НЕКОТОРЫЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ АСПЕКТЫ ПОСТРОЕНИЯ ПРОГНОСТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ДИНАМИКИ ВОДОЕМОВ

С.В. Кочергин, В.С. Кочергин

Морской гидрофизический институт
НАН Украины
г. Севастополь, ул. Капитанская, 2

Рассматривается численная модель динамики водоемов, построенная с учетом наиболее точного выполнения интегрального соотношения. Для описания поведения решения в областях пограничных слоев применяются монотонные аппроксимации, позволяющие более корректно описывать поведение решения в них.

Запишем уравнение модели в следующем виде:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{v}\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}-l\mathrm{v}=\\
&=g\frac{\partial \xi}{\partial x}-\frac{g}{\bar\rho}\int_0^z\frac{\partial \rho}{\partial x}dz'+\frac{\partial}{\partial z}\nu\frac{\partial u}{\partial z}+A\Delta u\\
&\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial t}+u\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial x}+\mathrm{v}\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial y}+w\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial z}+lu=\\
&=g\frac{\partial \xi}{\partial y}-\frac{g}{\bar\rho}\int_0^z\frac{\partial \rho}{\partial y}dz'+\frac{\partial}{\partial z}\nu\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial z}+A\Delta \mathrm{v}\\
&\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0\\
&\frac{\partial \rho}{\partial t}+u\frac{\partial \rho}{\partial x}+\mathrm{v}\frac{\partial \rho}{\partial y}+w\frac{\partial \rho}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial z}\kappa\frac{\partial \rho}{\partial z}+\mu\Delta\rho
\end{aligned}\qquad(1)$$

с граничными

$$z=0:\quad \nu\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{\tau_{xz}}{\bar\rho},\ \nu\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial z}=-\frac{\tau_{yz}}{\bar\rho},\ w=0,\ \kappa\frac{\partial \rho}{\partial z}=\gamma$$

$$z=H:\ u=\mathrm{v}=w=0,$$

$$\left(\nabla\rho\cdot\vec N\right)=0,\ \vec N=\left\{\mu h_x,\mu h_y,\kappa h_z\right\}$$

и краевыми условиями

$$u=\mathrm{v}=0,\ \frac{\partial \rho}{\partial n}=0.$$

Начальные условия зададим следующим образом:

$$u_0=\mathrm{v}_0=0,\ \rho=\rho_0(x,y,z),\ \iint_D \xi(x,y)dxdy=0.$$

Из (1) можно получить интегральное соотношение:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\int_0^H dz\iint_D\frac{u^2+\mathrm{v}^2+\rho^2}{2}dxdy+\\
&+\int_0^H dz\iint_D\left\{\nu\left[\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial z}\right)^2\right]+\right.\\
&+A\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial y}\right)^2\right]+\\
&\left.+\kappa\left(\frac{\partial \rho}{\partial z}\right)^2+\mu\left[\left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \rho}{\partial y}\right)^2\right]\right\}dxdy=\\
&=\frac{g}{\bar\rho}\int_0^H dz\iint_D w\rho\,dxdy+\\
&+\frac{1}{\rho}\iint_D\left[u_0\tau_{xz}+\mathrm{v}_0\tau_{yz}-\rho_0\gamma\right]dxdy.
\end{aligned}\qquad(2)$$

Построим разностное представление уравнений, чтобы соотношение (2) удовлетворялось с максимальной точностью. Аппроксимация по времени уравнений движения дает:

$$\begin{aligned}
&\frac{u^{j+1}-u^j}{\Delta t}+u^j\frac{\partial u^{j+1/2}}{\partial x}+\mathrm{v}^j\frac{\partial u^{j+1/2}}{\partial y}+\\
&+w^j\frac{\partial u^{j+1/2}}{\partial z}-l\mathrm{v}^{j+1/2}=g\frac{\partial \xi^{j+1/2}}{\partial x}-\\
&-\frac{g}{\bar\rho}\int_0^z\frac{\partial \rho^{j+1/2}}{\partial x}dz'+\frac{\partial}{\partial z}\nu\frac{\partial u^{j+1/2}}{\partial z}+A\Delta u^{j+1/2}\\
&\frac{\mathrm{v}^{j+1}-\mathrm{v}^j}{\Delta t}+u^j\frac{\partial \mathrm{v}^{j+1/2}}{\partial x}+\mathrm{v}^j\frac{\partial \mathrm{v}^{j+1/2}}{\partial y}+\\
&+w^j\frac{\partial \mathrm{v}^{j+1/2}}{\partial z}+lu^{j+1/2}=g\frac{\partial \xi^{j+1/2}}{\partial y}-\\
&-\frac{g}{\bar\rho}\int_0^z\frac{\partial \rho^{j+1/2}}{\partial y}dz'+\frac{\partial}{\partial z}\nu\frac{\partial \mathrm{v}^{j+1/2}}{\partial z}+A\Delta \mathrm{v}^{j+1/2}
\end{aligned}\qquad(3)$$

Из уравнения неразрывности имеем:

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial u^j}{\partial x}+\dfrac{\partial \mathrm{v}^j}{\partial y}+\dfrac{\partial w^j}{\partial z}=0,\\
\dfrac{\partial u^{j+1/2}}{\partial x}+\dfrac{\partial \mathrm{v}^{j+1/2}}{\partial y}+\dfrac{\partial w^{j+1/2}}{\partial z}=0,\\
\dfrac{\partial u^{j+1}}{\partial x}+\dfrac{\partial \mathrm{v}^{j+1}}{\partial y}+\dfrac{\partial w^{j+1}}{\partial z}=0,
\end{cases}\qquad(4)$$

аналогично:

$$\begin{aligned}
&\frac{\rho^{j+1}-\rho^j}{\Delta t}+u^{j+1}\frac{\partial \rho^{j+1/2}}{\partial x}+\mathrm{v}^{j+1}\frac{\partial \rho^{j+1/2}}{\partial y}+\\
&+w^{j+1}\frac{\partial \rho^{j+1/2}}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial z}\kappa\frac{\partial \rho^{j+1/2}}{\partial z}+\mu\,\Delta\rho^{j+1/2}.
\end{aligned}$$

Учитывая краевые условия и следующие соотношения: $u^{j+1/2}=\dfrac{u^{j+1}+u^{j}}{2}$,

$\mathrm{v}^{j+1/2}=\dfrac{\mathrm{v}^{j+1}+\mathrm{v}^{j}}{2}$, $\rho^{j+1/2}=\dfrac{\rho^{j+1}+\rho^{j}}{2}$,

получим:

$$\int_0^H dz\iint_D \frac{\left(u^{j+1}\right)^2+\left(\mathrm{v}^{j+1}\right)^2+\left(\rho^{j+1}\right)^2}{2}dxdy+$$

$$+\sum_j\int_0^H dz\iint_D\left\{\nu\left[\left(\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{u^{j+1}+u^{j}}{2}\right)\right)^2+\right.\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mathrm{v}^{j+1}+\mathrm{v}^{j}}{2}\right)\right)^2\right]+$$

$$A\left[\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^{j+1}+u^{j}}{2}\right)\right)^2+\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathrm{v}^{j+1}+\mathrm{v}^{j}}{2}\right)\right)^2+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u^{j+1}+u^{j}}{2}\right)\right)^2+\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mathrm{v}^{j+1}+\mathrm{v}^{j}}{2}\right)\right)^2\right]+$$

$$+\kappa\left(\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\rho^{j+1}+\rho^{j}}{2}\right)\right)^2+\mu\left[\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\rho^{j+1}+\rho^{j}}{2}\right)\right)^2+\right.$$

$$\left.\left.+\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\rho^{j+1}+\rho^{j}}{2}\right)\right)^2\right]\right\}dxdy\Delta t=$$

$$=\int_0^H dz\iint_D\frac{\left(u^0\right)^2+\left(\mathrm{v}^0\right)^2+\left(\rho^0\right)^2}{2}dxdy+$$

$$+\sum_j\left\{\frac{g}{\bar\rho}\int_0^z dz\iint_D\left(\frac{w^{j+1}+w^{j}}{2}\right)\cdot\right.$$

$$\cdot\left(\frac{\rho^{j+1}+\rho^{j}}{2}\right)dxdy+\frac{1}{\bar\rho}\iint_D\left[\frac{u_0^{j+1}+u_0^{j}}{2}\cdot\frac{\tau_{xz}^{j+1}+\tau_{xz}^{j}}{2}+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\mathrm{v}_0^{j+1}+\mathrm{v}_0^{j}}{2}\cdot\frac{\tau_{yz}^{j+1}+\tau_{yz}^{j}}{2}-\frac{\rho_0^{j+1}+\rho_0^{j}}{2}\cdot\frac{\gamma^{j+1}+\gamma^{j}}{2}\right]\right\}\Delta t.$$

Интегральное соотношение (5) совпадает с выражением, которое получается из (3) путем интегрирование от 0 до T, а интеграл представляется в виде сумм интегралов по отрезкам Δt. Причем полное совпадение получается при суммировании прямоугольниками.

Заметим, что в уравнении плотности можно тоже брать скорости на j шаге:

$$\frac{\rho^{j+1}-\rho^{j}}{\Delta t}+u^{j}\frac{\partial\rho^{j+1/2}}{\partial x}+\mathrm{v}^{j}\frac{\partial\rho^{j+1/2}}{\partial y}+$$
$$w^{j}\frac{\partial\rho^{j+1/2}}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial z}\kappa\frac{\partial\rho^{j+1/2}}{\partial z}+\mu\Delta\rho^{j+1/2}. \qquad (6)$$

Представляя, что $\rho^{j+1/2}=\dfrac{\rho^{j+1}+\rho^{j}}{2}$ и применив дивергентную форму записи, уравнение (6) перепишем следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial\rho^{j+1/2}}{\partial x}-u^{j}\rho^{j+1/2}\right)+$$
$$+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial\rho^{j+1/2}}{\partial y}-\mathrm{v}^{j}\rho^{j+1/2}\right)+ \qquad (7)$$
$$+\frac{\partial}{\partial z}\left(\kappa\frac{\partial\rho^{j+1/2}}{\partial z}-w^{j}\rho^{j+1/2}\right)-\frac{2}{\Delta t}\rho^{j+1/2}=$$
$$=-\frac{2}{\Delta t}\rho^{j}.$$

Для более точного описания поведения решения в областях пограничных слоев применим следующие аппроксимации:

$$\frac{\partial\rho^{j+1/2}}{\partial x}-\frac{u^{j}}{\mu}\rho^{j+1/2}\approx\left(R_u\operatorname{cth}R_u\right)D_x\rho^{j+1/2}-$$
$$-\frac{u^{j}}{\mu}S_x\rho^{j+1/2},$$

$$\frac{\partial\rho^{j+1/2}}{\partial y}-\frac{\mathrm{v}^{j}}{\mu}\rho^{j+1/2}\approx\left(R_{\mathrm{v}}\operatorname{cth}R_{\mathrm{v}}\right)D_y\rho^{j+1/2}- \qquad (8)$$
$$-\frac{\mathrm{v}^{j}}{\mu}S_y\rho^{j+1/2},$$

$$\frac{\partial\rho^{j+1/2}}{\partial z}-\frac{w^{j}}{\kappa}\rho^{j+1/2}\approx\left(R_w\operatorname{cth}R_w\right)D_z\rho^{j+1/2}-$$
$$-\frac{w^{j}}{\kappa}S_z\rho^{j+1/2},$$

где $R_u=\dfrac{\Delta x}{2}\dfrac{u^{j}}{\mu}$; $R_{\mathrm{v}}=\dfrac{\Delta y}{2}\dfrac{\mathrm{v}^{j}}{\mu}$; $R_w=\dfrac{\Delta z}{2}\dfrac{w^{j}}{\kappa}$;

$$D_xf(x,y,z)=\frac{f(x+\frac{\Delta x}{2},y,z)-f(x-\frac{\Delta x}{2},y,z)}{\Delta x},$$

$$D_yf(x,y,z)=\frac{f(x,y+\frac{\Delta y}{2},z)-f(x,y-\frac{\Delta y}{2},z)}{\Delta y},$$

$$D_zf(x,y,z)=\frac{f(x,y,z+\frac{\Delta z}{2})-f(x,y,z-\frac{\Delta z}{2})}{\Delta z},$$

$$S_x f(x,y,z) = \frac{f(x+\frac{\Delta x}{2},y,z)+f(x-\frac{\Delta x}{2},y,z)}{2},$$

$$S_y f(x,y,z) = \frac{f(x,y+\frac{\Delta y}{2},z)+f(x,y-\frac{\Delta y}{2},z)}{2},$$

$$S_z f(x,y,z) = \frac{f(x,y,z+\frac{\Delta z}{2})+f(x,y,z-\frac{\Delta z}{2})}{2},$$

$f(x,y,z)$ – произвольная функция.

Тогда уравнение (7) принимает вид:

$$\mu D_x\left[R_u \mathrm{cth} R_u D_x \rho^{j+1/2} - \frac{u^j}{\mu} S_x \rho^{j+1/2}\right] + \mu D_y\left[R_v \mathrm{cth} R_v D_y \rho^{j+1/2} - \frac{v^j}{\mu} S_y \rho^{j+1/2}\right] + D_z \kappa\left[R_w \mathrm{cth} R_w D_z \rho^{j+1/2} - \frac{w^j}{\kappa} S_z \rho^{j+1/2}\right] - \frac{2}{\Delta t}\rho^{j+1/2} = -\frac{2}{\Delta t}\rho^j. \quad (9)$$

Введем индексы вдоль координат для ячейки k,l,m – соответственно. Тогда уравнение (9) запишем в развернутом виде:

$$\frac{\mu R_u(\mathrm{cth}R_u - 1)}{\Delta x^2}\rho^{j+1/2}_{k+1,l,m} - \frac{2\mu R_u \mathrm{cth} R_u}{\Delta x^2}\rho^{j+1/2}_{k,l,m} + \frac{\mu R_u(\mathrm{cth}R_u + 1)}{\Delta x^2}\rho^{j+1/2}_{k-1,l,m} + \frac{\mu R_v(\mathrm{cth}R_v - 1)}{\Delta y^2}\rho^{j+1/2}_{k,l+1,m} - \frac{2\mu R_v \mathrm{cth} R_v}{\Delta y^2}\rho^{j+1/2}_{k,l,m} + \frac{\mu R_v(\mathrm{cth}R_v + 1)}{\Delta y^2}\rho^{j+1/2}_{k,l-1,m} + \frac{\kappa R_w(\mathrm{cth}R_w - 1)}{\Delta z^2}\rho^{j+1/2}_{k,l,m+1} - \frac{2\kappa R_w \mathrm{cth} R_w}{\Delta z^2}\rho^{j+1/2}_{k,l,m} + \frac{\kappa R_w(\mathrm{cth}R_w + 1)}{\Delta z^2}\rho^{j+1/2}_{k,l,m-1} - \frac{2}{\Delta t}\rho^{j+1/2}_{k,l,m} = -\frac{2}{\Delta t}\rho^j_{k,l,m}. \quad (10)$$

В (10) скорости u, v, w и коэффициент κ считаются постоянными в пределах одной ячейки.

Для решения (10) наиболее эффективен метод последовательной верхней релаксации.

Переходим теперь к построению алгоритма вычисления скоростей u, v, w. Уравнения (4) запишем в дифференциально-разностном виде для применения метода обращения динамического оператора:

$$\left(1+\frac{2A\Delta t}{\Delta x^2}+\frac{2A\Delta t}{\Delta y^2}\right)u^{j+1/2}_{klm} - l\Delta t v^{j+1/2}_{klm} = g\Delta t\frac{\partial \xi^{j+1/2}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z}\nu\Delta t\frac{\partial u^{j+1/2}}{\partial z} - \Delta t w^j\frac{\partial u^{j+1/2}}{\partial z} + f_{0klm},$$

$$\left(1+\frac{2A\Delta t}{\Delta x^2}+\frac{2A\Delta t}{\Delta y^2}\right)v^{j+1/2}_{klm} + l\Delta t u^{j+1/2}_{klm} = g\Delta t\frac{\partial \xi^{j+1/2}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\nu\Delta t\frac{\partial v^{j+1/2}}{\partial z} - \Delta t w^j\frac{\partial v^{j+1/2}}{\partial z} + f_{1klm}, \quad (12)$$

где

$$f_{0klm} = 2u^j_{klm} - \Delta t\left[u^j_{klm}\frac{u^{j+1/2}_{k+1,l,m} - u^{j+1/2}_{k-1,l,m}}{2\Delta x} + v^j_{klm}\frac{u^{j+1/2}_{k,l+1,m} - u^{j+1/2}_{k,l-1,m}}{2\Delta y}\right] + \Delta t A\left(\frac{u^{j+1/2}_{k+1,l,m} + u^{j+1/2}_{k-1,l,m}}{\Delta x^2} + \frac{u^{j+1/2}_{k,l+1,m} + u^{j+1/2}_{k,l-1,m}}{\Delta y^2}\right) - \frac{g}{\bar{\rho}}\Delta t\int_0^z \frac{\partial \rho^{j+1/2}}{\partial x}dz'.$$

Аналогично f_{1klm} выражается через v.

Далее, введем обозначения и запишем систему уравнений в виде:

$$G = \begin{pmatrix} 1+\frac{2A\Delta t}{\Delta x^2}+\frac{2A\Delta t}{\Delta y^2} & -l\Delta t \\ l\Delta t & 1+\frac{2A\Delta t}{\Delta x^2}+\frac{2A\Delta t}{\Delta y^2}\end{pmatrix},$$

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u^{j+1/2} \\ v^{j+1/2}\end{pmatrix}, \quad \vec{F} = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1\end{pmatrix}, \quad \vec{\eta} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi^{j+1/2}}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi^{j+1/2}}{\partial y}\end{pmatrix},$$

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} \tau_{xz}/\bar{\rho} \\ \tau_{yz}/\bar{\rho}\end{pmatrix}.$$

Тогда система уравнений принимает вид:

$$G\vec{u} - \Delta t w^j\frac{\partial \vec{u}}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z}\Delta t\nu\frac{\partial \vec{u}}{\partial z} = g\Delta t\vec{\eta} + \vec{F}. \quad (14)$$

В соответствии с [1]:

$$\vec{u} = \vec{N} + \Delta t g G^{-1}\vec{\eta}. \quad (15)$$

Тогда имеем:

$$G\vec{N} - \frac{\partial}{\partial z}\Delta t\nu\frac{\partial\vec{N}}{\partial z} - \Delta t w^j\frac{\partial\vec{N}}{\partial z} = \vec{F} \qquad (16)$$

с граничными условиями вида:

$$z = 0, \quad \nu\frac{\partial\vec{N}}{\partial z} = -\vec{f}$$

$$z = H, \quad \vec{N} = -\Delta t g G^{-1}\vec{\eta}.$$

В соответствии с [1] можно получить:

$$M_x^{j+1/2} = a_0\frac{\partial\xi^{j+1/2}}{\partial x} + a_1\frac{\partial\xi^{j+1/2}}{\partial y} + q_0$$

$$M_y^{j+1/2} = -a_1\frac{\partial\xi^{j+1/2}}{\partial x} + a_0\frac{\partial\xi^{j+1/2}}{\partial y} + q_1 \qquad (17)$$

где $\begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ -a_1 & a_0 \end{pmatrix} = \int_0^H \begin{pmatrix} A_0 & A_1 \\ -A_1 & A_0 \end{pmatrix} dz.$

Далее в соответствии с [3] определяем наклоны уровня. Вертикальная скорость $w_{klm}^{j+1/2}$ определяется в соответствии с работой [2].

После нахождения $u^{j+1/2}$, $v^{j+1/2}$, $w^{j+1/2}$ легко находим

$$u^{j+1} = 2u^{j+1/2} - u^j,$$

$$v^{j+1} = 2v^{j+1/2} - v^j,$$

$$w^{j+1} = 2w^{j+1/2} - w^j$$

и решаем снова уравнение для плотности.

Формула прямоугольников со средней точкой дает второй порядок аппроксимации. Разностное представление интегрального соотношения получено с этим порядком точности. Уравнение переноса тоже аппроксимируется со вторым порядком. Решение этого уравнения можно осуществлять различными алгоритмами. С точки зрения числа итераций – это метод последовательной релаксации, а с точки зрения экономии оперативной памяти – это метод Гаусса–Зейделя.

Отметим, что алгоритм для вычисления плотности легко обобщается на случай расчета температуры и солености. Вследствие результатов работы [2] модель может быть пригодная для получения течений с хорошей точностью не только в поверхностных слоях, но и в придонных. Выполнение интегрального соотношения в процессе интегрирования модели дает возможность производить расчеты на длительные сроки, т.е. модель будет прогностической.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кочергин В.П. Теория и методы расчета океанических течений.–М.: Наука, 1978.–127с.
2. Кочергин В.П., Дунец Т.В. Метод расчета вертикальной компоненты скорости в задачах динамики водоемов // Морской гидрофизический журнал.–1996.–№5.–С.59–65..
3. Кочергин В.П., Дунец Т.В. Вычислительный алгоритм для определения наклонов уровня в задачах динамики водоемов // Морской гидрофизический журнал.–1999.–№3.–С.20–28.