится к нулю), становится детерминированным и вырождается в гармонику с частотой ω_i , а при $\varepsilon_i \rightarrow \infty$ спектр бесконечно расширяется, т.е. элементарный СП $x_i(t)$ стремится к белому шуму.

Таким образом, ε является, с одной стороны, количественной безразмерной характеристикой ширины элементарного спектра (из рассматриваемого класса СП), а с другой — мерой регулярности элементарного процесса (и, как следствие, мерой эффективности линейного оптимального прогноза).

Более того, если спектр СП в общем случае полимодален и возможно произвести его декомпозицию (1), а, следовательно, и декомпозицию самого процесса (2), на элементарные составляющие, то каждой такой составляющей соответствует мера $\{\varepsilon_i\}$, $i = \overline{1, N}$. Тогда возможно для исходного СП вывести меру его регулярности как некоторую функцию от совокупности мер составляющих.

Теперь вернёмся к декомпозиции спектра на более строгом уровне. Пусть случайный процесс $x(t)$ имеет спектр $S(\omega)$, относительно которого с большой степенью общности можно предположить, что он — гладкая ограниченная строго положительная функция, стремящаяся к нулю при $\omega \rightarrow \infty$ так, что её интеграл — дисперсия процесса — конечное число ($D < \infty$). Тогда её сколь угодно точно можно аппроксимировать дробно-рациональной функцией вида

$$S(\omega) = P(\omega)/Q(\omega) \quad (4)$$

с конечными порядками полиномов $P(\omega)$ и $Q(\omega)$. В силу содержательных свойств спектральной плотности $S(\omega)$ на (4) накладываются ограничения [3]: порядок полинома числителя кратен 2; порядок полинома знаменателя кратен 4; порядок полинома числителя $2m$ в самом общем случае меньше порядка полинома знаменателя $4n$ на 2: $2m = 4n - 2$; знаменатель не имеет действительных корней; все коэффициенты полиномов действительны:

$$S(\omega) = P(\omega)/Q(\omega) = \frac{\sum_{i=0}^m p_{2i} \omega^{2i}}{\sum_{j=0}^n q_{4j} \omega^{4j}},$$

$$p_{2i}, q_{2j} \in R^1, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}, \quad 2m < 4n,$$

$$Q(\omega) \neq 0 \forall \omega \in R^1. \quad (5)$$

Корни полинома знаменателя — попарно сопряженные комплексные числа, и каждому корню соответствует корень противоположного знака, т.е. все корни симметричны относительно действительной и мнимой осей: $\omega_{k,k+1} = \alpha_k \pm i\beta_k$, $\omega_{k+2,k+3} = -\alpha_k \pm i\beta_k$, $k = \overline{1, n}$. Тогда функцию аппроксимации спектра (4) можно **единственным образом** разложить

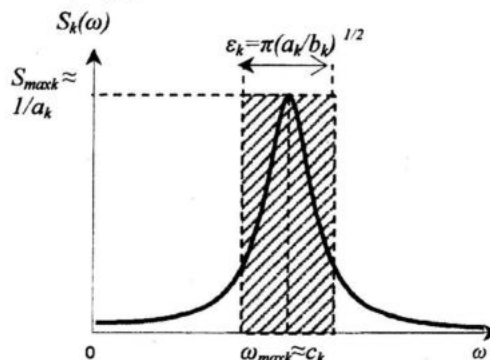
$$S(\omega) = \sum_{k=1}^n S_k(\omega) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\gamma_k}{\omega^2 + 2\alpha_k \omega + \beta_k^2} + \frac{\gamma_k}{\omega^2 - 2\alpha_k \omega + \beta_k^2} \right). \quad (6)$$

Представим [4] каждое k -ое слагаемое суммы (6) в виде функции вида

$$S_k(\omega) = f(a, b, c, \omega) = \frac{1}{a_k + b_k(c_k - \omega)^2} + \frac{1}{a_k + b_k(c_k + \omega)^2}. \quad (7)$$

Эта функция имеет минимальные порядки полиномов из всего класса функций (4), ограниченного условиями (5). Выберем эту функцию в качестве единичного элемента аппроксимации и условимся

называть её в дальнейшем **элементарным спектром**. Подчеркнем, что элементарный спектр (7) есть удобная форма представления слагаемых в **единственно возможном** разложении спектра (6); параметры (a_k, b_k, c_k) однозначно связаны с параметрами $(\alpha_k, \beta_k, \gamma_k)$. Удобство функции (7) заключается в том, что для встречающихся в практике спектров с небольшим (относительно максимального) значением на нулевой частоте такой элементарный спектр имеет максимум $S_{\max k} \approx 1/a_k$ на частоте $\omega_{\max k} \approx c_k$ (рис. 2), а параметр b_k "регулирует" ширину спектра (7).



Р и с. 2. Элементарный спектр

Интегрированием (7) получаем выражения для дисперсии и введенной выше ширины спектра (3)

$$D_k = \int_0^{\infty} \hat{S}_k(\omega) d\omega = \frac{\pi}{\sqrt{a_k b_k}};$$

$$\epsilon_k = \frac{\pi}{S_{\max k} \sqrt{a_k b_k}} \approx \pi \sqrt{\frac{a_k}{b_k}}. \quad (8)$$

Напомним, что такая ширина спектра также является мерой регулярности соответствующего СП $x_k(t)$ и характеризует эффективность линейного оптимального прогноза.

Функция (7) — элементарный спектр — назван выше единичным элементом аппроксимаций, т.к. встречающиеся в практике сложные, в общем случае полимодальные, спектры можно представить в виде конечной суммы функций вида (7) и результирующая функция при этом будет удовлетворять требованиям (5). Более того, любые совокупности сумм и произведений функций вида (7) удовлетворяют (5).

Разбиению (декомпозиции) спектра $S(\omega)$ на элементарные спектры (7)

$$S(\omega) = \sum_{k=1}^n S_k(\omega) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{a_k + b_k(c_k - \omega)^2} + \frac{1}{a_k + b_k(c_k + \omega)^2} \right) \quad (9)$$

соответствует разбиение (декомпозиция) СП на элементарные случайные процессы $x(t) = \sum_{k=1}^n x_k(t)$, где каждый элементарный процесс $x_k(t)$ имеет элементарный спектр $S_k(\omega)$ и обладает дисперсией D_k (8).

Общая методика аппроксимации некоторого полимодального спектра $S(\omega)$ элементарными спектрами – функциями вида (7) такова. Определяются значения спектра $\{S(\omega_i)\}$ в некотором (существенном для исследования) множестве точек $\Omega = \{\omega_i\}, i = \overline{1, N}$ (способ определения зависит от исходных данных: это либо набор измерений, по которому можно определить значения $S(\omega)$ в конечном числе точек, либо известные аналитические формулы, как, например, для морского волнения). Производится декомпозиция спектра на унимодальные функции (1). Каждый (унимодальный) спектр составляющей аппроксимируется элементарным спектром – функцией (7). Параметры аппроксимации a_k, b_k, c_k можно найти путем многопараметрической оптимизации, минимизируя соответствующий функционал. Однако возможно избежать решения этой практически плохо реализуемой задачи, если учесть малость спектра на близких к нулевым частотам. Тогда параметры a_k и c_k аппроксимации каждого k -го элементарного спектра находятся по элементарным соотношениям $a_k = 1/S_{k \max}, c_k = \omega : S_k(\omega) = S_{k \max}$, а параметр b_k – однопараметрической минимизацией соответствующего функционала. Более того, можно избавиться и от последней процедуры. Найдя параметры a_k, c_k и определив в процессе декомпозиции интеграл от спектра $S_k(\omega)$, т.е. дисперсию D_k , с учетом (8) получаем $b_k = \pi^2 / (a_k D_k^2)$.

Отметим, что выше предполагалась аппроксимация каждой унимодальной функции ("пика" спектра), выделенной при декомпозиции (1), одним элементарным спектром – функцией вида (7). В общем случае (например, при асиммет-

рии пика) его можно аппроксимировать суммой двух или таких функций, одна из которых определяет основной максимум, а другие корректируют поведение спектра. Вообще же суммой конечного числа элементарных спектров – функций вида (7) – можно сколь угодно точно аппроксимировать любой сложный гладкий (неразрывный) полимодальный спектр.

Предложенный метод (декомпозиции и аппроксимации спектров СП с помощью суммы элементарных спектров) и введенная мера регулярности СП (она же мера ширины спектра и мера эффективности линейного оптимального прогноза) оказались весьма полезными [4, 5] для более глубоких исследований СП, а именно:

- 1) построение альтернативной математической модели СП;
- 2) классификация СП;
- 3) моделирование СП;
- 4) анализ периодически нестационарных СП;
- 5) оптимальное прогнозирование.

Ввиду большого объема материала приведем лишь краткое описание этих направлений (более полно они будут раскрыты в последующих публикациях).

1. Построение альтернативной математической модели СП в виде множества взвешенных комплексносопряженных полюсов формирующего фильтра. С учетом декомпозиции спектра (1) и его аппроксимации суммой элементарных спектров (9) построена математическая модель СП в виде множества $G = \{\{\Omega_k, D_k\}, k = \overline{1, n}\}$, где $\Omega_k = \{\omega_{k1}, \omega_{k2}, \omega_{k3}, \omega_{k4}\}$ – четверка полюсов k -го элементарного спектра ($\omega_{k1} = -\omega_{k3} = c_k + i\sqrt{a_k/b_k}$; $\omega_{k2} = -\omega_{k4} = c_k - i\sqrt{a_k/b_k}$), D_k – дисперсия соответствующего элементарного процесса $x_k(t)$, a_k, b_k, c_k – параметры элементарного спектра. Пара $G_k = \{\Omega_k, D_k\}$ однозначно определяет спектр $S_k(\omega)$ процесса $x_k(t)$, т.е. его математическую модель, а совокупность таких пар $G = \{\{\Omega_k, D_k\}, k = \overline{1, n}\}$ однозначно определяет исходный спектр (4), (9), т.е. математическую модель случайного процесса $x(t)$. В зависимости от величины дисперсии D_k из всех полюсов спектра

Ω можно выделить существенные четверки полюсов Ω_c (с большими D_k), а из множества G – подмножество существенных пар $G_c = \{\{\Omega_j, D_j\}, j = \overline{1, N}\}$, таких, что

$$D_j \gg D_k, D_j \in G_j \in G_c, D_k \in G_k \in \{G - G_c\}.$$

Условимся называть эти четверки полюсов существенными полюсами спектра. Они существенны в том смысле, что, во-первых, дисперсия (энергия) соответствующих этим полюсам элементарных процессов велика по сравнению с остальными, и, во-вторых, соответствующие им элементарные спектры являются доминирующими (иначе можно представить, что при изображении полюсов на комплексной плоскости каждая четверка полюсов Ω_k имеет "вес" D_k и существенные полюса – наиболее "весомые").

Случайный процесс $x(t)$ с дробно-рациональным спектром (4), (9) можно рассматривать как результат прохождения белого шума $v(t)$ через систему (формирующий фильтр) с передаточной функцией $W(s) = H(s)/F(s)$. Полиномы $W(s)$ получают факторизацией полиномов $S(\omega)$. С учетом разложения (9) и вида полюсов спектра $S(\omega)$ полюса $W(s)$ есть совокупность выделенных из четверок полюсов Ω_k спектра пар полюсов, лежащих в верхней полуплоскости, и повернутых относительно начала координат на 90° против часовой стрелки. Обозначим все полюса $W(s)$ через Λ : тогда $\Lambda = \{\Lambda_k, k = \overline{1, N}\}$ состоит из комплексно-сопряженных пар полюсов $\Lambda_k = \{\lambda_{k1}, \lambda_{k2}\} = \{-\sqrt{a_k/b_k} + ic_k; -\sqrt{a_k/b_k} - ic_k\}$, лежащих в левой полуплоскости (каждая такая пара Λ_k соответствует своему элементарному спектру $S_k(\omega)$ и процессу $x_k(t)$ с дисперсией D_k). Если образовать пары $E_k = \{\Lambda_k, D_k\}$, то каждая такая пара E_k определяет модель элементарного процесса $x_k(t)$, а все множество таких пар $E = \{E_k, k = \overline{1, n}\}$ однозначно определяет модель исходного процесса $x(t)$ и его спектр.

Из всего множества Λ выделим множество существенных пар полюсов Λ_c , каждый элемент которого Λ_j соответствует своей существенной четверке полюсов $\Omega_j \in \Omega_c$ спектра $S(\omega)$ и каждому

$\Lambda_j \in \Lambda_c$ соответствует своя дисперсия D_j . Тогда пары $E_j = \{\Lambda_j, D_j\}$, образуют множество существенных пар $E_c = \{\{\Lambda_j, D_j\}, j = \overline{1, N}\}$, $\Lambda_j \in \Lambda_c$, такое, что $D_j \gg D_k, D_j \in E_j \in E_c, D_k \in E_k \in \{E \setminus E_c\}$.

Выделение существенных полюсов спектра и формирующего фильтра полезно для анализа и классификации СП.

2. Классификация случайных процессов. Проведена классификация СП, основанная на взаимосвязи особенностей в структурах процессов и их спектров, их составляющих, с расположением полюсов формирующего фильтра.

Характерные особенности в структурах спектров и СП с точки зрения их прогнозирования позволили выделить в СП четыре класса, отличающиеся взаимным расположением экстремумов и ширины элементарных спектров, получающихся в результате декомпозиции (7), или, иначе, расположением существенных полюсов формирующего фильтра. Первый класс имеет узкие унимодальные спектры, а СП характеризуются постоянством периода колебаний, медленно меняющимися амплитудами и отсутствием вторичных экстремумов. Второй класс обладает широкими спектрами (число максимумов произвольно), а СП носят ярко выраженный случайный характер: они имеют непостоянный период колебаний, вторичные экстремумы и скачки изменений амплитуды. Моделированием СП первых двух классов выявлены спонтанно появляющиеся пакеты (или группы пакетов) колебаний. Эти два класса названы процессами с несистематической пакетной структурой. В отличие от них, третий класс СП объединяет процессы с систематической пакетной структурой, в них пакеты колебаний повторяются со вполне определенной периодичностью. Спектры таких процессов имеют два доминирующих пика ("сгустка энергии"), хорошо разнесенных между собой, но на близких частотах. Сформулированы условия относительно расположения существенных полюсов формирующего фильтра на комплексной плоскости, при которых СП относится к 3 классу. Чет-

вертый класс включает в себя процессы, являющиеся результатом наложения конечного числа сингулярных – почти гармонических – процессов, таких, как процессы 1 класса, но, в отличие от 3 класса, доминирующих гармоник не обязательно две и они не близки по частотам, т.е. в процессе невозможно выделить структуры, напоминающие пакеты. Процессы этого класса не напоминают гармонические колебания, не имеют пакетную структуру и, вместе с тем, не являются процессами с ярко выраженными случайными свойствами, хотя внешне напоминают их, т.к. могут иметь вторичные экстремумы, скачки амплитуды и непостоянные интервалы времени между пересечениями уровня нуля.

Такой подход использован, в частности, для анализа процессов простого и смешанного волнения и вызванной им качки корабля. Выявлены закономерности в формировании структуры спектров и процессов качки в зависимости от структур спектра волнения и квадрата АЧХ корабля. Подтверждена достоверность классификации СП с помощью математического моделирования на ЭВМ.

3. Моделирование СП. Аппроксимация спектра случайного процесса суммой элементарных спектров весьма удобна для моделирования этих процессов на ЭВМ. Стационарный случайный процесс $\psi(t)$ с рациональной спектральной плотностью $S(\omega)$ можно [3] рассматривать как результат прохождения белого шума с единичной спектральной плотностью через устойчивую стационарную линейную систему с передаточной функцией $W(s) = H(s)/F(s)$. Полиномы формирующего фильтра $W(s)$ получают факторизацией полиномов $S(\omega)$. Такая система описывается линейным стохастическим дифференциальным уравнением

$$\sum_{k=0}^n f_k \psi^{(k)} = \sum_{k=0}^m h_k V^{(k)},$$

где $V(t)$ – входной сигнал формирующего фильтра – белый шум с единичной спектральной плотностью и интенсивностью 2π . Параметры формирующего фильтра выражаются через параметры аппроксимирующих элементарных спектров a_i, b_i, c_i . Подавая на вход формирующего фильтра белый шум, получаем реализации инте-

ресующего нас случайного процесса.

На практике такой подход, например, использовался для исследования качки корабля при различных параметрах движения и условиях волнения, (ветрового зыби, смешанного). С использованием теорема А.Я. Хинчина спектральная плотность качки определялась произведением квадрата модуля АЧХ корабля на спектральную плотность волнения. С учетом скорости движения корабля V и курсового угла φ анализ осуществлен в области кажущихся частот $\omega_k = \omega - \omega^2(V \cos(\varphi))/g$, что позволяет сохранить реальные частотно-временные соотношения процессов качки. Аппроксимировав с помощью элементарных спектров квадрат АЧХ корабля, спектр волнения, и, окончательно, спектр качки корабля, можно, во-первых, задаваясь различными условиями простого и смешанного волнения и параметрами движения корабля, строить и анализировать спектры качки корабля на выбранном волнении, и, во-вторых, для каждого полученного спектра качки строить формирующий фильтр и моделировать на ЭВМ динамику корабля.

4. Анализ периодически нестационарных СП. Выделен подкласс и проведен анализ периодически нестационарных СП, в т.ч. СП с пакетной структурой. Сформулированы условия, основанные на расположении существенных полюсов формирующего фильтра, при выполнении которых процесс обладает периодической нестационарностью. Проведен асимптотический анализ бимодальных спектров и установлена общность случайных процессов с пакетными свойствами и детерминированных процессов биений, получены оценки средних частотно-временных характеристик таких СП.

5. Построение оптимального (наилучшего в среднеквадратическом) прогноза и его дискретного аналога – АРСС-прогноза. Классический метод построения наилучшего в среднеквадратическом линейного оптимального прогноза основан на представлении модели случайного процесса в виде стохастического дифференциального уравнения $\chi(t) = A\chi(t) + Bv(t)$, матрицы которого

определяются по коэффициентам формирующего фильтра $W(s)$. Наилучший в среднеквадратическом прогнозе – матричный экспоненциал e^{At} – с учётом разложения Сильвестра представляется в виде суммы экспоненциально затухающих гармоник.

Показано [5], что если проведена аппроксимация спектра суммой элементарных спектров (9), то в оптимальном прогнозе каждое слагаемое-гармоника соответствует своему элементарному спектру $S_k(\omega)$ (7), при этом частота k -й гармоники $x_k(t)$ в прогнозе точно равна параметру c_k , а показатель её затухания $\sqrt{a_k/b_k}$ с точностью до множителя π совпадают с шириной спектра ε_k , она же мера регулярности процесса, (a_k, b_k, c_k – параметры элементарных спектров). Тем самым мы избавляемся от плохо численно реализуемой задачи нахождения собственных чисел матрицы A (точнее, мы косвенно решаем эту задачу при аппроксимации спектра суммой элементарных).

С использованием наиболее общего представления модели СП в дискретной области – модели авторегрессии – скользящего среднего (АРСС) – разработана методика АРСС-прогноза, дискретного аналога оптимального прогноза. С помощью теории дискретных систем получен [5] метод идентификации АРСС-модели по параметрам аппроксимации спектра (9). Такой дискретный оптимальный прогноз прост в реализации и не требует оценивания вектора состояния, включающего, кроме значения процесса, его $(n-1)$ производную.

С учетом полученных результатов разработана идеология системы прогноза, адаптивной к классу (т.е. к структурным особенностям) процесса, к скачкообразным изменениям характеристик процесса, вызванным внешними воздействиями или изменениями в режиме функционирования системы, и к плавным изменениям характеристик, обусловленным "слабой" стационарностью СП. Для СП третьего класса (с пакетной структурой) классический оптимальный прогноз дополнен долгосрочным прогнозом огибающей.

Кроме перечисленных направлений, разработанные методы полезны

[6, 7] для построения систем безопасности плавания морских судов, разработки экспертных систем анализа процессов взаимодействия ветра и волнения, контроля и прогноза параметров морского волнения, оценки параметров морского волнения по измерениям качки судна, выбора оптимального курса и скорости судна.

Отметим, что разработанные методы применимы для анализа не только процессов волнения и качки корабля, но и других случайных процессов в природе и социуме.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гихман И.И., Скороход А.В. Теория случайных процессов. Том I. – М.: Наука, 1971. – 664 с.
2. Дуб Дж. Л. Вероятностные процессы. – М.: Издательство иностранной литературы, 1956. – 606 с.
3. Пугачев В.С., Сеницын И.Н. Стохастические дифференциальные системы. – М.: Наука, 1985. – 560 с.
4. Согомонян С.В. Об одном спектральном методе анализа качки корабля // Сб. тез. докл. 19 всесоюз. конф. Совета по управлению движением судов и кораблей. – М.: ИПУ, 1992. – С. 57 – 59.
5. Согомонян С.В. Разработка методов экстраполяции качки и управления корабельными летательными аппаратами: дис. ... канд. техн. наук: 20.02.14: защищена 06.05.93 : утв. 12.08.93 / Согомонян Сергей Вартанович. – Севастополь, 1993. – 245 с.
6. Нечаев Ю.И., Согомонян С.В. Экспертная система контроля и прогноза параметров морского волнения // Океанологические информационные системы, базы и банки данных и знаний: Сб. науч. тр. – Севастополь, МГИ АН Украины, 1993. – С. 93 – 95.
7. Нечаев Ю.И., Согомонян С.В. Анализ измерительной информации при контроле и прогнозировании динамики аварийного судна в штормовых условиях // Сб. тр. междунар. науч.-техн. семинара "Морское и экологическое приборостроение". – Севастополь, МГИ АН Украины, 1994. – С. 71.