

ВЛИЯНИЕ ВЫСОТЫ БОКОВЫХ СТЕНОК МОРСКОГО БАССЕЙНА НА ХАРАКТЕРИСТИКИ ВЫНУЖДЕННЫХ ВОЛН

В.А. Галактионов

Морской гидрофизический институт
НАН Украины
г. Севастополь, ул. Капитанская, 2
E-mail: otw@alpha.mhi.iuf.net

В работе методом математического моделирования изучаются вынужденные волны в морском бассейне переменной глубины с вертикальными боковыми стенками. Анализируется влияние высоты боковых стенок на скорость течений и амплитуды волн, возникающих под действием периодических по времени атмосферных возмущений различных периодов.

Введение. В данной работе с использованием численной модели, получено решение задачи о генерации длинных волн периодическими по времени изменениями атмосферного давления в бассейне переменной глубины. Исследованы величины отклонения уровня и скоростей течений в зависимости от частоты возмущающих давлений и геометрии бассейна. Аналогичные задачи о свободных колебаниях жидкости в бассейне с параболическим профилем дна рассмотрены в работах [1 – 3].

Рассматриваемый бассейн приведен на рис. 1.

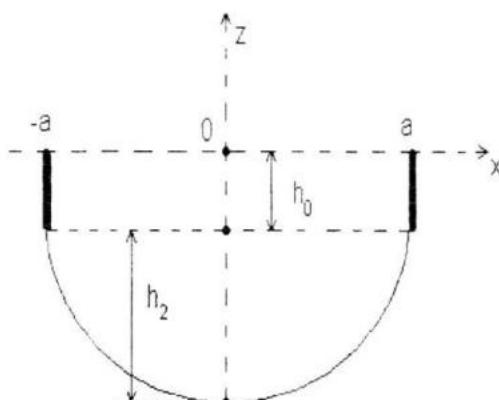


Рис. 1. Бассейн с параболическим профилем дна и вертикальными боковыми стенками

Метод исследования. В качестве исходных принимаются линейные уравнения движения однородной невязкой жидкости в приближении теории длинных волн

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_1}{\partial x}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\frac{\partial [uh(x)]}{\partial x}, \quad (2)$$

где $u(x, t)$ – скорость движения жидкости; $\zeta(x, t)$ – профиль свободной поверхности; $h(x)$ – глубина бассейна; g – ускорение свободного падения; $p_1(x, t)$ – возмущающее давление.

На боковых стенах бассейна принимается условие непротекания

$$u(-a, t) = 0, u(a, t) = 0. \quad (3)$$

Рассмотрим бассейн (рис. 1), глубина которого меняется по закону:

$$h(x) = h_0 + h_1(x), \quad (4)$$

$$h_1(x) = h_2(1 - \frac{x^2}{a^2}), \quad (5)$$

где h_2 – максимальная глубина переменной части; h_0 – высота его боковых стенок; $2a$ – длина бассейна.

Пусть $p_1(x, t)$ – периодическое по времени возмущение атмосферного давления

$$p_1(x, t) = p_2(x) \cos \sigma t. \quad (6)$$

Для решения уравнений (1) и (2) представим u и ζ в виде периодических по времени функций:

$$u(x, t) = u_1(x) \sin \sigma t, \quad (7)$$

$$\zeta(x, t) = \zeta_1(x) \cos \sigma t. \quad (8)$$

Подставляя (6) – (8) в уравнения (1) и (2), получаем:

$$\sigma u_1(x) = -g \frac{d\zeta_1}{dx} - \frac{1}{\rho} \frac{dp_2}{dx}. \quad (9)$$

$$\sigma \zeta_1(x) = \frac{d[u_1 h]}{dx}. \quad (10)$$

Дифференцируя уравнение (10) по x и подставляя $d\zeta_1(x)/dx$ из уравнения (9), находим для определения u_1 неоднородное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка

$$[h_0 + h_1(x)] \frac{d^2 u_1}{dx^2} + 2 \frac{du_1}{dx} \frac{dh_1}{dx} = -\frac{\sigma}{\rho g} \frac{dp_2}{dx}. \quad (11)$$

При этом $u_1(x)$ должна удовлетворять в силу (3) двум граничным условиям:

$$u_1(-a) = 0, \quad u_1(a) = 0. \quad (12)$$

Общее решение уравнения (11) имеет вид

$$A_1 u_{11} + A_2 u_{12} + u_{13} = U_1, \quad (13)$$

где A_1, A_2 – произвольные постоянные, они служат для удовлетворения граничных условий (12); u_{11}, u_{12} – два фундаментальных решения однородного уравнения (11); u_{13} – частное решение неоднородного уравнения (11).

Для решения обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка (11) используем метод Рунге–Кутта четвертого порядка точности. Примем начальные условия:

$$\begin{aligned} u_{11}(-a) &= 1, \quad u'_{11}(-a) = 0, \\ u_{12}(-a) &= 0, \quad u'_{12}(-a) = 1, \\ u_{13}(-a) &= 1, \quad u'_{13}(-a) = 1. \end{aligned} \quad (14)$$

Определяя численно функции u_{11}, u_{12} и u_{13} , удовлетворяя условиям (14) и выполняя затем условия (12), получаем

$$A_1 = -1, \quad A_2 = -1.$$

Представим $p_2(x)$ в виде линейной функции:

$$p_2(x) = \frac{1}{2a}(x + a)\bar{p}_2. \quad (15)$$

Численные эксперименты реализованы для бассейна, длина которого 400 км, глубина h_2 равна 12 м, давление \bar{p}_2 равно 10 Па. Высота стенки будет варьироваться. Частоту волны возьмем резонансную для первой моды, которая была найдена аналитически [2] для такого же бассейна, без боковых стенок:

$$\sigma = \frac{\sqrt{2gh_2}}{a}, \quad (16)$$

$$\tau = \frac{2\pi a}{\sqrt{2gh_2}}.$$

В табл. 1. представлены результаты численных экспериментов.

Таблица 1
Максимальные и минимальные значения амплитуд колебаний скоростей и свободной поверхности жидкости для пяти значений τ и $h_0 = 4$

$\tau, \text{ч}$	$ U_{\max} , \text{м/с}$	$\zeta_{\min}, \text{м}$ при $x,$ равном -145280 м	$\zeta_{\max}, \text{м}$ при $x,$ равном 145400 м
22	0,11365	-0,5515	0,58225
27,5	0,09387	-0,4553	0,4639
55,1	0,05866	-0,3225м	0,39175
110,7	0,02687	-0,1608м	0,2218
221,5	0,01978	-0,1261	0,1623

В табл. 1 представлены максимальные значения скорости ($|U_{\max}|$), максимальные (ζ_{\max}) и минимальные (ζ_{\min}) амплитуды колебаний свободной поверхности жидкости для пяти значений периода τ и $h_0 = 4$ м. Анализируя представленные данные, видим, что с увеличением периода убывает скорость частиц жидкости и амплитуда колебания свободной поверхности. Сравнивая значения скоростей при $\tau = 22$ ч и $\tau = 221,5$ ч, видим, что максимальное значение скорости уменьшается в 5,5 раз, а амплитуда колебания свободной поверхности уменьшается в 3,6 раз.

В табл. 2 представлены результаты численных экспериментов.

Таблица 2
Максимальные и минимальные значения амплитуд колебаний скоростей и свободной поверхности жидкости для пяти значений τ и $h_0 = 1$

$\tau, \text{ч}$	$ U_{\max} , \text{м/с}$	$\zeta_{\min}, \text{м}$ при $x,$ равном -145280 м	$\zeta_{\max}, \text{м}$ при $x,$ равном 145400 м
22	0,12984	-0,6059	0,641
27,5	0,10347	-0,4938	0,506
55,1	0,06936	-0,3814	0,421
110,7	0,02968	-0,1736	0,201
221,5	0,02134	-0,1491	0,161

Анализируя представленные данные, в табл. 2 видим, что с увеличением значения периода убывает скорость частиц жидкости и амплитуда колебания свободной поверхности. Сравнивая значения скоростей при $\tau = 22$ ч и $\tau = 221,5$ ч, видим, что максимальное значение скорости уменьшается в 6,5 раз, а амплитуда колебания свободной поверхности уменьшается в 4 раза.

В табл. 3 представлены результаты численных экспериментов.

Таблица 3
Максимальные и минимальные значения амплитуд колебаний скоростей и свободной поверхности жидкости для пяти значений τ и $h_0 = 1$

$\tau, \text{ч}$	$ U_{\max} , \text{м/с}$	$\zeta_{\min}, \text{м}$ при $x,$ равном -145280 м	$\zeta_{\max}, \text{м}$ при $x,$ равном 145400 м
22	0,14345	-0,7211	0,8012
27,5	0,12785	-0,5232	0,5642
55,1	0,08154	-0,4314	0,4624
110,7	0,04153	-0,2236	0,2334
221,5	0,03467	-0,1823	0,2321

В табл. 3 представлены максимальные значения скорости ($|U_{\max}|$), макси-

мальные (ζ_{\max}) и минимальные (ζ_{\min}) амплитуды колебания свободной поверхности для пяти значений периодов τ и $h_0 = 1$ м. Анализируя представленные данные, видим, что с увеличением значения периода убывает скорость частиц жидкости и амплитуда колебаний свободной поверхности. Сравнивая значения скоростей при $\tau = 22$ ч и $\tau = 221,5$ ч, видим, что максимальное значение скорости уменьшается в 4,7 раза, а амплитуда колебания свободной поверхности уменьшается в 3,5 раза.

В табл. 4 представлены результаты численных экспериментов.

Таблица 4
Максимальные и минимальные значения амплитуд колебаний скоростей и свободной поверхности жидкости для пяти значений τ и $h_0 = 0,5$

$\tau, \text{ч}$	$ U_{\max} , \text{м/с}$	$\zeta_{\min}, \text{м}$ при $x,$ равном -145280 м	$\zeta_{\max}, \text{м}$ при $x,$ равном 145400 м
22	0,17132	-0,8314	0,847
27,5	0,14150	-0,6111	0,684
55,1	0,08842	-0,4812	0,587
110,7	0,04950	-0,2736	0,301
221,5	0,03873	-0,2326	0,263

В табл. 4 представлены максимальные значения скорости ($|U_{\max}|$), максимальные (ζ_{\max}) и минимальные (ζ_{\min}) амплитуды колебания свободной поверхности для пяти значений периодов τ . Анализируя представленные данные, видим, что с увеличением значения периода убывает скорость частиц жидкости и амплитуда колебания жидкости. Сравнивая значения скоростей при $\tau = 22$ ч и $\tau = 221,5$ ч, видно, что максимальное значение скорости уменьшается в 4,25 раза, а амплитуда колебания свободной поверхности уменьшается в 3,3 раза.

На рис. 2 рассмотрим изменение скорости частиц жидкости.

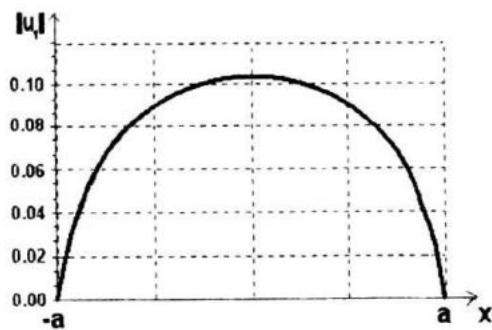


Рис. 2. Изменение скорости жидкости при $\tau = 22$ ч и $h_0 = 4$ м

На рис.2. мы видим, что максимальные значения скоростей достигаются в середине бассейна, $|U_{\max}| = 0,11365$ м/с.

На рис. 3 рассмотрим изменение амплитуды волн.

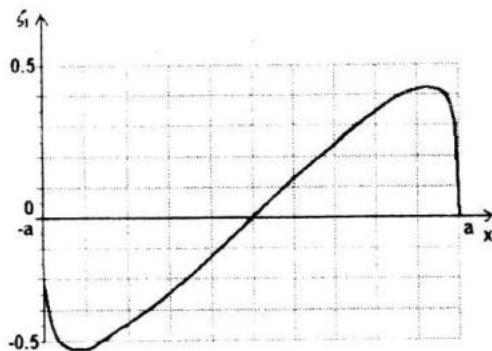


Рис. 3. Изменение амплитуды волн на свободной поверхности при $\tau = 22$ ч и $h_0 = 4$ м

На рис.3 мы видим, что максимальная амплитуда колебания свободной поверхности достигается при $x = 145400$ м, а минимум достигается при $x = -145280$ м.

С увеличением высоты стенки бассейна уменьшается скорость и амплитуда колебания свободной поверхности. При стенке высотой равной 4 м:

$$|U_{\max}| = 0,11365 \text{ м/с}, \zeta_{\max} = 0,58225 \text{ м};$$

при стенке высотой равной 0,5 м:

$$|U_{\max}| = 0,17132 \text{ м/с}, \zeta_{\max} = 0,8472 \text{ м}.$$

То есть скорость при высоте стенки в 0,5 м больше в 1,6 раз, чем скорость при высоте стенки в 4 м. А амплитуда волны на свободной поверхности при высоте стенки в 0,5 м больше в 1,5 раза, чем амплитуда волны при высоте стенки в 4 м.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сретенский Л.Н. Теория волновых движений жидкости. – М. – Л.: ЭНТЦ, 1935. – 303 с.
2. Черкасов Л.В. Основы динамики несжимаемой жидкости. – Киев: Наук. Думка, 1984. – 167 с.
3. Черкасов Л.В., Иванов В.А., Хартиев С.М. Введение в гидродинамику и теорию волн. – СПб.: Гидрометеоиздат. – 1992. – 264 с.