

О ПАРАДИГМАХ ПРИВЕДЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ И ПЛОТНОСТИ К НОРМАЛЬНОМУ ДАВЛЕНИЮ ПО МЕТОДАМ ГЕЛЛАНД-ГАНСЕНА И С УЧЕТОМ ТЕМПЕРАТУРЫ МАКСИМАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ ОТ ДАВЛЕНИЯ

П.П. Шерстяникин, Л.Н. Куимова,
В.Л. Потемкин

Лимнологический институт СО РАН
г. Иркутск, ул. Улан-Баторская, 3,
664033, Россия
E-mail: ppsherst@lin.irk.ru

*Показывается, что приведение температуры и плотности от какого-либо давления P к нормальному P_0 с учетом температуры максимальной плотности T_{md} , которая уменьшается с ростом P , и без, как в методе Helland-Hansen, в котором $T_{md}(P)=const$, дают разные результаты. Причина расхождений заключается в том, что, модельная вода, где $T_{md}(P)=const$, является не реальной. В предлагаемом нами методе учитывается уменьшение T_{md} с ростом давления, поэтому модельная вода и результаты расчета приведенной температуры и плотности являются реальными, совпадают с их значениями *in situ*, т.е. достоверны.*

Введение. В океанографии широкое применение имеет потенциальная температура морской (озерной) воды θ . Это температура, которую получит некоторый объем воды при равновесном адиабатическом переходе от давления P к нормальному (атмосферному) давлению P_0 , [1]. Такой процесс называют также приведением температуры воды T и плотности ρ от давления P к нормальному давлению P_0 . Существуют две парадигмы или два подхода к такому приведению: метод Helland-Hansen'a без учета T_{md} [2, 3] и наш с учетом T_{md} , Sherstyankin et al. [4] и Шерстяникин и др. [5], которые ниже будут рассмотрены подробнее.

В работе применяются уравнения состояния озерных вод в форме Chen, Millero [6] и морских вод по TEOS-10 [7]. Наибольшая разница в приведенных температурах и плотностях с учетом из-

менений T_{md} и без учета для потенциальной температуры и плотности по Helland-Hansen'у получается при температурах воды, близких к T_{md} , что особенно заметно в глубоководном пресноводном озере Байкал [4] и подледниковом озере Восток [8]. Для глубоководного пресноводного озера Байкал температурная стратификация для глубин 300 м и более всегда прямая, т.е. температура глубинных вод всегда больше T_{md} . Причина расхождений заключается в том, что модельная вода, для которой разработан метод Helland-Hansen'a, не учитывает уменьшения температуры максимальной плотности T_{md} с ростом давления (глубины) и не является реальной.

Расчеты температур и плотностей воды, приведенных от какого-либо давления P кциальному давлению P_0 , по методу Helland-Hansen'a [2, 3] и нашему [4, 5], сравнение, обсуждение полученных результатов и выводов являются целью работы.

Методика и аппаратура. Температуры и плотности, приведенные от давления P к нормальному давлению P_0 , по методу Helland-Hansen'a [2, 3] – потенциальные температуры θ и плотности $\rho^*(\theta)$ и по методу авторов [4, 5] – приведенные (преобразованные – reduce) температуры T_{reduce} и плотности ρ_{reduce} , получены с применением уравнений состояния озерных вод в форме Chen, Millero [6] и морских вод по TEOS-10 [7]. Примеры расчетов сделаны для байкальских вод по данным [8] и для океанических – по Каменковичу [1].

Измерения температуры на Байкале проводились СТД зондом, а в океане опрокидывающимися термометрами с точностью 0.002 и 0.02 °C соответственно. Соленость S или минерализация байкальских вод считается постоянной, равной 0.0965 г/л.

Для расчетов использовалось уравнение состояния озерной воды в форме Chen, Millero [6] и методика прецизионного расчета термодинамических параметров озерных вод, включая итераци-

онный способ расчета температуры максимальной плотности с заранее выбранной точностью расчетов до $\pm 0.0001 {}^{\circ}\text{C}$, [5, 9, 10].

Краткая теория. Метод Helland-Hansen'a (1912), потенциальные температура и плотность. Определение потенциальной температуры θ по Helland-

Hansen'у [2, 3] сводится к расчету адиабатической поправки ΔT_{ad} для слоя ΔP , ограниченного давлением P_0 (поверхностью) и P по известному адиабатическому градиенту температуры Γ . Общий вид расчета потенциальной температуры сводился к виду

$$\theta(T, S, P \rightarrow P_0) = T(T, S, P) - \sum_0^P \Delta \Gamma(T, S, P) \Delta P = T(T, S, P) - \int_0^P \Gamma(T, S, P) dP. \quad (1)$$

Потенциальная плотность воды ρ_{pol} находилась как [7]

$$\rho_{pol}(\theta, S, P \rightarrow P_0) = \rho(T, S, P) - \int_0^P (\partial \rho / \partial P)_{ad} dP = \rho^*(\theta, S, P_0). \quad (2)$$

Из формулы (2) следует, что плотность воды, определяемая по реальным температурам $T(T, S, P)$, не учитывает адиабатическую сжимаемость (несжимаемая жидкость).

Наш метод приведения температуры и плотности от давления P к P_0 . В реальной воде необходимо учитывать аномальные температурно-плотностные свойства, вызванные уменьшением температуры максимальной плотности T_{md} с ростом давления P . Для учета влияния T_{md} достаточно пользоваться разностью температур

$$\Delta T^{M-V}(T, S, P) = T(T, S, P) - T_{md}(S, P), \quad (3)$$

которую первыми в своих работах начали применять Д.И. Менделеев [11] и Г.Ю. Верещагин [12], что отмечено верхними индексами M и V . Заметим, что эта разность температур ΔT^{M-V} обладает замечательными (особыми) свойствами:

a) при $T > T_{md}$ разность температур

$$\Delta T^{M-V} > 0 \quad (4)$$

и температурная стратификация – прямая;

b) при $T < T_{md}$ разность температур

$$\Delta T^{M-V} < 0 \quad (5)$$

и температурная стратификация – обратная;

в) при $T = T_{md}$ разность температур

$$\Delta T^{M-V} = 0 \quad (6)$$

и температурная стратификация соответствует температуре максимальной плотности $T \equiv T_{md}$.

Для нахождения температуры T_{reduce} , приведенной (преобразованной, исправленной – reduce) от давления P к давлению P_0 достаточно добавить ΔT^{M-V} к температуре максимальной плотности $T_{md}(S, P_0)$.

Разность $\Delta T^{M-V}(T, S, P)$ обладает термодинамическим подобием: для любых P при одних и тех же разностях, т.е. одинаковом удалении T от T_{md} или эквидистантности, термодинамические параметры имеют близкие значения для всей линейки температур. Из этого следует, что для приведения температуры и плотности от давления P к давлению P_0 достаточно к разности $\Delta T^{M-V}(T, S, P)$ прибавить $T_{md}(S, P_0)$. Получим

$$T_{reduce}(T, S, P \rightarrow P_0) = T_{md}(S, P_0) + \Delta T^{M-V}(T, S, P) = T_{md}(S, P_0) + T(T, S, P) - T_{md}(S, P) \quad (7)$$

Формулы, подобные (4) – (6), были впервые получены в работах [5, 8, 9]. Для приведенной плотности $\rho_{reduce}(T_{reduce}, S, P \rightarrow P_0)$ получим формулу, аналогичную (2)

$$\rho_{reduce}(T_{reduce}, S, P \rightarrow P_0) = \rho(T, S, P) - \int_0^P (\partial \rho / \partial P)_{ad} dP, \quad (8)$$

где $(\partial \rho / \partial P)_{ad}$ – адиабатическая сжимаемость.

Материалы и результаты расчетов потенциальных и приведенных температур и плотностей для озера Байкал и Мирового океана. Озеро Байкал. Различия в подходах (парадигмах) проявляются особенно отчетливо при температуре максимальной плотности T_{md} и её окрестностях, что можно показать на CTD зондировании в районе максимальных глубин озера Байкал вблизи от мыса Ижимей по [8]. Вертикальное распределение потенциальной температуры θ , взятой с графика в [8], показано на рис. 1, где кривая 1 – $T_{md}(S, P)$, кривая 2 – $T_{pot}(T, S, P)$, 3 – $T(T, S, P)$, 4 – $T_{md}(S, P_0) \equiv const$, кривая 5 – $T_{reduce}(T, S, P_0)$ и 6 – $\Delta T^{M-V} T(T, S, P)$ со шкалой внизу.

Потенциальные температуры T_{pot} взяты по измерениям [8], остальные характеристики рассчитаны нами. Потенциальная температура θ , полученная по методу Helland-Hansen'a [2, 3], была оцифрована и пересчитана в реальную температуру T . θ и реальная температура T практически совпадают (кривые 2 и 3), так как максимальное расхождение между ними составляет всего несколько сотых долей градуса Цельсия, о чем для байкальских условий предупреждал Г.Ю. Верещагин [12]. В верхних слоях воды от 0 до 100 м находится обратная температурная стратификация, глубже – прямая. Потенциальная температура θ везде меньше $T_{md}(S, P_0) = 3.9645^\circ\text{C}$, т.е. температурная стратификация везде является обратной.

Температура максимальной плотности $T_{md}(S, P)$, разность температур Менделеева-Верещагина ΔT^{M-V} и температура $T_{reduce}(P \rightarrow P_0)$, приведенная от произвольного давления P к нормальному давлению P_0 по формулам (3), (7) и показаны на рис. 1 (кривые 1, 5, (шкала внизу) и 6). В верхнем 100-метровом слое воды ΔT^{M-V} и $T_{reduce}(P \rightarrow P_0)$ отрицательны, $T < T_{md}(S, P)$ и температурная стратификация в соответствии с (5) – обратная; на глубине 100 м $T = T_{md}(S, P)$, разность температур $\Delta T^{M-V} = 0$, а реальная температура воды становится равной $T_{md}(S, 100\text{m}) = 3.768^\circ\text{C}$. Глубже 100 метров реальные температуры становятся больше $T_{md}(S, P)$, температурная стратификация по (4) – прямой, а разности температур $\Delta T^{M-V} > 0$, приведенные температуры $T_{reduce}(P \rightarrow P_0)$ больше $T_{md}(S, P_0)$.

Для примера на глубинах 1000 и 1620 м в [9] по методу Helland-Hansen'a (формула (1)), были получены потенциальные (приведенные) температуры 3.246 и 3.060 $^\circ\text{C}$, а по нашему методу (формула (3)) – значения приведенных температур оказались равными 5.287 и 6.452 $^\circ\text{C}$.

Температура, приведенная от глубины 1000 м к поверхности, больше $T_{md}(S, 0) \approx 4^\circ\text{C}$ впервые была получена в [12] для Южного Байкала со значением 5.49 $^\circ\text{C}$ для $T(1000\text{m}) = 3.36^\circ\text{C}$, что практически совпадает с нашими расчетами $T_{reduce}(3.36, 1000\text{m} \rightarrow 0) = 5.386^\circ\text{C}$, сделанными по более точно рассчитанным T_{md} , [9]. Таким образом, значения приведенных температур $T_{reduce}(P \rightarrow P_0)$, полученные нами, совпадают с первыми оценками Г.Ю. Верещагина [12]. Если бы он давал математическое описание вычисления приведенной температуры, то, как показывает текстуальный анализ в [12], была бы получена формула (7).

Температуры T_{md} , T_{pot} , T , $T_{md}(P_0) \equiv \text{const}$, T_{reduce} и ΔT^{M-V} , $^{\circ}\text{C}$

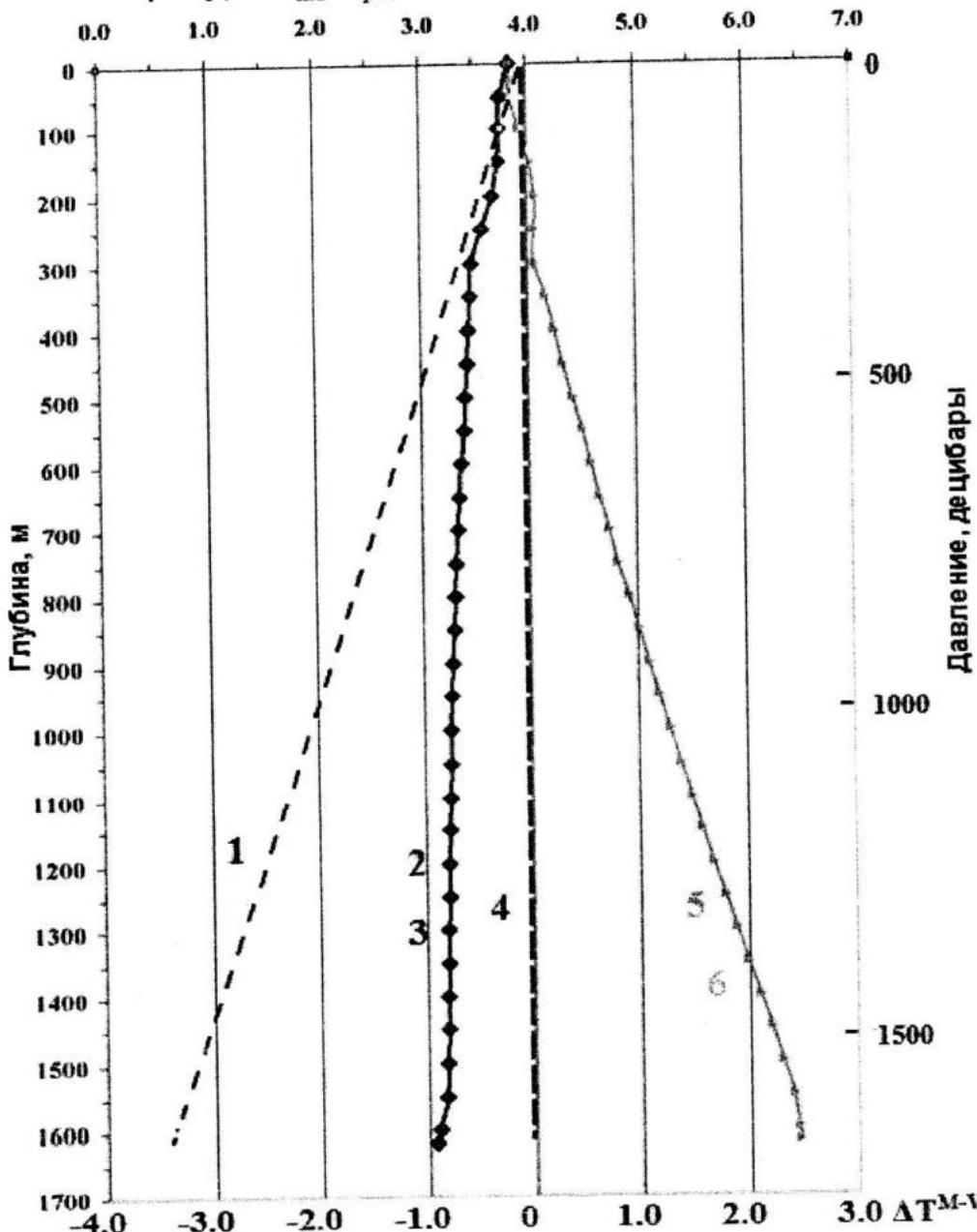


Рис. 1. Температуры максимальной плотности $T_{md}(S, P)$, потенциальные $\theta(T, S, P \rightarrow P_0)$, реальные $T(T, S, P)$, $T_{md}(S, P_0) \equiv \text{const}$, приведенная (reduce) температура $T_{reduce}(T, S, P_0)$ и разность температур Менделеева-Верещагина $\Delta^{M-V}T(T, S, P)$ в районе максимальных глубин у мыса Ижимей в Среднем Байкале

Знание распределения плотностей воды при разных давлениях имеет очень большое значение для анализа динамических процессов. Рассмотрим, как изменяются и что дают потенциальные по Helland-Hansen'у $\rho^*(\theta, S, P \rightarrow P_0)$ и приведенные по нашему методу $\rho_{reduce}(T_{reduce}, S, P \rightarrow P_0)$ плотности. Будем вести расчеты не для самих плотностей ρ , а для их разностей с максимальной плотностью $\rho(T_{md})$. Разности плотностей, $\Delta\rho^* = \rho^*(\theta, P \rightarrow P_0) - \rho(T_{md}, P_0)$, $\Delta\rho_{reduce} = \rho_{reduce}(T_{reduce}, P \rightarrow P_0) - \rho(T_{md}, P_0)$, in situ $\Delta\rho_T = \rho_T(T, P) - \rho(T_{md}, P)$ и $\Delta\rho \cdot \kappa_{ad}(T_{ad}, S, P_0) / \kappa_{ad}(T_{ad}, S, P) = \Delta\rho_{ad}$, где $\kappa_{ad}(T_{ad}, S, P)$ – коэффициент адиабатического сжатия, показаны на рис. 2, где кривая 1 – для потенциальной температуры $T_{pot}(T, S, P)$ по методу HellandHansen'a (1912), 2 – для реальной температуры $T(T, S, P)$, 3 – для приведенной адиабатической (reduce) температуры $T_{reduce}(T, S, P_0)$ и 4 – по формуле (5).

В качестве аргумента взята разность температур Менделеева-Верещагина $\Delta T^{M-V} = T - T_{md}$, что очень удобно для выделения обратной (отрицательные) и прямой (положительные значения) температурной стратификации. Распределения разностей плотностей $\Delta\rho = \rho - \rho(T_{md})$ для обратной стратификации лежат на левой ветви, а для прямой – на правой ветви плотностной кривой.

Разности потенциальных плотностей $\Delta\rho_{pot}$, определенных по методу Helland-Hansen'a (кривая 1 рис. 2) целиком лежат в области для обратной стратификации (левая ветвь плотностной кривой), что для слоев воды глубже 100 м не соответствует действительности.

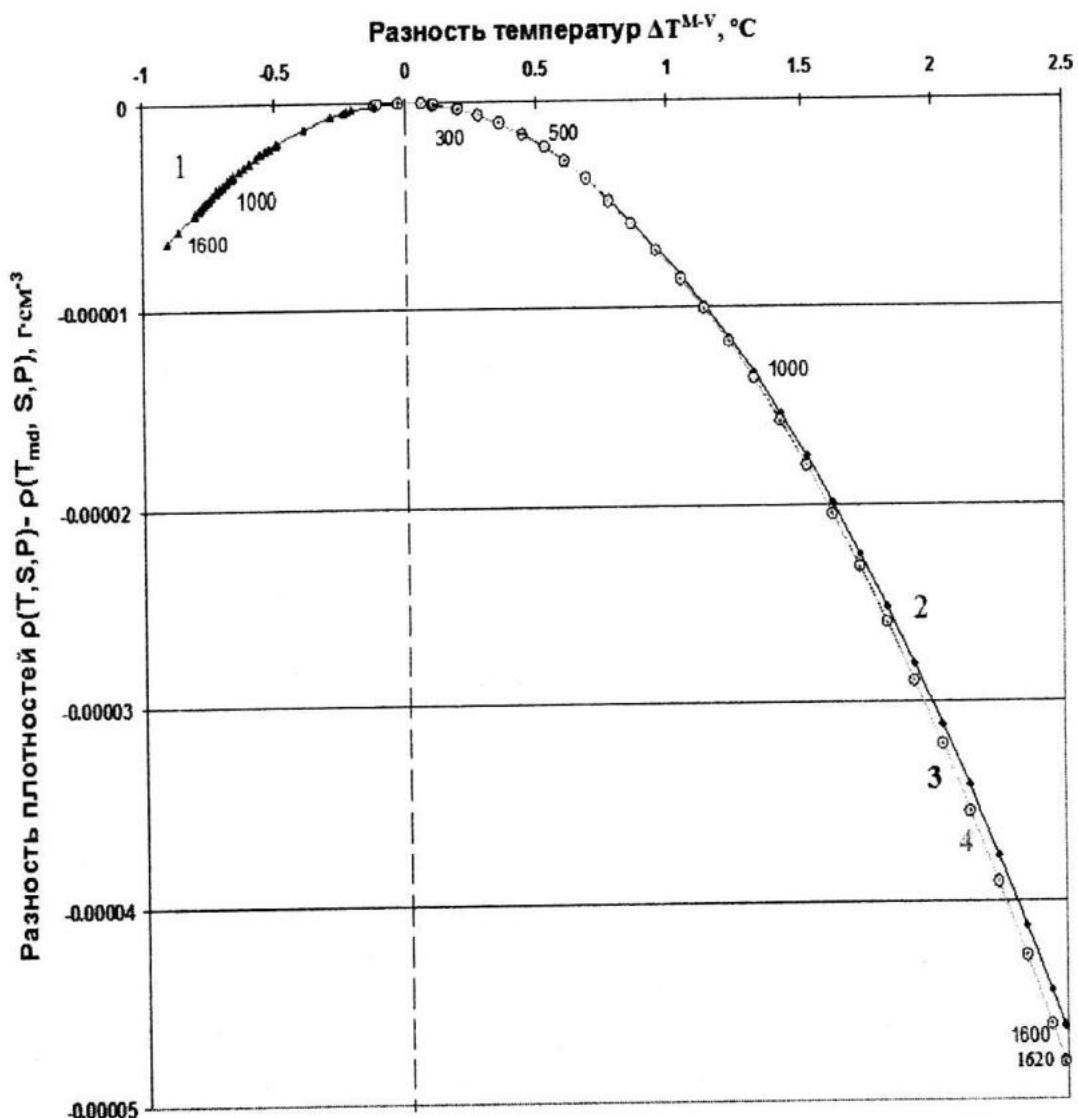
Разности плотностей $\Delta\rho_T$, $\Delta\rho_{reduce}$ и $\Delta\rho_{ad}$ соответствуют термическим стратификациям: отрицательны в верхнем слое до 100 м, где стратификация обратная, и положительны в ниже лежащих слоях, где стратификация – прямая. Разности плотностей воды $\Delta\rho_T$, опреде-

ленные по температурам T и T_{md} in situ (кривая 2) имеют наибольшие значения, так как адиабатическая поправка на сжимаемость не учтена (несжимаемая жидкость). Разности плотностей $\Delta\rho_{reduce}$ для приведенных температур $T_{reduce}(T, S, P \rightarrow P_0)$ и с учетом адиабатических свойств воды $\Delta\rho_{ad}$ практически совпадают (кривые 3 и 4).

Мировой океан. Различия в парадигмах приведения температуры и плотности от какого-либо давления P к нормальному P_0 имеются и для морской воды, для которой взяты измерения температуры до глубины 10000 м в районе глубочайшего желоба. Температуры максимальной плотности T_{md} , температуры in situ T и потенциальные θ , взятые по [7], а также приведенные температуры T_{reduce} и разности температур Менделеева-Верещагина ΔT^{M-V} , определенные по нашему методу, показаны на рис. 3, где кривая 1 – $T_{md}(S, P)$; кривые 2 – $T_{pot}(T, S, P)$ и 3 – $T(T, S, P)$; 4 – $T_{reduce}(T, S, P_0)$ и 5 – $\Delta T^{M-V} T(T, S, P)$.

Температура максимальной плотности T_{md} (кривая 1) для такого диапазона давлений (до 1000 бар) с учетом солености от 32 до 35‰ находилась экстраполяцией данных Gebhart, Mollendorf [13] и для давления 1000 бар была близка к -36 °C.

Для оценки реальности и достоверности этих данных мы ориентировались на работу Kanno et al. [14], по которым переохлаждение воды для давления 1000 бар достигает -60 °C, а термодинамические параметры в диапазоне от 100 до 1000 бар линейны. Расхождения между θ (кривая 2) и T in situ (кривая 3) возрастают с глубиной и к 10000 м достигают 1.32 °C (θ меньше T). Приведенная температура T_{reduce} (кривая 4) в точке P_0 совпадает с потенциальной температурой θ , при давлении 1000 децибар проходит через минимум, при давлении 10000 децибар T_{reduce} достигает 35.54 °C и превосходит θ на 34.38 °C. Разность температур Менделеева-Верещагина



Р и с. 2. Разности плотностей $\rho(T, S, P) - \rho(T_{md}, S, P)$ в зависимости от разности температур Менделеева-Верещагина $\Delta T^{M-V}(T, S, P)$ в районе максимальных глубин у мыса Ижимей в Среднем Байкале

ΔT^{M-V} (кривая 5) в соответствии с формулой (7) всюду превышает значение T_{reduce} на значение $T_{md}(S, P_0)$, включая минимум при 1000 децибар.

В зависимости от разности температур Менделеева-Верещагина ΔT^{M-V} разности плотностей морской воды *in situ* $\rho(T) - \rho(T_{md})$ и приведенных плотностей $\rho(T_{reduce}) - \rho(T_{md})$ имеют мини-

мумы на глубине 1000 м (децибар). Разности потенциальных плотностей $\rho(\theta) - \rho(T_{md})$ монотонно уменьшаются от поверхности до 10000 м. Разности приведенных плотностей $\rho(T_{reduce}) - \rho(T_{md})$ ведут себя подобно разностям *in situ*, что является подтверждением достоверности наших представлений. Все разности плотностей даны в таблице 1.

Таблица 1

Разности плотностей морской воды *in situ* $\rho(T) - \rho(T_{md})$, потенциальных $\rho(\theta) - \rho(T_{md}, P_0)$ и приведенных $\rho(T_{reduce}) - \rho(T_{md}, P_0)$ в зависимости от разности температур ΔT^{M-V} на глубоководной станции Мирового океана, рассчитанные по данным [7]

Z, м	$\Delta T^{M-V} = T - T_{md}$, °C	$\rho(\theta) - \rho(T_{md}, P_0)$, г/см³	$\rho(T) - \rho(T_{md}, P)$, г/см³	$\rho(T_{reduce}) - \rho(T_{md}, P_0)$, г/см³	P, децибар
0	10.37	-0.0007755	-0.0007755	-0.0007755	0.0
1000	9.32	-0.0002825	-0.0005675	-0.0005835	1009.6
3000	13.98	-0.0001545	-0.0010450	-0.0011135	3044.2
5500	21.58	-0.0001435	-0.0024260	-0.0028455	5612.6
10000	38.44	-0.0001365	-0.0081240	-0.0081955	10301.1

Обсуждение парадигм потенциальных и приведенных температур и плотностей для озера Байкал и Мирового океана. Рассмотрим основные отличия в поведении температур и плотностей при переходе (приведении) от некоторого давления P к нормальному давлению P_0 при использовании разных парадигм (подходов).

Парадигма Helland-Hansen'a [2, 3].

1. Диапазон изменения потенциальной температуры θ небольшой в пределах адиабатической поправки температуры и особенно невелик (исчезающе мал) для пресных вод типа озера Байкал, Ладожского и др. и для близкого к пресному подледниковому озеру Восток (рис. 1). Для пресных и морских глубинных вод θ убывает с ростом давления. Потенциальная плотность ρ^* относительно максимальной плотности $\Delta\rho^* = \rho^* - \rho(T_{md}, P_0)$ для глубинных пресных вод уменьшается, а для морских вод увеличивается с ростом давления (глубины), и диапазон изменения достигает на озере Байкал для 1620 м – $6.6 \cdot 10^{-4}$ г/см³, в океане для 10000 м – до $1.4 \cdot 10^{-3}$ г/см³.

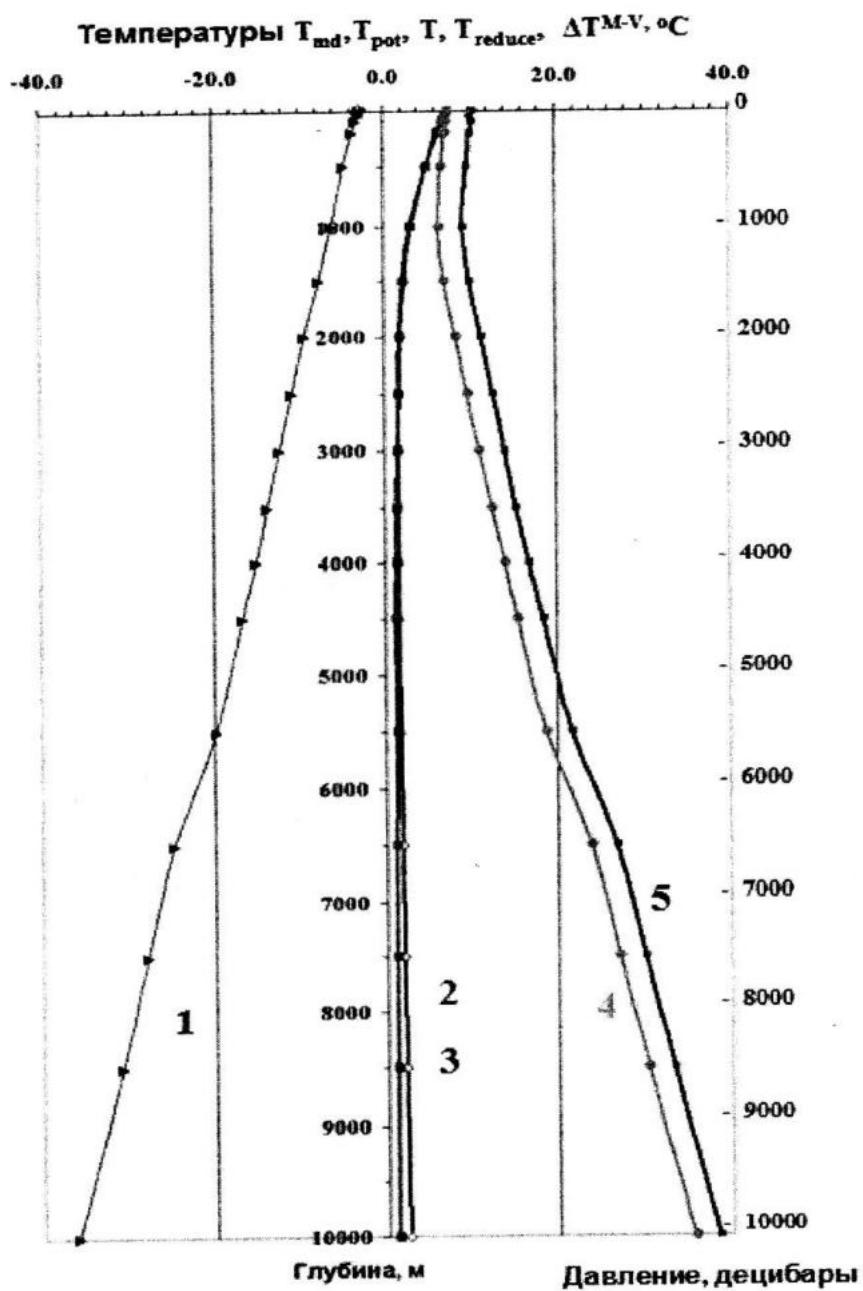
2. Для глубинных байкальских вод θ всегда меньше температуры максимальной плотности для поверхностных вод равной 4 °C, поэтому потенциальная термическая стратификация в таких случаях всегда обратная, что противоречит наблюдениям.

3. Парадигма Helland-Hansen'a ни в определениях, ни в формулах не упоминает и не использует температуру максимальной плотности T_{md} и из этого следует, что модельная вода в парадигме не реальная, что подтверждают поведения потенциальной температуры θ и потенциальной плотности ρ^* .

Наши подходы: Sherstyankin et al. [4] и Шерстянкин и др. [5].

1. Диапазон изменения приведенных температур T_{reduce} значительно превосходит таковой для потенциальных температур θ и T_{reduce} и на максимальных глубинах озера Байкал достигает 6.45 °C, а на максимальных глубинах океана – минус ~35.3 °C.

2. Разности приведенной плотности относительно максимальной плотности $\Delta\rho(T_{reduce}) = \rho(T_{reduce}) - \rho(T_{md}, P_0)$ при нор-



Р и с. 3. Температуры максимальной плотности $T_{md}(S, P)$, потенциальные $T_{pot}(T, S, P)$, реальные $T(T, S, P)$, приведенные (reduce) $T_{reduce}(T, S, P_0)$ и разности температур Менделеева-Верещагина $\Delta^{M-V}T(T, S, P)$

мальном давлении P_0 для озера Байкал убывают с ростом давления и достигают значений $4.8 \cdot 10^{-5}$ г/см⁻³ для 1620 м и практически совпадают с $\Delta\rho(T)$ in situ; для океанских условий они от поверхности до 1000 м растут, а затем убывают, достигая значений $\sim 8.1 \cdot 10^{-3}$ г/см⁻³. Отметим, что расхождения между значениями разностей приведенной плотности и плотности in situ могут быть вызваны, скорее всего, приближенными значениями T_{md} для океанских вод. Как и для байкальских условий значения in situ $\Delta\rho(T)$ и $\Delta\rho(T_{reduce})$ для морской воды совпадают, что подтверждает достоверность наших результатов.

Примечательно, что в летнее время на Байкале при прямой температурной стратификации на слой скачка температуры, который совпадает с пикноклином, также приходится минимум этих параметров [15].

3. Наша парадигма, система взглядов на приведение температуры и плотности от некоторого давления P к нормальному давлению P_0 , имеет в основе применение температуры максимальной плотности T_{md} , ее уменьшение с ростом давления, что является выражением температурно-плотностной аномалии природных вод. Без учета этих фундаментальных свойств природных вод модельная вода, как в парадигме Helland-Hansen'a [2, 3], не является реальной и учет при переходе от давления P к нормальному давлению P_0 только изменений адиабатических свойств без учета уменьшения T_{md} не является достаточным. Критерием достоверности полученных результатов является совпадение (близкие значения) плотностей in situ и приведенных, как в нашем методе для байкальских и океанических вод, и критерием недостоверности – их принципиальное различие в методе Helland-Hansen'a [2, 3].

Работа поддержана Российским Фондом Фундаментальных исследований, грант № 11-05-00438.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Каменкович В.М. Основы динамики. Л.: Гидрометеоиздат. 1973. – С. 240.
2. Helland-Hansen, B., 1912: The Ocean Waters. Intern. Rev. Hydrobiol. Hydrol., Hydrol. Supp. Ser. 1, No. 2, Leipzig.
3. Sverdrup H.U., Johnson M.W. and Fleming R.H. THE OCEANS Their Physics, Chemistry and General Biology. New York, Prentice-Hall, Inc., 1942. – 1087 p.
4. Sherstyankin P.P., Kuimova L.N., Potemkin V.L. Determination of potential temperature and density for deep fresh waters. Journal of Lake Sciences, Vol. 10, Suppl., 1998, pp. 261 – 266.
5. Шерстяник П.П., Куимова Л.Н., Потемкин В.Л. О температуре максимальной плотности и термобарических свойствах глубоких пресных вод на примере озера Байкал. Докл. РАН. 2000. Т. 375(1). – С. 107 – 111.
6. Chen C.T. and Millero F.J. 1986. Precise thermodynamic properties for natural waters covering the limnological range. Limnol. Oceanogr. 31:657 – 662.
7. The International Thermodynamic Equation of Seawater – 2010: Calculation and Use of Thermodynamic Properties. 2010. – 196 pp. (English).
8. Weis R.F., Carmack E.C. and Koropalov V.M 1991. Deep-water renewal and biological production in Lake Baikal. Nature. 349: – С. 665 – 669.
9. Шерстяник П.П., Куимова Л.Н., Потемкин В.Л. О расчете потенциальной температуры природных вод. ФАО, 2001, т. 37, № 3. – С. 407 – 410.
10. Шерстяник П.П., Куимова Л.Н. Точные формулы для термодинамических параметров озерных вод по уравнению состояния в форме Chen-Millero. Докл. РАН. 2003. Т. 391(2). – С. 254 – 259.
11. Mendeleeff D. The Variation in the Density of Water with the Temperature. Philosophical Magazine, 1892, S.5, Vol. 33, No. 200, pp. 99 – 132.
12. Верещагин Г.Ю. Некоторые данные о режиме глубинных вод Байкала в районе Маритуя. Тр. Комиссии по изучению оз. Байкал. 1927. Т. 2. – С. 77 – 138.
13. Gebhart B., Mollendorf J.C. "A New Density Relation for Pure and Saline Water", Deep Sea Research, 1977. Vol. 24, pp. 831 – 848.
14. Kanno H., Spedy R.J., Angell C.A. Supercooling of Water to -92 °C Under Pressure. Science. 1975. 189, pp. 880 – 881.
15. Шерстяник П.П., Куимова Л.Н., Потемкин В.Л. Основные закономерности термохалинного режима глубинной зоны озера Байкал. Докл. РАН, 1997, т.355, № 5. – С. 683 – 687.