ТРЕХМЕРНАЯ МОДЕЛЬ ДИФФУЗИИ ПРИМЕСИ В ПОЛЕ ВНУТРЕННИХ ВОЛН

Е.В.Иванча, Л.В.Черкесов
Морской гидрофизический институт
НАН Украины
г. Севастополь, ул. Капитанская, 2
E-mail: oaoi@alpha.mhi.iuf.net

Процесс распространения загрязняющих веществ в океане происходит за счет их переноса водными массами и диффузии, обусловленной пульсациями жидкости. Если наблюдать за пятном примеси, то, во-первых, замечается увлечение его волновым потоком и, во-вторых, постепенное увеличение размеров пятна вследствие мелкомасштабной турбулентности. В результате облако примеси может принять весьма причудливую форму, а иногда распадается на изолированные образования, переносимые на большие расстояния от источника примеси. Поэтому в теории распространения загрязнений, наряду с диффузией, придается большое значение адвекции примеси в результате действия разнообразных факторов.

Данная работа продолжает многочисленные исследования, посвященные анализу и поиску закономерностей воздействия волновых возмущений жидкости на диффундирующее пятно примеси. Вероятно, одним из первых влияние градиента (сдвига) скорости на диффузию аналитически исследовал Тейлор [1] для случая переноса примеси в трубах. Применительно к океанической диффузии идею "сдвигового эффекта" впервые использовал Боуден [2]. Под "сдвиговым эффектом" он понимал совместное действие вертикальной диффузии и вертикального градиента скорости, в результате чего происходит быстрое вытягивание пятна примеси вдоль течения. При определенных видах функций, задающих осредненные составляющие вектора скорости, уравнение турбулентной диффузии может быть решено аналитически [3-5]. Однако учет многих факторов, влияющих на процесс распространения примеси, приводит к необходимости численного решения уравнения диффузии (см., например, [6-10]). В настоящей работе с помощью трехмерной модели переноса-диффузии изучается влияние приливной бароклинной волны на распространение примеси в непрерывно стратифицированном море.

1. Математическая постановка задачи. Пусть φ (x,y,z,t) – интенсивность субстанции, распространяющейся в жидкости. Решение задачи определим в цилиндрической области G с поверхностью S, состоящей из боковой поверхности Σ, нижнего основания Σ_{-H} (при $z = -H$) и верхнего основания Σ_0 (при $z = 0$), ось z направлена вертикально вверх, плоскость $z = 0$ совпадает с невозмущенной свободной поверхностью. Вектор скорости частиц жидкости как функция x, y, z, t выглядит следующим образом:

$\vec{U} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$ (где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – единичные векторы в направлении осей x, y, z соответственно). Так как предполагается, что диффундирующая примесь не оказывает влияния на динамику вод, то решается уравнение распространения субстанции [8] с использованием полученных в динамической задаче значений компонентов скорости.

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + div\,\vec{U}\varphi = \mu\Delta\varphi + \nu\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} \quad (1).$$

Здесь $\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}$; $\mu \geq 0$, $\nu \geq 0$ - соответственно горизонтальный и вертикальный коэффициенты турбулентной диффузии, они определяются экспериментально. Кроме уравнения (1), необходимо выполнение закона со-

хранения массы, выраженного уравнением неразрывности:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0\,, \qquad (2)$$

задание начальных данных:

$$\varphi=\varphi_0 \quad \text{при } t=0 \qquad (3)$$

и граничных условий:

$$\varphi=\varphi_S \quad \text{на } \Sigma \qquad (4)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z}=0 \quad \text{на } \Sigma_H \qquad (5)$$

Итак, математическая постановка задачи переноса-диффузии примеси выглядит следующим образом: уравнение (1), уравнение неразрывности (2), начальное (3) и граничные (4,5) условия.

2. Метод решения. Решение проводилось методом расщепления по физическим процессам [10] с последующим покомпонентным расщеплением. Вообще говоря, поставленная задача представляет собой математическое описание совместного действия двух физических процессов, один из которых является процессом переноса субстанции с ее сохранением вдоль траекторий частиц жидкости и представляет собой задачу:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}+div\ \vec{U}\,\varphi=0\,,$$

$$\varphi=\varphi_0 \quad \text{при } t=0\,, \qquad (6)$$

$$\varphi=\varphi_S \quad \text{на } S.$$

Второй физический процесс связан с диффузией и сводится к решению уравнения :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}=\mu\,\Delta\varphi+\nu\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}, \qquad (7)$$

со следующими условиями:

$$\varphi=\varphi_0 \quad \text{при } t=0\,,$$

$$\varphi=\varphi_S \quad \text{на } \Sigma\,, \qquad (8)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z}=0 \quad \text{на } \Sigma_H\,.$$

В [10] показано, что последовательное решение задач (6) и (7) на одном и том же малом интервале времени τ дает решение исходной задачи при соответствующих условиях гладкости.

Далее задачи (6), (7) сводятся к системе одномерных разностных уравнений, решаемых методом прогонки. Применение схемы Кранка-Николсона обеспечивает второй порядок аппроксимации по времени, а по пространственным координатам выдерживается второй порядок точности.

3. Численный эксперимент. С помощью представленной модели были проведены численные эксперименты по исследованию трансформации облака пассивной примеси в поле приливной бароклинной волны первой моды. Составляющие волновой скорости определялись следующим образом [11]:

$$u(x,z,t)=\frac{A\,\sigma\,\pi}{m\,H}\cos\left[\frac{\pi}{H}(z+H)\right]\times$$

$$\times\cos(m\,x-\sigma t),$$

$$v(x,z,t)=\frac{A\,f\,\pi}{m\,H}\cos\left[\frac{\pi}{H}(z+H)\right]\times$$

$$\times\sin(m\,x-\sigma t),$$

$$w(x,z,t)=A\,\sigma\sin\left[\frac{\pi}{H}(z+H)\right]\times$$

$$\times\sin(m\,x-\sigma t).$$

Здесь

$$m=(\pi/H)\sqrt{\left(\sigma^2-f^2\right)/\left(gk-\sigma^2\right)},$$

$\sigma = 2\pi$ / T, T – период приливной волны, k – параметр стратификации (k = 1.5×10^{-5}), $f = 2\omega\sin\varphi$ – параметр Кориолиса, φ – географическая широта, H – глубина бассейна, A – амплитуда прилива.

При расчетах значения параметров были следующими: $\Delta x = \Delta y = 100$ м, $\Delta z = 10$ м, T = 12.4 ч, τ = T/50 (τ – шаг по времени), φ = 25 ° с.ш., A = 20 м, H = 200 м. Распределение примеси в

начальный момент времени задавалось в виде

$$\varphi(x, y, z, 0) = \begin{cases} 1 - r & при \quad r \le 1, \\ 0 & при \quad r > 1, \end{cases}$$

где

$$r = \left(\frac{x - x_0}{r_x}\right)^2 + \left(\frac{y - y_0}{r_y}\right)^2 + \left(\frac{z - z_0}{r_z}\right)^2$$

r_x, r_y, r_z - полуоси соответствующих центральных сечений, (x_0, y_0, z_0) - координаты точки максимума концентрации при $t = 0$, $r_x = r_y = 4\Delta x$, $r_z = 4\Delta z$. Коэффициенты турбулентной диффузии принимались равными $\mu = 1$ м^2/с, $\nu = 10^{-3}$ м^2/с [8].

Поставим своей целью оценить влияние волновых движений жидкости на диффузию облака пассивной субстанции при его верхнем начальном расположении в поле внутренних волн ($x_0 = K\Delta x/2$, $y_0 = M\Delta y/2$, $z_0 = -L\Delta z/3$, здесь N, M, L - размерность расчетной сетки). Такой выбор начальных координат точки максимума концентрации определяется структурой поля скорости первой моды внутренней волны (пятно располагается в зоне более интенсивного воздействия волновых скоростей).

3.1 Одна из основных и наиболее информативных характеристик динамики облака примеси - изменение со временем максимума концентрации:

$$\Phi(t) = \frac{\max\limits_{x,y,z} \varphi(x, y, z, t)}{\max\limits_{x,y,z} \varphi(x, y, z, 0)},$$

$$\max_{x,y,z} \varphi(x, y, z, 0) = 1.$$

Из анализа результатов численных расчетов следует, что и при отсутствии волновых скоростей (так называемая "чистая" диффузия), и при совместном действии турбулентной диффузии и бароклинного прилива функции $\Phi(t)$ свойственно резкое убывание в течение первого периода (табл. 1). При $t = T$ $\Phi(T) = 0.35$, что составляет 35% от $\Phi(0)$ для "чистой" диффузии и $\Phi = 0.30$ (30%) – в случае учета воздействия внутренней волны. Следовательно, наличие волн приводит к ускорению процесса падения максимума концентрации. В дальнейшем скорость падения $\Phi(t)$ уменьшается и функция плавно убывает, достигая выбранного предельного значения $\Phi(0)/10=0.1$ за время, равное 3.4T, при отсутствии внутренней волны, 2.1T - при ее воздействии на диффундирующее пятно примеси.

3.2 Следующая важная характеристика трансформации трехмерного пятна примеси - изменение со временем его объема $V(t)$. Под объемом пятна подразумевается объем фигуры, ограниченной изоповерхностью, на ко-

Таблица 1

Изменение со временем функции $\Phi(t)$

(T=12.4 ч. - период волны, случай 1 - "чистая диффузия", 2 - случай воздействия бароклинного прилива)

t (время)	0.2T	0.4T	0.6T	0.8T	T	1.2T	1.4T	1.6T	1.8T	2T
$\Phi(t)$ (случай 1)	0.80	0.63	0.51	0.42	0.35	0.29	0.25	0.23	0.20	0.18
$\Phi(t)$ (случай 2)	0.80	0.59	0.48	0.39	0.30	0.22	0.20	0.17	0.15	0.12

Таблица 2

Изменение со временем функции $\tilde{V}(t)$

(T=12.4 ч. - период волны, случай 1 - "чистая диффузия", 2 - случай воздействия бароклинного прилива)

t (время)	0.2T	0.4T	0.6T	0.8T	T	1.2T	1.4T	1.6T	1.8T	2T
$\tilde{V}(t)$ (случай 1)	1.36	1.54	1.65	1.70	1.68	1.47	1.32	1.25	1.10	0.85
$\tilde{V}(t)$ (случай 2)	1.40	1.62	1.72	1.40	1.21	1.01	0.88	0.73	0.15	0.07

торой концентрация примеси равна 0.1. Рассмотрим функцию $V(t)$, нормированную на величину объема пятна в начальный момент времени $V(0)$ ($V(0) = 1.86 \times 10^7$ м^3). Обозначим $\tilde{V}(t) = V(t) / V(0)$. Как оказалось, за первый период объем пятна возрастает более чем в полтора раза по сравнению с $V(0)$ (табл. 2). При этом воздействие прилива приводит к ускоренному росту объема. Так, при $t = 0.5T$ $\tilde{V}(0.5T) = 1.54$ для "чистой диффузии", $\tilde{V}(0.5T) = 1.69$ при наличии внутренней волны, т.е. количественные различия достигают 9%. Далее, в каждом из случаев функция принимает свое максимальное значение: при отсутствии волн $\max\tilde{V} = \tilde{V}(0.7T) = 1.70$, при их наличии $\max\tilde{V} = \tilde{V}(0.6T) = 1.72$. Следовательно, воздействие рассматриваемой волны незначительно увеличивает максимально возможный объем пятна примеси. На стадии убывания после первого периода количественные различия растут и достигают 70% ($\tilde{V}(1.6T) = 0.73$ - в случае влияния бароклинного прилива, $\tilde{V}(1.6T) = 1.25$ - в случае его отсутствия). Функция $\tilde{V}(t)$ достигает нулевого значения за время, равное 3.4T в случае отсутствия волновых скоростей и 2.1T - в случае действия на диффузию облака субстанции внутренней приливной волны первой моды.

3.3 Учет воздействия приливной волны приводит к тому, что диффундирующее облако пассивной субстанции перемещается как единое целое, по сравнению со случаем отсутствия волн. Поэтому область максимальной концентрации примеси, находящаяся в начальный момент времени в окрестности центра пятна, там и остается, перемещаясь вместе с пятном. И значит третьей основной характеристикой процесса распространения примеси является смещение со временем точки максимума концентрации R. Заметим, что при отсутствии волн эта точка остается неподвижной. Рассмотрим горизонтальные смещения точки максимальной концентрации как функции времени: R_x (смещение вдоль оси x), R_y (смещение вдоль оси y). Что касается вертикальных смещений, то они не превосходят $2\Delta z$. Как оказалось, изменения со временем R_x и R_y носят колебательный характер. Для данной фазы волны смещения вдоль оси x достигают 2.4×10^3 м, смещения вдоль оси y – 600 м. Рассматриваемая характеристика важна тем, что позволяет оценить размеры области возможного загрязнения. При отсутствии волнения размеры этой области определяются удвоенными наибольшими величинами полуосей. В исследуемом случае они составили 1000 м × 1000 м × 80 м с точностью до величины шага в соответствующем направлении. Воздействие же волн значительно увеличивает область возможного загрязнения за счет смещения облака примеси. Чтобы узнать,

например, какова протяженность области загрязнения вдоль оси x, нужно к наибольшему смещению точки максимума концентрации в направлении этой оси прибавить величину соответствующей полуоси пятна в момент времени, отвечающий максимальному смещению и величину этой же полуоси в начальный момент времени. Подсчитанные таким образом размеры области наличия примеси равны $3.4 \cdot 10^3$ м $\times 1.6 \cdot 10^3$ м $\times$ 90 м (с точностью до соответствующего шага сетки). Учитывая возможность различных фаз приливной волны, горизонтальные размеры этой области следует удвоить.

Итак, используемая модель позволяет в деталях проанализировать процесс диффузии трехмерного пятна примеси, а также его трансформацию и перемещение под воздействием бароклинных приливных волн. Как следует из анализа численных расчетов, характеристики поля пассивной примеси при учете действия прилива имеют особенности по сравнению со случаем "чистой" диффузии. Так, наличие волн приводит к более быстрому уменьшению максимума концентрации (различие достигает 5%). Отличия в поведении такой характеристики, как изменение со временем объема пятна примеси, более существенны - до 70 % (при сравнении ситуаций отсутствия волн и их воздействия). Дополнительное действие волнения на диффундирующее облако субстанции приводит к значительному горизонтальному смещению облака от его начального положения. В связи с этим существенно (в 6.8 раза вдоль оси x, в 3.2 раза вдоль оси y) увеличивается область возможного загрязнения морской среды.

ЛИТЕРАТУРА

1. Taylor G.I. Dispersion of soluble matter in solvent flowing slowly through a tube // Proc. Roy. Soc. London.- 1953.- Ser.A. - 219, № 1137.- P.186-203.

2. Bowden K.F. Horizontal mixing in the sea due a shearing current // J. Fluid Mech.- 1965.- 21, № 2.- P. 83-95.

3. Новиков Е.А. О турбулентной диффузии в потоке с поперечным градиентом скорости // Прикл. мат. и мех.- 1958.- 22, вып. 3.- С. 576-579.

4. Okubo A.A. The effect of shear in an oscillatory current on horizontal diffusion from an instantaneous source // Oceanology and Limnology.- 1967.- 1, № 3.- P. 194-204.

5. Горошко В.И. Турбулентная диффузия примеси в прибрежной зоне моря // Исследование изменчивости гидрофизических полей в океане.- М.: Наука, 1974.- С.145-150.

6. Кочергин В.П., Боковиков А.Г. Трехмерная численная модель распространения примеси в прибрежной зоне глубокого водоема // Изв. АН СССР. ФАО.- 1980.- 16, № 7.- С. 729-734.

7. Шкудова Г.Я. Распространение и рассеивание загрязняющих веществ в море // Тр. ГОИН.- 1974.- Вып. 121.- С. 96-106.

8. Озмидов Р.В. Диффузия примеси в океане. - Л.: Гидрометеоиздат, 1986. - 280 с.

9. Иванча Е.В., Фомин В.В., Черкесов Л.В. Влияние приливных волн на диффузию примеси // Морской гидрофизический журнал.- 1994.- № 4.- С. 3-9.

10. Марчук Г.И. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды.- М.: Наука, 1982.- 320 с.

11. Черкесов Л.В., Иванов В.А., Хартиев Л.М. Введение в гидродинамику и теорию волн. - Санкт-Петербург: Гидрометеоиздат, 1992.- 264 с.