ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ АСПЕКТЫ ВАРИАЦИОННОГО АЛГОРИТМА ИДЕНТИФИКАЦИИ НАЧАЛЬНОГО ПОЛЯ КОНЦЕНТРАЦИИ ПАССИВНОЙ ПРИМЕСИ

С.В. Кочергин, В.С. Кочергин

Морской гидрофизический институт
НАН Украины
г. Севастополь, ул. Капитанская, 2
E-mail: ko4ep@mail.ru

В работе рассматриваются вопросы согласованности модели с данными измерений и использования дополнительной информации о поле концентрации пассивной примеси.

При численной реализации вариационного алгоритма идентификации входных параметров в случае несогласованности данных измерений с моделью сходимость итерационного процесса замедляется. В этом случае использование дополнительной информации об исследуемом поле концентрации позволяет восстановить начальное поле с достаточной степенью точности. В качестве такой информации могут выступать сведения о гладкости моделируемого поля, информация о максимальных и минимальных значениях, которые накладывают определенные ограничения на вариации входных параметров.

Рассмотрим следующую одномерную модель переноса пассивной примеси в области D на интервале времени $[0,\bar{t}]$

$$\begin{gathered}\frac{\partial C}{\partial t}+U\frac{\partial C}{\partial x}=A\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}\\ \Gamma: C=0\\ t=0: C=C_0\end{gathered}, \qquad (1)$$

где C – концентрация примеси, скорость $U=const$, коэффициент турбулентной диффузии $A=const$, Γ – граница области интегрирования D, $D_t=D\times[0,T]$.

На момент времени T существуют данные измерений о поле концентрации $C_{изм}$. Для идентификации входных параметров задачи вариационным методом [1] с учетом данных измерений находим минимум следующего функционала

$$I_0(C)=\frac{1}{2}\left(C-C_{изм},C-C_{изм}\right)_{D_t}, \qquad (2)$$

где скалярное произведение определено следующими равенствами (3)

$$(C,C^*)_{D_t}=\int\limits_{D_t}C\cdot C^*\,dD_t=\int\limits_0^T\int\limits_D C\cdot C^*\,dDdt.$$

Минимизация квадратичного функционала (2) осуществляется при условии, что C является решением модели (1). Поэтому, поиск минимума (2) при ограничениях (1) эквивалентно минимизации функционала

$$I(C)=I_0(C)+\left(\frac{\partial C}{\partial t}+U\frac{\partial C}{\partial x}-A\frac{\partial^2 C}{\partial x^2},C^*\right)+$$
$$\left(C,C^*\right)_{\Gamma_t}-\left(C-C_0,C^*\right)_D\Big|_{t=0}. \qquad (4)$$

Следуя работе [1] выбираем множители Лагранжа как решение сопряженной задачи

$$\begin{gathered}-\frac{\partial C^*}{\partial t}-U\frac{\partial C^*}{\partial x}-k\frac{\partial^2 C^*}{\partial x^2}=0\\ \Gamma: C^*=0\\ t=\bar{t}: C^*=\nabla I(C)\end{gathered}. \qquad (5)$$

Из условия стационарности градиент функционала определяется выражением

$$\nabla_{C_0}I(C)=C^*\Big|_{t=0}. \qquad (6)$$

Необходимо осуществлять итерационный спуск в направлении градиента (6) для поиска следующего приближения C по формуле

$$C_0^{n+1}=C_0^n+\tau\nabla C_0 I(C), \qquad (7)$$

где τ – некоторый итерационный параметр.

Для улучшения результатов решаемой задачи часто в качестве функционала рассматривает выражение

$$\begin{gathered}I_1=I_0+\frac{\alpha}{2}\left(\frac{\partial C_0}{\partial x},\frac{\partial C_0}{\partial x}\right)_D+\\ +\frac{\beta}{2}\left(\frac{\partial^2 C_0}{\partial x^2},\frac{\partial^2 C_0}{\partial x^2}\right)_D\end{gathered}. \qquad (8)$$

Это выражение накладывает ограничения на гладкость начального поля концентрации C_0. При этом

$$\nabla_{C_0}I(C)=C^*\Big|_{t=0}-\alpha\frac{\partial^2 C_0}{\partial x^2}+\beta\frac{\partial^4 C_0}{\partial x^4}. \qquad (9)$$

Априорная информация об исследуемой примеси накладывает дополнительные ограничения при минимизации квадратичного функционала невязок прогноза. Согласованность модели с данными измерений оказывает существенное влияние на результат идентификации. В данной работе рассмотрим перечисленные выше аспекты вариационного алгоритма идентификации и проанализируем полученные результаты расчетов.

Численный эксперимент. Численные эксперименты проводились при следующих значениях параметров $\Delta x = 5 \cdot 10^5 см$ (шаг по пространству), коэффициента турбулентной диффузии $A = 5 \cdot 10^5 см^2/сек$, шага по времени $\Delta t = 400 сек$, скорости $U = 10 см/сек$ на временном интервале 45 суток и 4,5 суток.

На рис. 1 жирной линией показано начальное распределение поля концентрации, пунктирная линия изображает решение модели (1). При первой итерации $C_0 = 0$ и полученная по модели концентрация $C_{изм}$ на конечный момент времени является фактически невязкой прогноза. После решения сопряженной задачи имеем C_0^* (пунктирная линия на рис. 1). Эта величина с весом τ прибавляется к заданному начальному полю $C_0^0 = 0$. Найденное первое приближение задается в качестве начальных данных C_0^1, в результате работы модели переноса пассивной примеси, получим концентрацию изображенную на рис. 1 тонкой сплошной линией. Невязкой прогноза в этом случае будет разница между результатом прогноза (тонкая сплошная линия) и данными измерений (пунктирная линия). Соответствующее решение сопряженной задачи имеет знакопеременный вид (жирная линия). Добавление такого градиента к C_0^1 с некоторым весом τ приводит к дальнейшему увеличению максимальной концентрации в начальном поле и сужению области положительных значений C_0. При появлении отрицательных значений C_0 использовалась дополнительная информация о величине концентрации $(C \geq 0)$.

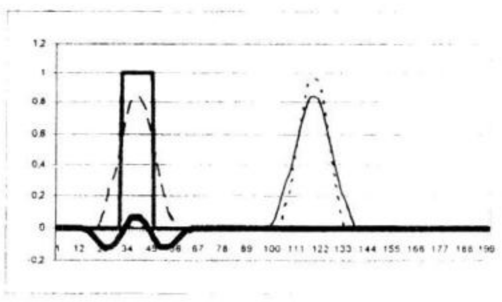
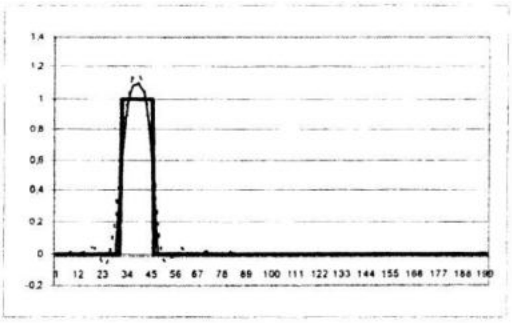


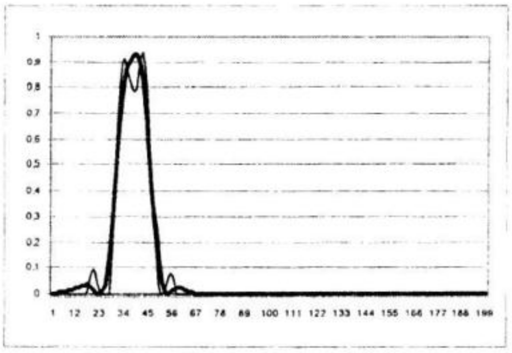
Рис. 1. Начальное поле, решение модели и сопряженной задачи на первом шаге итерационного процесса

На рис. 2 представлены восстановленные начальные данные без учета условия $C \geq 0$ (штриховая линия) и с учетом положительности значений поля концентрации (сплошная линия). При этом в первом случае условная суммарная концентрация в начальном поле $S = 15.394$, а во втором расчете $S = 15.056$. То есть учет дополнительной информации позволил в результате итераций более точно восстановить истинное значение $S = 15.0$. В приведенном выше расчете в качестве данных измерений использовались результаты моделирования, полученные по модели (1) – (3) с Superbee аппроксимацией. В реальности данные измерений могут быть несогласованны с самой моделью, которая используется в алгоритме идентификации. Несогласованность может быть разного рода – это и ошибки измерений, неточность задания коэффициентов модели и так далее. Рассмотрим вариант, когда $C_{изм}$ получена при помощи расчета по одной схеме, а идентификация C_0 осуществляется при помощи алгоритма, в основе которого лежит другая разностная аппроксимация. В результате мы имитируем несогласованность модели с данными измерений. Для расчета $C_{изм}$ использовалась схема minmod, а в алгоритме идентификации использовалась Superbee аппроксимация.

Начальное поле, полученное при помощи вариационного алгоритма идентификации C_0, за счет минимизации функционала (2) изображено на рис. 3 тонкой сплошной линией. А расчет при минимизации (8) обозначен сплошной жирной линией. Использование дополнительной информации о гладкости поля концентрации позволило изменить пространственную структуру найденного начального поля C_0 и улучшило согласованность с известным распределением концентрации. Проведенные расчеты были реализованы на временном интервале 45 суток. Для понимания того, как работают дополнительные члены (8) в случае когда измерения существуют не во всех узлах расчетной сетки уменьшим интервал времени до 4.5 суток.

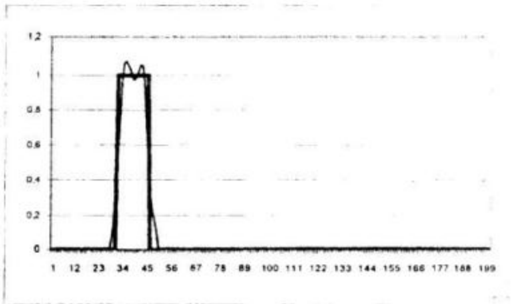


Р и с. 2. Начальное поле и восстановленное поле

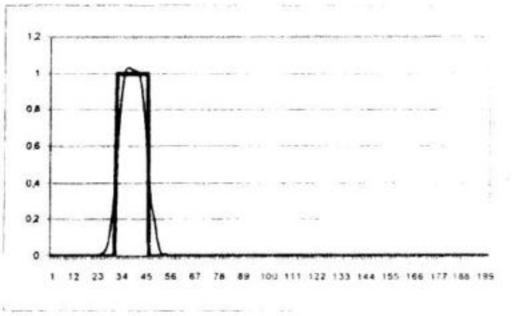


Р и с. 3. Начальное поле и восстановленное поле

На большом интервале времени вследствие работы схемной вязкости и модельной турбулентной диффузии наблюдаются удовлетворительные результаты при минимизации функционала качества прогноза (2). Восстановленное начальное поле, представленное на рис. 4, получено в результате работы алгоритма, в котором не используются дополнительные члены в функционале. На рис. 5 показано поле C_0, полученное при минимизации (8). Коэффициенты α, β в данном расчете имели значения $5 \cdot 10^{10}$ и $1.75 \cdot 10^{21}$ соответственно. Вопрос о выборе данных коэффициентов подлежит дополнительному исследованию, так как от их значений зависит не только гладкость получаемого решения, но и сходимость итерационного процесса. Большие значения коэффициентов α, β могут приводить к расхождению итерационного процесса. В нашем случае, во всех расчетах хорошо определяется местоположение начального пятна загрязнения, в котором сохраняется суммарная концентрация примеси.



Р и с. 4. Начальное поле и восстановленное поле



Р и с. 5. Начальное и восстановленное поле

Показано, что вариационный алгоритм идентификации начальных данных дает возможность получать начальное распределение поля концентрации согласованное с моделью и данными измерений. Найденное поле, с учетом априорной информации, может обладать заданными гладкостными характеристиками. Интегральные характеристики искомого начального поля лучше восстанавливаются с учетом информации о положительности значений поля концентрации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Пененко В.В.* Методы численного моделирования атмосферных процессов. Л.: Гидрометеоиздат, 1981, – 350 с.
2. *Тихонов А.Н. Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач.- М.: Наука, 1986, – 142 с.