АДАПТИВНАЯ МОДЕЛЬ ЭКОСИСТЕМЫ С УЧЕТОМ ДИФФУЗИИ В ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДЕ

И.Е. Тимченко, Е.М. Игумнова, А.В. Набойкина*, И.И. Тимченко**

Морской гидрофизический институт НАН Украины,
г. Севастополь, ул. Капитанская, 2
* Харьковский национальный экономический университет, г. Харьков
** Харьковский национальный политехнический университет – ХПИ, г. Харьков

Рассмотрены способы учета диффузии в окружающей среде в одномерной адаптивной модели морской экосистемы. Показано, что включение оператора диффузии в структуру логистической функции в правых частях уравнений модели повышает чувствительность модели к внешним влияниям, не нарушая устойчивости решений.

Введение. В адаптивных моделях морских экосистем действует принцип динамического баланса процессов, который обусловлен стремлением экосистемы к состоянию равновесия. Баланс осуществляется путем непрерывной подстройки процессов друг к другу, а так же к тем изменениям, которые происходят в окружающей среде [1 – 4].

Рост концентрации любого компонента экосистемы всегда ограничен имеющимися ресурсами развития реакции. Поэтому для моделирования эффекта насыщения концентрации в уравнениях моделей экосистем обычно используется наиболее простая логистическая функция [5]. Что касается внутрисистемных и внешних влияний на концентрацию, то обычно они присутствуют в правых частях уравнений экосистемы отдельно от логистической функции в виде функций источников и стоков, которые не охвачены отрицательной обратной связью, регулирующей скорость реакции.

Иной подход применяется в методе адаптивного баланса влияний (*ABC*-методе [1]). Сама логистическая функция появляется в уравнениях *ABC*-метода как частный случай общей базовой функции влияния, реализующей системный принцип адаптивного баланса влияний. Внутрисистемные взаимодействия в уравнениях *ABC*-моделей включаются в аргументы базовых функций влияния. Что касается адвекции и диффузии, то они могут быть включены в структуру базовой функции наряду с другими внутрисистемными влияниями или представлены отдельными слагаемыми в правых частях уравнений. В данной статье сравниваются между собой оба возможных варианта построения адаптивных моделей на примере одномерной *ABC*-модели морской экосистемы.

Учет влияющих факторов при моделировании процессов адаптации в экосистемах. Рассмотрим множество взаимосвязанных параметров морской среды, представляющих в некотором объеме концентрации тех химических веществ и биологических объектов, для изучения которых необходимо разработать соответствующую модель экосистемы. Каждый процесс u_i в морской среде имеет свой конечный интервал изменчивости $(0, u_{i\,max})$, верхняя граница которого обусловлена условиями окружающей среды. Если эти условия не заданы в явном виде, то принято считать, что всегда существует некоторая ресурсная емкость среды C_i (*Current capacity* [5]), ограничивающая общие ресурсные возможности развития процесса u_i.

Удобно отнести C_i к серединам интервалов изменчивости процессов. Тогда явно заданные внутрисистемные и внешние влияния, направленные на процесс u_i, проявляются в том, что они отклоняют значения процесса от C_i в пределах интервалов $(0, u_{i\,max})$. Если влияния постоянны во времени, экосистема находится в стационарном состоянии равновесия, когда значения концентраций отклонены на определенные величины от центров C_i. Так как $u_{i\,max} = 2\,C_i$, максимально возможные отклонения составляют $\pm\,C_i$.

В моделях математической биологии [5], популяционной динамики [6], химической кинетики диссипативных систем [7] ресурсная емкость среды C_i традици-

онно учитывается с помощью уравнения динамики Верхалста с логистической функцией в правой части

$$\frac{du_i}{dt} = r_i u_i (1 - \frac{u_i}{C_i}) \qquad (1)$$

Стационарными решениями уравнения (1) служат значения $u_{i1}^* = 0$ и $u_{i2}^* = C_i$, при которых правая часть обращается в нуль. Устойчивым решением этого уравнения может быть значение $u_{i2}^* = C_i$, в окрестности которого отрицательная обратная связь, обусловленная структурой логистической функции, стремится вернуть решение в середину его интервала изменчивости.

При объединении в систему нескольких уравнений типа (1) в их правых частях появляются внутрисистемные влияния на процесс u_i со стороны других процессов u_j и внешние влияния. Поэтому имеет значение способ учета этих влияний. Обозначим функции, представляющие все возможные влияния, $A_i(u_j)$. Обычно эти функции аддитивно добавляются к логистическим функциям в правой части уравнения (1) [5 – 7]

$$\frac{du_i}{dt} = r_i u_i (1 - \frac{u_i}{C_i}) + A_i(u_j) \qquad (2)$$

Другой вариант учета в явном виде как внутрисистемных, так и внешних влияний получается, если включить все влияния в структуру логистической функции. Подобный способ реализован в методе адаптивного баланса влияний (*ABC*-методе [1]).

$$\frac{du_i}{dt} = r_i u_i \{1 - \frac{1}{C_i}[u_i - A_i(u_j)]\} \qquad (3)$$

Из уравнения *ABC*-метода (3) непосредственно следует, что устойчивое стационарное решение этого уравнения имеет вид:

$$u_{i2}^* = C_i + A_i(u_j) \qquad (4)$$

Так как процессы в экосистеме не должны принимать отрицательные значения, необходимо выполнение условий

$$-C_i \le A_i(u_j) \le C_i, \quad 0 \le u_{i2}^* \le 2C_i \qquad (5)$$

При этих условиях включение всех влияний в аргумент базовой функции $F^{(+)}(a_i u_i)$ приводит к симметричным отклонениям значений процессов от состояния невозмущенного равновесия $u_{i2}^* = C_i$, совпадающего с серединами интервалов их изменчивости. Знаки отклонений определяются функциями влияния $A_i(u_j)$.

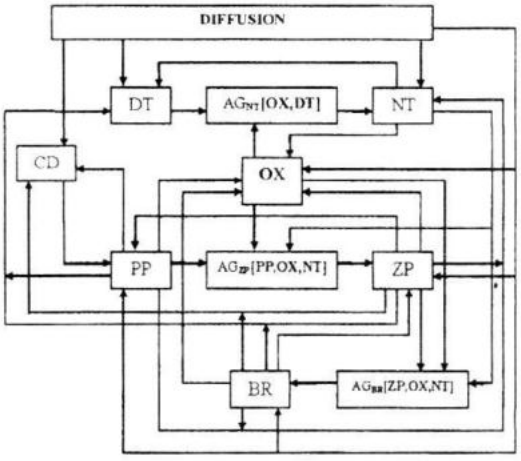
Проведенный анализ показывает, что распространение отрицательной обратной связи на все влияния – внутрисистемные и внешние в уравнении (3) усиливает управляющую роль базовой функции, так как она непосредственно влияет на текущую (эффективную) величину ресурсной емкости развития процесса. Диапазон влияний, не нарушающих условия устойчивости решений, в этом случае оказывается симметричным относительно первоначальной ресурсной емкости C_i. Этим подтверждается целесообразность включения $A_i(u_j)$ в аргументы базовых функций, как это имеет место в *ABC*-методе моделирования морских экосистем [1].

Процессы реакции-диффузии в одномерной адаптивной модели морской экосистемы. Рассмотрим множество взаимосвязанных концентраций параметров экосистемы, распределенных вдоль некоторого горизонтального отрезка прямой в морской среде. В каждой точке отрезка происходят процессы взаимодействия химических и биологических объектов между собой, относящиеся к категории «реакций», на которые влияют динамические процессы диффузии, развивающиеся в морской среде вдоль направления отрезка. В целях упрощения мы не рассматриваем влияние адвекции.

Одномерная адаптивная модель морской экосистемы может быть основана на использовании системы взаимосвязанных уравнений метода адаптивного баланса влияний. Речь идет о двух вариантах построения адаптивной модели: с операторами диффузии, стоящими отдельно от базовых функций влияния в уравнениях экосистемы, или включен-

ными в аргументы этих функций. Адаптивную модель экосистемы, у которой операторы диффузии не включены в базовые функции влияний, будем обозначать символом $ABC+D$, а в случае включения – $ABCD$.

Биологические объекты экосистемы будем характеризовать тремя интегральными концентрациями: фитопланктона PP, зоопланктона ZP и биоресурса BR, понимая под биоресурсом концентрацию всех гидробионтов, расположенных на более высоких, чем зоопланктон, уровнях пищевой цепи. Дополнительное усложнение задачи моделирования морской экосистемы связано с ресурсными ограничениями процессов реакции, которые в отличие от общих ресурсных емкостей морской среды C_i должны быть заданы в явном виде. Так, например, ресурсами развития зоопланктона ZP служат: фитопланктон PP, кислород OX и биогенные элементы NT (рис. 1).



Р и с. 1. Концептуальная модель внутрисистемных связей в морской экосистеме с учетом внешнего влияния диффузии

В каждый момент времени рост концентрации зоопланктона будет зависеть только от одного из этих видов ресурсов, концентрация которого имеет минимальное значение. Динамика среды и, в частности, диффузия непрерывно влияют на соотношение ресурсов развития реакций. Поэтому в модели экосистемы должны быть предусмотрены агенты управления, следящие за лимитирующими значениями ресурсов. Так как целью исследований является анализ влияния диффузии на процессы реакции в одномерной модели, мы не будем рассматривать другие внешние влияния. Поэтому примем, что концентрация фитопланктона зависит только от концентрации углекислого газа CD. Для замыкания окислительно-восстановительного цикла введем в структуру модели концентрацию детрита DT.

Система уравнений адаптивной модели экосистемы $ABC+D$ с операторами диффузии, стоящими отдельно от базовых логистических функций, может быть представлена следующим образом:

$$\frac{\partial u_i(x)}{\partial t} = r_i u_i(x)\{1 - \frac{1}{C_i}[u_i(x) - A_{u_i}(u_j)]\} + D_i \frac{\partial^2 u_i(x)}{\partial x^2}. \quad (6)$$

Система уравнений адаптивной модели экосистемы $ABCD$ с операторами диффузии, включенными в аргументы базовых функций, имеет следующий общий вид:

$$\frac{\partial u_i(x)}{\partial t} = r_i u_i(x)\{1 - \frac{1}{C_i}[u_i(x) - A_{u_i}(u_j) - D_i \frac{\partial^2 u_i(x)}{\partial x^2}]\}. \quad (7)$$

С учетом концептуальной модели экосистемы, изображенной на рис. 1, в уравнениях (6) и (7) используем следующие обозначения и формулы:

$$u_i(x) = [PP(x); ZP(x); BR(x); OX(x); NT(x); DT(x); CD(x)],$$

$$A_{PP} = a_{PP/ZP} ZP - a_{PP/CD} CD,$$

$$A_{ZP} = a_{ZP/BR} BR - AG_{ZP}[PP, OX, NT],$$

$$AG_{ZP}[PP, OX, NT] = IF[M_{ZP}(t) = PP(t); -a_{ZP/PP} PP(t); 0] + IF[M_{ZP}(t) = NT(t); -a_{ZP/NT} NT(t); 0] + IF[M_{ZP}(t) = OX(t); -a_{ZP/OX} OX(t); 0],$$

$$M_{ZP} = \arg\min\{PP(t); OX(t); NT(t)\},$$

$$A_{BR} = AG_{BR}[ZP, OX, NT],$$

$$AG_{BR}[ZP, OX, NT] = IF[M_{BR}(t) = ZP(t); -a_{BR/ZP} ZP(t); 0] + IF[M_{BR}(t) = NT(t); -a_{BR/NT} NT(t); 0] + IF[M_{ZP}(t) = OX(t); -a_{ZP/OX} OX(t); 0],$$

$$M_{BR} = \arg\min\{ZP(t); OX(t); NT(t)\},$$

$$A_{NT} = AG_{NT}[OX, DT],$$

$$AG_{NT}[OX, DT] = IF[M_{NT}(t) = OX(t); -a_{NT/OX}OX(t); 0] + IF[M_{NT}(t) = DT(t); -a_{NT/DT}DT(t); 0],$$

$$M_{NT} = \arg\min\{OX(t); DT(t)\},$$

$$A_{OX} = a_{OX/ZP}ZP + a_{OX/BR}BR + a_{OX/NT}NT - a_{OX/PP}PP,$$

$$A_{DT} = a_{DT/NT}NT - a_{DT/PP}PP - a_{DT/ZP}ZP - a_{DT/BR}BR$$

$$A_{CD} = a_{CD/NT}PP - a_{CD/PP}ZP - a_{CD/BR}BR \quad (8)$$

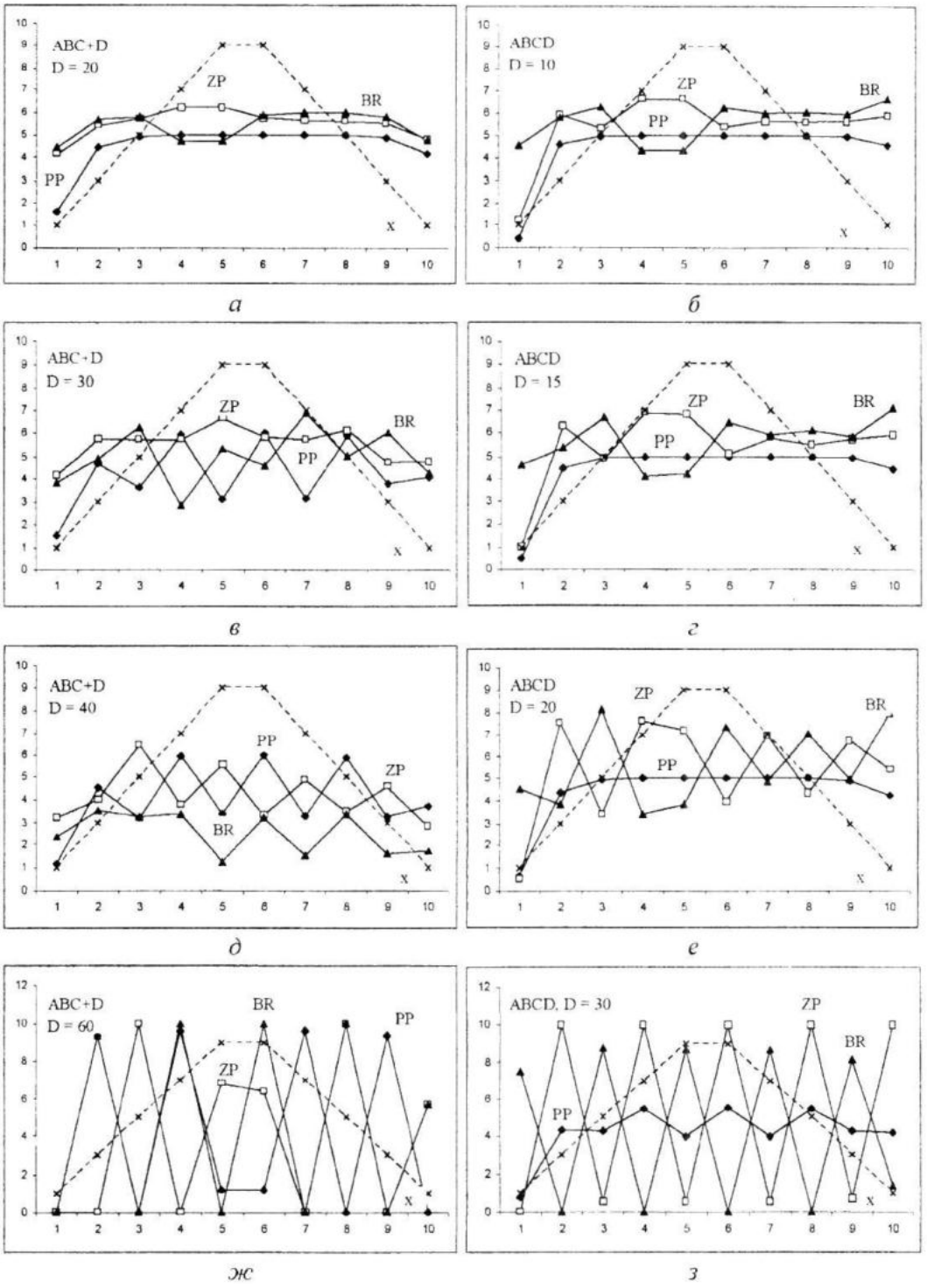
В численных экспериментах с моделями (6) и (7) решения этих уравнений находились при таких значениях параметров: $r_i = 1$, $\Delta t = 1$, $C_i = C = 5$, $\Delta x = 10$, а также нулевых начальных и краевых условиях. Для упрощения задачи концентрации всех элементов экосистемы были приведены к безразмерной форме путем нормировки на ресурсные емкости C_i, и приведения их значений к интервалу изменчивости (0, 10). В каждой из моделей коэффициенты диффузии считались одинаковыми для всех переменных $D_i = D$. Кроме того, было поставлено условие, удерживающее решения в пределах интервалов (0, 10), обусловленных заданной ресурсной емкостью $C = 5$. Коэффициенты взаимных влияний (реакций) $a_{MM/NN}$, входящие в соотношениях (8), выбирались в диапазоне значений (0,1; 0,5) с таким расчетом, чтобы обеспечить компромисс между чувствительностью модели к изменениям концентраций параметров экосистемы и устойчивостью вычислительной схемы Эйлера. Расчеты проводились на 370 безразмерных шагов по времени. Результаты расчетов представлены на рисунках 2 и 3.

Как следует из рис. 2, *а – з*, начальные пространственные распределения концентраций фито, зоопланктона и биоресурса, изображенные пунктиром, трансформировались после 300 итераций в распределения, согласованные между собой и с нулевыми краевыми условиями. При малых коэффициентах диффузии (рис. 2, *а* и *б*) распределения, полученные по моделям *ABC+D* и *ABCD*, практически совпадают. С увеличением влияния диффузии различия в решениях становятся заметными (рис. 2, *в – е*). Предельными значениями коэффициентов диффузии для модели *ABC+D* стали величины порядка 60, для модели *ABCD* – порядка 30. При дальнейшем увеличении коэффициентов диффузии величины концентраций выходят за пределы допустимых интервалов изменчивости, которые были ограничены условиями (8) и их распределения принимают волновой характер (рис. 2, *ж* и *з*). На всех рисунках заметно влияние нелинейных агентов управления на концентрации зоопланктона и био и пространственных распределений концентраций кислорода *OX*, биогенных элементов *NT*, детрита *DT* и углекислого газа *CD*. Рис. 3, *а – г* демонстрируют сценарии этих концентраций в точке $x = 5$, в которой начальные значения концентраций составляли 9 безразмерных единиц. Влияние агентов управления при отсутствии диффузии заметно из сравнения сценариев, приведенных на рис. 3, *а* и *б*. При включенных агентах увеличивается количество причинно-следственных связей между процессами в экосистеме (рис. 1) и происходит ресурсное лимитирование их взаимодействий. Поэтому стационарные состояния концентраций на рис. 3, *б* существенно иные, чем при выключенных агентах (рис. 3, *а*). ресурса, так как распределения *ZP* и *BR* имеют более высокую изменчивость по сравнению с распределением концентрации фитопланктона *PP*. При включении диффузии с коэффициентом $D = 20$ адаптация гидрохимических процессов происходит более быстро в модели *ABC+D* (рис. 3, *в* и *г*). Однако в этой модели возникают периодические колебания концентрации углекислого газа *CD*, которые устанавливаются и существуют весь период вычислений (рис. 3, *д*). Модель *ABCD* демонстрирует более медленное установление постоянных по величине сценариев концентраций (рис. 3, *е*).

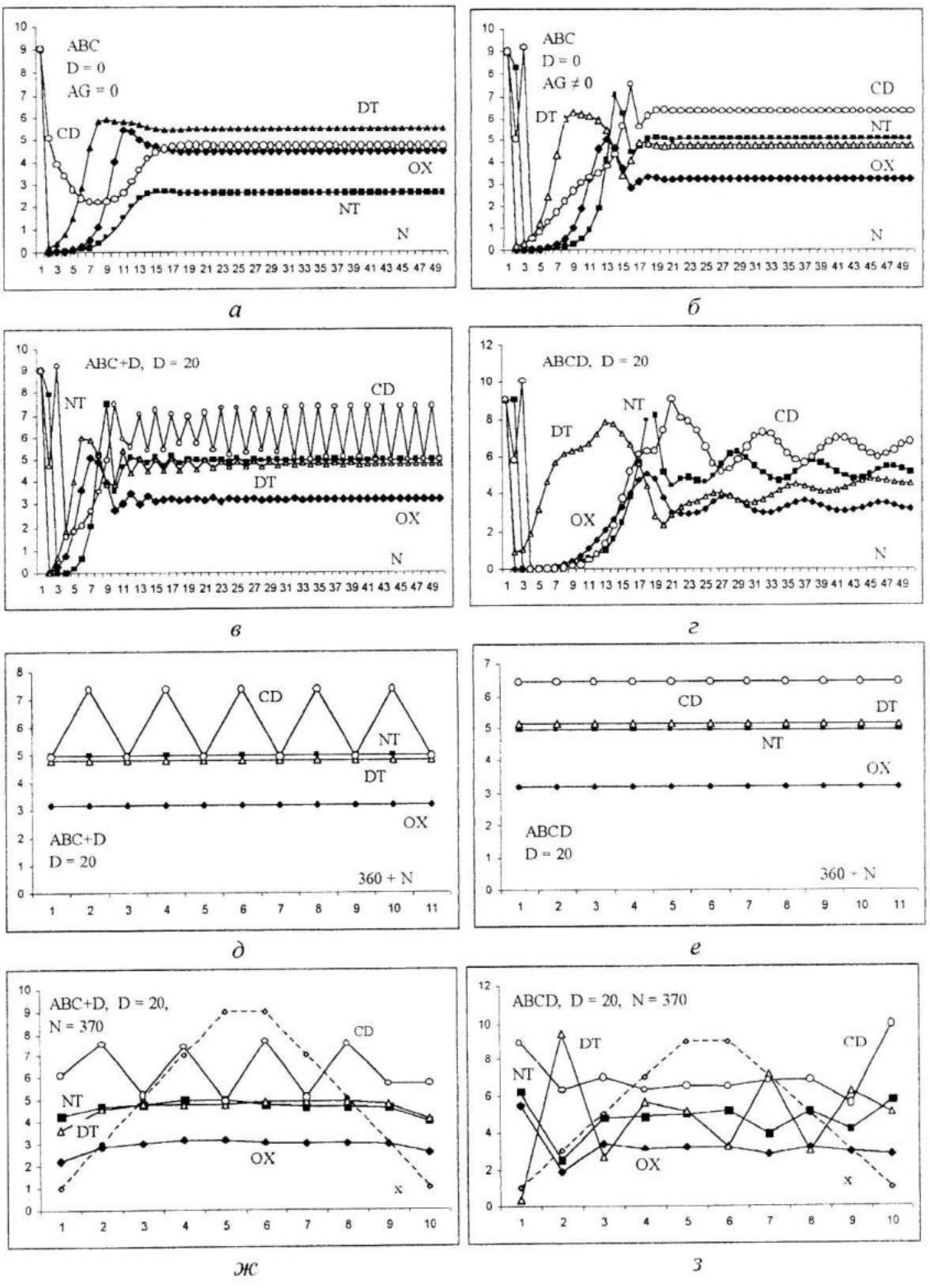
Рис. 3, *ж* и *з* дают представление о финальных распределениях концентраций гидрохимических элементов на 370 шаге итераций. К этому времени они уже не зависели от начальных распреде-

лений, показанных пунктиром, и оказались весьма разными для двух сравниваемых моделей. В модели $ABC+D$ распределение концентраций углекислого газа CD имеет характер волны с пространственным периодом $2\Delta x$ (рис. 3, *ж*) и временным периодом $2\Delta t$ (рис. 3, *д*).

Распределения других элементов под влиянием диффузии оказались сглаженными и слегка убывают по мере приближения к поглощающим границам области.



Р и с. 2. Пространственные распределения концентраций биологических элементов экосистемы при различных коэффициентах диффузии после 300 итераций: $ABCD$ – оператор диффузии в аргументе базовой функции (7), $ABC+D$ – вне ее (6). Пунктиром показаны начальные распределения всех параметров экосистемы



Р и с. 3. Сценарии и пространственные распределения концентраций химических элементов: *а* – без учета диффузии и агентов управления; *б* – без учета диффузии с агентами управления; *в*, *г* – сценарии на первых 50 шагах вычислений; *д*, *е* – сценарии на последних 10 шагах вычислений; *ж*, *з* – распределения концентраций на последнем шаге вычислений. Пунктир – начальные распределения

В модели *ABCD* картина пространственных распределений оказалась более сложной, что подтверждает более высокую чувствительность этой модели к значениям коэффициента диффузии. Наибольшую изменчивость имеет распределение детрита *DT* (рис. 3, *з*). Концентрации остальных элементов распределены более равномерно, причем, поглощающая роль граничных условий выражена весьма слабо.

Заключение. Проведенные эксперименты дают основания для следующих выводов.

1. Метод адаптивного баланса влияний (*ABC*-метод), используемый для построения интегральных моделей морских экосистем, может быть распространен на пространственно-временные модели экосистем, учитывающие динамику гидрофизических процессов, путем включения операторов переноса и диффузии в уравнения интегральной модели экосистемы в качестве дополнительных влияющих функций.

2. Базовые функции влияний, применяемые в модульных уравнениях *ABC*-метода, естественным образом учитывают ресурсные ограничения процессов развития в экосистемах, устанавливая отрицательные обратные связи между динамикой процесса и ресурсной емкостью окружающей среды.

3. Существуют два способа построения интегральных моделей адаптивных пространственно-временных экосистем: по типу уравнения Колмогорова-Фишера без включения диффузии (и переноса) в аргументы базовых функций влияний и по типу *ABC*-метода или адаптивного уравнения Колмогорова-Фишера, когда отрицательная обратная связь управляет подстройкой процессов реакции под внешние процессы диффузии (и переноса в общем случае).

4. Сравнение этих двух способов на примере упрощенной модели адаптивной морской экосистемы показало, что включение оператора диффузии в аргументы базовых функций влияния в уравнениях модели, повышает ее чувствительность к изменениям ресурсной емкости развития процессов, которые обусловлены наличием диффузии.

Поскольку концентрации живых объектов экосистем ограничены наличием ресурсов, необходимых для их существования, в уравнениях экосистем должны присутствовать агенты управления, следящие за минимальными количествами ресурсов. Перенос и диффузия объектов способны существенно изменять условия ресурсного лимитирования в данном объеме морской среды.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тимченко И.Е., Игумнова Е.М., Тимченко И.И.* Системный менеджмент и *ABC*- технологии устойчивого развития. – Севастополь.: Изд. "ЭКОСИ - Гидрофизика", 2000. – 225 с.
2. *Игумнова Е.М., Набойкина А.В., Тимченко И.И., Тимченко И.Е.* Системное моделирование социальных эколого-экономических процессов. Системы контроля окружающей среды: Сб. Научн. Тр.НАН Украины. МГИ. Севастополь, 2008. – С. 194 – 197.
3. *Еремеев В.Н., Игумнова Е.М., Тимченко И.Е.* Моделирование эколого-экономических систем. – Севастополь.: НПЦ «ЭКОСИ-Гидрофизика», 2004. – 320 с.
4. *Иванов В.А., Игумнова Е.М., Латун В.С., Тимченко И.Е.* Модели управления ресурсами прибрежной зоны моря. – Севастополь: НПЦ «ЭКОСИ – Гидрофизика», 2007. – 258 с.
5. *Murray J.D.* Mathematical biology II: Spatial models and biomedical applications. 3rd edition. Springer, 2008. – 736 p.
6. *Turing A.M.* The chemical basis of morphogenesis. Phil. Trans. R. Soc. London. B, 237:37–72, 1952.
7. *Николис Г., Пригожин И.* Самоорганизация в неравновесных системах. М.: Мир, 1979. – 512 с.