ВОЛНЫ КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ В ДВУХСЛОЙНОЙ ЖИДКОСТИ

Анд.А. Букатов

Морской гидрофизический институт
НАН Украины
г. Севастополь, ул. Капитанская, 2
E-mail: *ocean@mhi2.sebastopol.ua*

На основе двухслойной плотностной модели жидкости с учетом нелинейности и дисперсии рассмотрено набегание длинных внутренних гравитационных волн на вертикальную стенку как в условиях свободной поверхности, так и в приближении твердой крышки. Получены аналитические выражения для определения характеристик формируемых стоячих колебаний с точностью до величин второго порядка малости.

Введение. В линейной постановке свободные и внутренние длинные волны в двухслойной жидкости рассмотрены в работах [1-3]. Исследованию распространения длинных волн конечной амплитуды в жидкости со скачком плотности посвящены работы [4-5]. В данной работе на двухслойной плотностной модели с учетом нелинейности и дисперсии рассмотрено набегание внутренних волн на вертикальную стенку. Дана количественная оценка изменения гидродинамического давления вблизи границы скачка плотности у вертикальной стенки, обусловленного конвективным ускорением.

Постановка задачи. Рассмотрим движение двухслойной идеальной несжимаемой жидкости конечной глубины. Верхний слой имеет толщину H_1(x, y) и плотность ρ_1, а нижний – толщину H_2(x, y) и плотностьρ_2. Выберем систему координат (X, Y, Z) таким образом, чтобы плоскость (X, Y) совпадала с невозмущенной поверхностью раздела слоев, ось Z направлена вертикально вверх. Будем считать движение жидкости потенциальным, обозначив через $\varphi = \varphi(x, y, z, t)$ и $\phi = \phi(x, y, z, t)$, потенциалы скорости в верхнем и нижнем слоях соответственно, а через $\zeta(x, y, t)$и $\eta(x, y, t)$ возвышения свободной поверхности и поверхности скачка плотности. Тогда задача сводится к решению уравнений Лапласа для φ и ϕ с соответствующими краевыми условиями

$$\begin{gathered}
\Delta\varphi = 0, \quad 0 \le z \le H_1, \\
\zeta_t + \nabla\zeta\nabla\varphi = \varphi_z,\ \varphi_t + \zeta + 1/2\,|\nabla\varphi|^2 + 1/2\varphi_z^2 = 0, \\
z = \zeta(x, y, t) + H_1(x, y) \\
\Delta\phi = 0,\ -H_2 \le z \le 0, \qquad (1) \\
p_1 = p_2,\quad \eta_t + \nabla\eta\nabla\varphi = \varphi_z,\quad \eta_t + \nabla\eta\nabla\phi = \phi_z, \\
z = \eta(x, y, t) \\
\nabla H_2\nabla\phi + \phi_z = 0,\quad z = -H_2(x, y),
\end{gathered}$$

где p_1 и p_2 - гидродинамическое давление в верхнем и нижнем слоях. В случае твердой крышки динамическое и кинематическое условия на свободной поверхности жидкости следует заменить на условие непротекания

$$\nabla H_1 \nabla\varphi + \varphi_z = 0,\quad z = H_1(x, y).$$

На вертикальной стенке в сечении $X = 0$ потребуем полного отражения.

Аналитическое решение. Аналогично работам (5), (6) приводим исходную систему к безразмерному виду. Для этого вводим безразмерные координаты, время и искомые функции.

$$\begin{gathered}
X_1 = L_* X,\ Y_1 = L_* Y,\ Z_1 = ZH_*, \\
tL_* = t_1 (gH_*)^{\frac{1}{2}},\ H_1^1 = H_* H_1,\ H_2^1 = H_* H_2, \\
\phi_1 = L_* (gH_*)^{\frac{1}{2}} \phi,\ \varphi_1 = L_* (gH_*)^{\frac{1}{2}} \varphi,\ \zeta_1 = H_* \zeta, \\
\eta_1 = H_* \eta,\ F_1^1 = gH_* F_1,\ F_2^1 = gH_* F_2, \\
p_1 = \frac{p_1^1}{\rho_1 g H_*},\ p_2 = \frac{p_2^1}{\rho_2 g H_*},
\end{gathered}$$

здесь $H_* = \frac{1}{2}\left(H_1^1 + H_2^1\right)$- средняя глубина, L_* - характерный горизонтальный размер. Затем строим аналитическое решение для $\varphi, \phi, \zeta, \eta$ в виде степенных рядов по параметрам нелинейности и дисперсии. Выражения для φ и ϕ получаем методом, описанным в работе (6) путем представления их в виде

$$\varphi(x, y, z, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k (x, y, t, \mu)(z - H_1)^k,$$

$$\phi(x, y, z, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k (x, y, t, \mu)(z + H_1)^k,\ \ \mu = \frac{H_*}{L_*}.$$

Тогда для потенциала φ найдем:

$\varphi = \alpha + \mu\{(\zeta_t + \nabla\zeta\nabla\alpha)(z - H_1) -$

$$
-0.5\Delta\alpha(z-H_1)^2\Big\}+\mu^2\Big\{-(\zeta_t+\nabla\zeta\nabla\alpha)\cdot
$$
$$
\cdot\nabla\zeta\nabla H_1(z-H_1)+\big(\Delta\alpha(\nabla H_1)^2+
$$
$$
+2\nabla H_1(\nabla\zeta_t+\nabla(\nabla\zeta\nabla\alpha))+\Delta H_1(\zeta_t+\nabla\zeta\nabla\alpha)\big)\cdot
$$
$$
\frac{1}{2}(z-H_1)^2-(\Delta\zeta_t+\Delta(\nabla\zeta\nabla\alpha)+2\nabla H_1\nabla\Delta\alpha+\Delta\alpha\Delta H_1)\cdot
$$
$$
\cdot\frac{1}{6}(z-H_1)^3+\frac{1}{24}\Delta^2\alpha\,(z-H_1)^4\Big\}
$$

в случае свободной поверхности и

$$
\varphi=\alpha-\mu\left[\nabla H_1\nabla\alpha(z-H_1)+\frac{1}{2}\Delta\alpha(z-H_1)^2\right]-
$$
$$
-\mu^2\Big\{(\nabla H_1\nabla\alpha)(\nabla H_1)^2(z-H_1)+
$$
$$
+\big[2\nabla H_1\nabla(\nabla H_1\nabla\alpha)+(\nabla H_1\nabla\alpha)\Delta H_1-
$$
$$
-\Delta\alpha(\nabla H_1)^2\big]\frac{1}{2}(z-H_1)^2+\big[-\Delta(\nabla H_1\nabla\alpha)+
$$
$$
+2\nabla H_1\nabla\Delta\alpha+\Delta\alpha\Delta H_1\big]\frac{1}{6}(z-H_1)^3+
$$
$$
\frac{1}{24}\Delta^2\alpha(z-H_1)^4\Big\}
$$

в приближении непроницаемой крышки. Для потенциала скорости ϕ в нижнем слое получим выражение

$$
\varphi=\beta-\mu\left[(\nabla H_2\nabla\beta)(z+H_2)+\frac{1}{2}\Delta\beta(z+H_2)^2\right]+
$$
$$
+\mu^2\Big\{(\nabla H_2\nabla\beta)|\nabla H_2|^2(z+H_2)+\big[|\nabla H_2|^2\nabla\beta+
$$
$$
+2\nabla H_2\nabla(\nabla H_2\nabla\beta)+(\nabla H_2\nabla\beta)\Delta H_2\big]\frac{1}{2}(z+H_2)^2+
$$
$$
+\big[\Delta(\nabla H_2\nabla\beta)+2\nabla H_2\nabla(\Delta\beta)+\Delta\beta\Delta H_2\big]\cdot
$$
$$
\cdot\frac{1}{6}(z+H_2)^3+\frac{1}{24}\Delta^2\beta(z+H_2)^4,
$$

справедливое как в случае свободной поверхности, так и при наличии твердой крышки.

В случае плоских волн в жидкости постоянной глубины из уравнений системы (1), приведенной к безразмерному виду, с учетом полученных выражений для потенциалов φ и ϕ найдем

$$
cv_\tau-\gamma u_\tau+\eta_x(1-\gamma)+vv_x-\gamma uu_x-
$$
$$
-\frac{\mu}{2}\Big\{(cv_{xx\tau}+vv_{xxx}-v_xv_{xx})(z+H_2)^2-
$$
$$
-\gamma(cu_{xx\tau}+uu_{xxx}-u_xu_{xx})(z-H_1)^2\Big\},\ z=\eta,
$$

$$
u_x(z-H_1)+c\eta_\tau+\eta_xu=\mu\Big\{\frac{1}{2}u_{xx}(z-H_1)^2\eta_x+
$$
$$
+\frac{1}{6}u_{xxx}(z-H_1)^2\Big\},\ z=\eta, \qquad (2)
$$
$$
c\eta_\tau+\eta_xv+v_x(z+H_2)=\mu\Big\{v_{xx}\eta_x\frac{1}{2}(z+H_2)^2+
$$
$$
+v_{xxx}\frac{1}{6}(z+H_2)^3\Big\},\ z=\eta.
$$

в приближении твердой крышки.

Здесь $\tau=ct$, c – некоторая постоянная, $u=\alpha_x$, $v=\beta_x$, $\gamma=\dfrac{\rho_1}{\rho_2}$.

Аналогичные соотношения можно получить из (1) и для случая свободной поверхности.

Представим теперь искомые функции в виде рядов по малому параметру ε

$$
u=\sum_{i=1}^{\infty}u_i\varepsilon^i,\ v=\sum_{i=1}^{\infty}v_i\varepsilon^i,\ \eta=\sum_{i=1}^{\infty}\eta_i\varepsilon^i,
$$
$$
\zeta=\sum_{i=1}^{\infty}\zeta_i\varepsilon^i,\ c=c_0+\sum_{i=1}^{\infty}c_i\varepsilon_i
$$

и подставим их в систему (2). Собирая затем коэффициенты при одинаковых степенях ε, найдем для первого приближения

$$
c_0v_{1\tau}-c_0\gamma u_{1\tau}+\eta_{1x}(1-\gamma)=\frac{\mu}{2}\Big\{c_0v_{1xx\tau}H_2^2-
$$
$$
-\gamma c_0u_{1xx\tau}H_1^2\Big\},
$$
$$
-u_{1x}H_1+c_0\eta_{1\tau}=-\frac{\mu}{6}u_{1xxx}H_1^3,
$$
$$
c_0\eta_{1\tau}+v_{1x}H_2=\frac{\mu}{6}v_{1xxx}H_2^3
$$

при наличии твердой крышки и

$$
c_0u_{1\tau}+\zeta_{1x}=0,\ z=\zeta+H_1,
$$
$$
c_0v_{1\tau}-c_0\gamma u_{1\tau}+\eta_{1x}(1-\gamma)=
$$
$$
=\frac{\mu}{2}\Big\{c_0H_2^2v_{1xx\tau}-2H_1\gamma c_0^2\zeta_{1x\tau\tau}-\gamma c_0H_1^2u_{1xx\tau}\Big\},
$$
$$
c_0\eta_{1\tau}+v_{1x}H_2=\frac{\mu H_2^3}{6}v_{1xxx},
$$
$$
c_0\eta_{1\tau}-u_{1x}H_1-c_0\zeta_{1x}=
$$
$$
=-\mu\left\{\frac{H_1^2}{2}c_0\zeta_{1xx\tau}+\frac{H_1^3}{6}u_{1xxx}\right\}
$$

в случае жидкости с открытой поверхностью. Аналогичную систему получаем и для второго приближения.

Так как при набегании периодической волны на вертикальную стенку образуется стоячая волна, то запишем:

$$u_1 = a_1 \cos\tau \sin x,\ v_1 = b_1 \cos\tau \sin x.$$

Подставляя эти выражения в (3), найдем

$$\eta_1 = a_1 H_1 c_0^{-1}\left(1 + \frac{1}{6}\mu H_1^2\right)\sin\tau\cos x,$$

$$b_1 = -a_1 H_1 H^{-2}\left(1 + \frac{1}{6}\mu\left(H_1^2 - H_2^2\right)\right),$$

где

$$c_0^2 = (1-\gamma)\, H_1 H_2 / (H_1 + \gamma H_2).$$

Аналогичным образом определяются волновые характеристики первого приближения и в случае свободной поверхности жидкости. Полагая $u_2 = a_2 \sin 2\tau \sin 2x$, $v_2 = b_2 \cos 2\tau \sin 2x$ и учитывая полученные выражения для волновых характеристик первого приближения, из соответствующей системы определим волновые характеристики второго приближения

$$u_2 = -\frac{a_1^2}{8H_2^2 H_1 (H_2 + \gamma H_1)\mu c_0}\{3\gamma H_2^3 - 3H_1^2 - \\ - \mu H_1\left(H_1^3 + 2H_1H_2^2 + 2H_2^3 - \gamma H_1 H_2^2\right)\}\cdot \\ \cdot \sin 2\tau \sin 2x,$$

$$\eta_2 = \frac{a_1^2 H_1}{8H_2^2 H_1 (H_2 + \gamma H_1)\mu c_0^2}\{3\gamma H_2^2 - 3H_1^2 - \\ - \mu H_1\left(-5H_1^2 + H_2^2(2 - 9\gamma)\right)\}\cos 2\tau \cos 2x,$$

$$v_2 = \frac{a_1^2}{8H_2^3 (H_2 + \gamma H_1)\mu c_0}\{3\gamma H_2^2 - 3H_1^2 - \\ - \mu\left(H_1\left(H_1^3 + 2H_1H_2^2 + 2H_2^3 - \gamma H_1 H_2^2 - \\ - 2HH_2(H_2 + \gamma H_1)\right) - 6\left(H_1^2 - H_2^2\right)\cdot \\ \cdot\left(\gamma H_2^2 - H_1^2\right)\right)\} \sin 2\tau \sin 2x.$$

В результате получаем аналитические представления характеристик стоячих колебаний с точностью до величины второго порядка малости. Изменение гидродинамического давления, обусловленное конвективным ускорением, в соответствии с интегралом Лагранжа- Коши определяется выражениями $\frac{1}{2}L_*^2\left(\varphi_x^2 / L_*^2 + \varphi_z^2 / H_*^2\right)$, $\frac{1}{2}L_*^2\left(\phi_x^2 / L_x^2 + \phi_z^2 / H_*^2\right)$ соответственно для верхнего и нижнего слоев. Для количественной оценки величины этого вклада проведены численные расчеты по формулам в приближении твердой крышки при значениях $H_1 = 50$м, $H_2 = 100$м, $\gamma = 0{,}999$. Амплитуда и период набегающей внутренней волны принимались равными 5м и 1200сек. В результате показано, что величина обусловленного конвективным ускорением изменения давления в нижнем слое на расстоянии 5м от невозмущенной поверхности скачка плотности составила 0,3 Н/м^2.

Заключение. Таким образом, с учетом нелинейности и дисперсии рассмотрено набегание длинных периодических внутренних волн в двухслойной жидкости постоянной глубины на вертикальную стенку. Получены аналитические выражения, определяющие характеристики формируемых стоячих колебаний с точностью до величин второго порядка малости и оценено вносимое конвективным ускорением изменение гидродинамического давления у стенки вблизи границы скачка плотности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю.З. Алешков Полная модель процесса распространения длинных волн и их взаимодействия с вертикальной стенкой // Изв. АН СССР. Мех. жидкости и газа, 1985. – №3. – С. 173 – 176.

2. Анд.А. Букатов Моделирование волновых процессов в двухслойной жидкости со свободной поверхностью // Системы контроля окружающей среды: Сб. науч. тр. НАНУ МГИ. – Севастополь 2005. – С. 205 – 207.

3. А.Е. Букатов, Л.В. Черкесов Волны в неоднородном море. – Киев: Наук. думка – 1983. – 224 с.

4. Л.В. Овсянников Модели двухслойной «мелкой воды // Прикладная механика и техническая физика, 1979. – №2. – С. 3 – 14.

5. Т.Я. Секерж–Зенькович Некоторые задачи теории распространения приливных волн в неоднородной жидкости // Тр. МГИ АН СССР, 1956. – №8. – С. 3 – 32.

6. С.С. Войт Волны на свободной поверхности и поверхности раздела, возникающие от периодической перемещающейся системы давлений // Тр. МГИ АН СССР, 1959. – 17. – С. 27 – 35.