

ВЫНУЖДЕННЫЕ ВОЛНЫ В БАССЕЙНЕ ПОСТОЯННОЙ ГЛУБИНЫ В НЕПРЕРЫВНО СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ

П. В. Рублёв, Л. В. Черкесов
Морской гидрофизический институт
НАН Украины
г. Севастополь, ул. Капитанская, 2
E-mail: oaoi@alpha.mhi.iuf.net

1. Исследуем вынужденные колебания непрерывно стратифицированной жидкости в бассейне постоянной глубины (рис. 1).

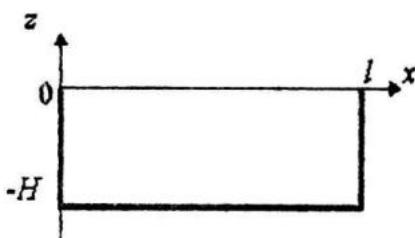


Рис. 1. Схема бассейна

Колебания вызываются изменениями давлений на свободной поверхности. Учитывается действие силы Кориолиса, волны предполагаются длинными, жидкость невязкой, колебания малыми, возмущающие давления не зависящими от y . При этих условиях движение жидкости описывается уравнениями [1]

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - fv &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_1}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + fu &= 0, \\ \frac{\partial w}{\partial t} &= -g \frac{\rho_1}{\rho_0} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_1}{\partial z}, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} + w \frac{\partial \rho_0}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

с граничными условиями:

$$u = 0 \text{ при } x = 0, u = 0 \text{ при } x = l, \quad (2)$$

$$\left(\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_1}{\partial t} - w \right)_{z=0} = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_0}{\partial t}, \quad (3)$$

$$(w)_{z=-H} = 0.$$

Здесь u, v, w - проекции скорости на оси x, y, z соответственно, p_0 - давление на свободной поверхности, p_1 - динамическая составляющая давления, $\rho_0(z)$ - плотность жидкости в невозмущённом состоянии, $\rho_0^0 = \rho_0(0)$, ρ_1 - динамическая составляющая плотности жидкости, f - параметр Кориолиса, g - ускорение свободного падения.

Пусть

$$p_0(x, t) = \text{const} + p_0 \cos \delta_j x \sin \sigma t, \quad (4)$$

$$\text{где } \delta_j = \pi j / l, \quad j = 1, 2, 3, \dots$$

Будем искать решение системы уравнений (1) в виде

$$\begin{aligned} u &= \bar{u}(z) \sin \delta_j x \cos \sigma t, \\ v &= \bar{v}(z) \sin \delta_j x \sin \sigma t, \\ w &= \bar{w}(z) \cos \delta_j x \cos \sigma t, \\ \zeta &= \bar{\zeta}(z) \cos \delta_j x \sin \sigma t, \\ \rho_1 &= \bar{\rho}_1(z) \cos \delta_j x \sin \sigma t, \\ p_1 &= \bar{p}_1(z) \cos \delta_j x \sin \sigma t. \end{aligned} \quad (5)$$

При этом $u(x, z, t)$ удовлетворяет граничным условиям (2), а $\zeta(x, z, t)$ — амплитудная характеристика внутренних волн, определяемая из условия $\partial \zeta / \partial t = w$.

Подставляя (4), (5) в (1) - (3), имеем систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \sigma u + fv &= -\frac{1}{\rho_0} \delta_j p_1, \quad \sigma v + fu = 0, \\ \sigma w &= g \frac{\rho_1}{\rho_0} + \frac{1}{\rho_0} \frac{dp_1}{dz}, \\ \sigma p_1 + w \frac{d\rho_0}{dz} &= 0, \quad \delta_j u + \frac{dw}{dz} = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

с граничными условиями:

$$\left(\frac{(\sigma^2 - f^2)\rho_0}{g\delta_j^2\rho^0} \frac{dw}{dz} - w \right)_{z=0} = \frac{\sigma p_0}{g\rho^0}, \quad (7)$$

$$(w)_{z=-H} = 0. \quad (8)$$

Из системы (6) для определения w получаем:

$$\frac{d^2w}{dz^2} - \frac{N^2}{g} \frac{dw}{dz} - \delta_j^2 \frac{\sigma^2 - N^2}{\sigma^2 - f^2} w = 0. \quad (9)$$

Здесь и далее чёрточки над u , v , w , ζ , p_1 , p_1 для простоты письма опускаем.

При этом u , v , ζ , p_1 , p_1 определяются через w следующим образом:

$$u = -\frac{1}{\delta_j} \frac{dw}{dz}, \quad v = -\frac{f}{\sigma} u,$$

$$\zeta = \frac{w}{\sigma}, \quad p_1 = -\frac{w}{\sigma} \frac{dp_0}{dz}, \quad (10)$$

$$p_1 = (\sigma^2 - f^2) \frac{\rho_0}{\sigma \delta_j^2} \frac{dw}{dz},$$

где N - частота Вайсяля-Брента.

В приближении Буссинеска уравнение (9) принимает вид:

$$\frac{d^2w}{dz^2} + b^2 w = 0 \quad \left(b = \delta_j \sqrt{\frac{N^2 - \sigma^2}{\sigma^2 - f^2}} \right). \quad (11)$$

Таким образом, исходная задача (1) - (3) сведена к решению уравнения (11) с краевыми условиями (7), (8).

2. Пусть

$$\rho_0 = \rho^0 \exp(-\gamma z), \quad \gamma > 0. \quad (12)$$

Тогда частота Вайсяля-Брента постоянна ($N = \sqrt{gy}$). Решение уравнения (11), удовлетворяющее граничному условию (8), для $f < \sigma < N$ имеет вид

$$w = A \sin b(z + H). \quad (13)$$

Удовлетворяя граничному условию (7), находим

$$A = \sigma p_0 \delta_j^2 / \rho^0 \Delta \quad (14)$$

при

$$\Delta = b(\sigma^2 - f^2) \cos bH - g\delta_j^2 \sin bH. \quad (15)$$

Как видно из (10), (13), максимальные значения функций $w(z)$, $u(z)$, $\zeta(z)$ выражаются так:

$$w_m = \begin{cases} |A \sin \psi|, & \psi < \pi/2 \\ |A|, & \psi \geq \pi/2 \end{cases}, \quad (16)$$

$$u_m = \frac{1}{\delta_j} |A| b, \quad \zeta_m = \frac{1}{\sigma} w_m,$$

где $\psi = bH$.

3. Проведём анализ для следующих значений исходных параметров:

$$l = 200 \text{ м}, \quad H = 65 \text{ м},$$

$$\gamma = 4,6 \cdot 10^{-5} \text{ м}^{-1} \quad (\tau_{BB} = 4 \text{ мин } 55 \text{ с}),$$

$$\rho^0 = 1000 \text{ кг/м}^3, \quad p_0 = 10 \text{ гПа},$$

$$\varphi = 55^\circ \text{ с. ш.} \quad (\tau_u = 14 \text{ ч } 36 \text{ мин } 33 \text{ с}),$$

$$\tau_{BB} \leq \tau < \tau_u. \quad (17)$$

Резонансные периоды τ_{ny} (периоды свободных колебаний) для $n = 0, 1, 2, \dots$ ($p_0 = 0$, условие (7)) находятся из уравнения $\Delta = 0$. Здесь индекс j относится к модам, зависящим от x (будем их называть горизонтальными модами), а индекс n относится к модам, зависящим от z (будем их называть вертикальными модами). В табл. 1 приведены величины τ_{ny} для четырёх значений n и трёх значений j для параметров (17). Отсюда видно, что с ростом n резонансные пе-

Таблица 1

Резонансные периоды (периоды свободных колебаний)

$n \backslash j$	1	2	3
0	4 ч 12 мин 43 с	2 ч 10 мин 29 с	1 ч 27 мин 32 с
1	14 ч 35 мин 6 с	14 ч 30 мин 45 с	14 ч 23 мин 39 с
2	14 ч 36 мин 11 с	14 ч 35 мин 6 с	14 ч 33 мин 16 с
3	14 ч 36 мин 24 с	14 ч 35 мин 54 с	14 ч 35 мин 6 с

риоды τ_{nj} возрастают, а с ростом j уменьшаются. Периоды нулевой вертикальной моды τ_{0j} соответствуют баротропным волнам (здесь $\psi < \pi/2$). Остальные резонансные периоды соответствуют бароклинным волнам (здесь $\psi > \pi/2$). Периоды свободных колебаний τ_{nj} ($n = 1, 2, 3$; $j = 1, 2, 3$) для граничного условия твёрдой крышки ($w = 0$ при $z = 0$) совпадают с периодами свободных колебаний для граничного условия (7) при $p_0 = 0$ с ошибкой, не превышающей 1 с. Отметим, что баротропная мода при выполнении условия твёрдой крышки отфильтровывается. Все периоды бароклинических свободных волн группируются вблизи τ_u в интервале от 14 ч 23 мин 38 с до 14 ч 36 мин 33 с для $j \leq 3$. В случае свободных бароклинических волн ($p_0 = 0$) $\psi > \pi n$ ($n = 1, 2, 3$). При этом самый близкий к поверхности узел функции w находится на глубине $z = -2$ см для $n = 1$ (а также -5 мм и -2 мм для $n = 2$ и 3 соответственно). Эта глубина слабо зависит от j : при изменении j от 1 до 3 ошибка не превышает 0,1 мм.

В табл. 2 для исходных данных (17) и $j = 1$ приведены максимальные значения функций u , w , ζ (u_m , w_m , ζ_m) и наибольшие глубины (z_m), на которых $w = w_m$, $\zeta = \zeta_m$. Здесь же приведены значения фазы w и ζ (формула (13)) на свободной поверхности (ψ).

Отсюда видно, что при $\tau = \tau_{B5}$ функция $\zeta_{yy} = 0$, а скорость u_m ($u_m = 1$

мм/с) минимальна в интервале $[\tau_{B5}; \tau_u]$. При изменении ψ от 0 до $\pi/2$ максимальные значения функций w и ζ достигаются на свободной поверхности ($z_m = 0$). При $\psi > \pi/2$ ($\tau > 14$ ч 30 мин 45 с) максимальные значения этих функций достигаются внутри жидкости ($z_m < 0$).

С ростом τ от τ_{B5} до 4 ч 3 мин 19 с ζ_m монотонно возрастает от нуля до 1,186 м, а u_m — от 1 мм/с до 50 см/с. При этом волновой процесс носит баротропный характер и $w(z)$ с высокой степенью точности является линейной функцией z , а $w(z) = \text{const}$. Начиная с $\tau = 4$ ч 22 мин 29 с, ζ_m монотонно убывает от 1,279 м до 0,103 м ($\tau = 13$ ч 55 мин 9 с). При этом u_m монотонно убывает от 50 см/с до 1,3 см/с. Далее с увеличением τ до 14 ч 35 мин 1 с происходит монотонное нарастание ζ_m от 0,103 м до 1,390 м, а u_m от 1,3 см/с до 50 см/с. В этом случае, начиная с $\tau = 14$ ч 30 мин 45 с ($\psi = \pi/2$), характер волнового процесса с ростом τ становится переходным от баротропного к бароклиническому и для $\tau > 14$ ч 35 мин волновой процесс оказывается существенно бароклиническим ($\zeta_m \geq 10(\zeta)_{z=0}$). Отметим, что при $\tau = 14$ ч 35 мин 1 с форма волны близка к первой бароклинической моде: $\zeta(-H) = 0$, а $\zeta(0)$ в 18,7 раз меньше максимального значения внутри жидкости.

Таблица 2

Зависимости функций u_m , w_m , ζ_m , z_m , Ψ от периода возмущающих давлений

τ	$u_m \cdot 10^2$, м/с	$w_m \cdot 10^3$, м/с	ζ_m , м	$-z_m$, м	Ψ
0 ч 4 мин 55 с	0,1	0,001	0,000	0,00	0,000
1 ч 2 мин 35 с	1,0	0,010	0,006	0,00	0,013
3 ч 29 мин 18 с	10,0	0,102	0,204	0,00	0,045
3 ч 57 мин 15 с	30,0	0,306	0,694	0,00	0,051
4 ч 3 мин 19 с	50,0	0,510	1,186	0,00	0,053
4 ч 22 мин 29 с	50,0	0,510	1,279	0,00	0,057
4 ч 29 мин 12 с	30,0	0,306	0,787	0,00	0,059
4 ч 37 мин 49 с	20,0	0,204	0,541	0,00	0,061
5 ч 5 мин 9 с	10,0	0,102	0,297	0,00	0,068
13 ч 55 мин 9 с	1,3	0,013	0,103	0,00	0,570
14 ч 34 мин 15 с	5,0	0,020	0,170	24,18	2,501
14 ч 34 мин 43 с	10,0	0,036	0,304	28,55	2,801
14 ч 34 мин 59 с	30,0	0,101	0,847	31,21	3,022
14 ч 35 мин 1 с	50,0	0,166	1,390	31,73	3,069
14 ч 35 мин 10 с	50,0	0,159	1,325	33,29	3,220
14 ч 35 мин 13 с	30,0	0,094	0,782	33,81	3,273
14 ч 35 мин 26 с	10,0	0,028	0,238	36,52	3,585
14 ч 35 мин 50 с	5,5	0,012	0,104	42,28	4,495
14 ч 36 мин 5 с	10,0	0,018	0,154	46,63	5,558
14 ч 36 мин 9 с	20,0	0,034	0,288	47,76	5,922
14 ч 36 мин 10 с	50,0	0,083	0,696	48,36	6,137

После резонанса τ_{11} функция ζ_m монотонно убывает от 1,325 м при $\tau = 14$ ч 35 мин 10 с до 0,104 м при $\tau = 14$ ч 35 мин 50 с, а u_m — от 50 см/с до 5,5 см/с. В этом случае максимум функции ζ достигается на всей большей глубине, а на свободной поверхности функция ζ монотонно возрастает и, начиная с $\tau = 14$ ч 35 мин 12 с (когда $(\zeta)_{z=0} > 0,1\zeta_m$) волна проявляет дуализм: она носит признаки как бароклинной, так и баротропной волны. С дальнейшим увеличением τ от 14 ч 35 мин 50 с до 14 ч 36 мин 10 с функции ζ_m и u_m монотонно возрастают от 0,104 м до 0,696 м и от 5,5 см/с до 50 см/с соответственно. При этом, когда $\tau = 14$ ч 35 мин 54 с ($\Psi = 3\pi/2$), максимальное значение функции ζ достигается не только в толще воды

($z_m = -43,33$ м), но и на свободной поверхности. При $\tau > 14$ ч 35 мин 54 с образуется второй максимум внутри жидкости, который с увеличением периода τ достигается на всей большей глубине, и $\zeta(0)$ монотонно убывает. Волновой процесс снова становится чисто бароклинным.

С ростом τ резонансные периоды группируются всё более тесно, и взаимовлияние резонансов растёт. Вследствие этого минимумы функции $u_m(\tau)$ с увеличением τ тоже увеличиваются.

ЛИТЕРАТУРА

- Черкесов Л. В., Иванов В. А., Хартиев С. М. Введение в гидродинамику и теорию волн. — С-Пб.: Гидрометеониздат, 1992. — 264с.