ЗАВИСИМОСТЬ ХАРАКТЕРИСТИК ВОЛНОВЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ОТ РЕОЛОГИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ЛЕДЯНОГО ПОКРОВА

А.Е.Букатов, Т.А.Соломаха

Морской гидрофизический институт
НАН Украины
г.Севастополь, ул. Капитанская,2
E-mail:oaoi@alpha.mhi.iuf.net

Рассмотрено влияние реологических свойств ледяного покрова на свободные изгибно-гравитационные волны в бассейне постоянной глубины. Определена роль вязкоупругих факторов в формировании структуры изгиба льда. Получены дисперсионные зависимости и исследовано затухание возмущений.

Исследование свободных изгибно-гравитационных волн в бассейне, покрытом упругим льдом, выполнено в [1]. Распространение волн в бассейне с ледяным покровом, моделируемым вязким слоем жидкости с большим коэффициентом внутреннего трения, рассмотрено в [2]. Затухание свободных изгибно-гравитационных волн, обусловленное вязкостью ледяного покрова изучалось в [3]. Концепция комплексного модуля упругости, как одна из формулировок вязкоупругого действия материала представлена в [4].

Неупругие свойства льда и покрывающего его снега, являются одной из главных причин диссипации энергии изгибных колебаний ледяного покрова и волновых возмущений жидкости под ним. Оценить влияние данных факторов на фазовые характеристики свободных изгибно-гравитационных волн позволяет модель, где снег в первом приближении принимается вязким слоем жидкости с большим коэффициентом внутреннего трения, а лед моделируется тонкой пластиной, линейная вязкоупругость которой описывается концепцией комплексного модуля упругости. Данная формулировка предполагает, что при воздействии напряжения, периодически изменяющегося во времени, на элемент линейного вязкоупругого материала деформация изменяется с тем же периодом, что и напряжение, но по фазе отстает от него. Комплексный модуль упругости E^* определяется выражением

$$E^*=E_1+iE_2=\sigma_0\varepsilon_0^{-1}exp(i\varphi) \qquad (1)$$

где σ_0,ε_0 – амплитуды напряжения и деформации, φ – фазовый сдвиг . Отношение мнимой части к реальной, выражает параметр затухания $\delta=tg\varphi$.

Уравнение малых изгибных колебаний ледяной пластины, плавающей на поверхности воды, с учетом комплексности его модуля упругости и снега имеет вид

$$D_1\frac{\partial^4\zeta}{\partial x^4}+\chi_1\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}+\zeta+\eta_1\frac{\partial^3\zeta}{\partial t\partial x^2}+\frac{1}{g}\frac{\partial\Phi}{\partial z}\Big|_{z=0}=0,$$

$$где\ D=\frac{E_1h_1^3(1+i\delta)}{12(1-\nu^2)},\ \chi=h_1\rho_1+h_2\rho_2, \qquad (2)$$

$$\{D_1,\eta_1,\chi_1\}\approx\{D,\eta h_2,\chi\}(\rho g)^{-1}$$

E_1, ν, δ,h_1,ρ_1- модуль нормальной упругости, коэффициент Пуассона, параметр затухания, толщина и плотность льда; η,ρ_2,h_2 – коэффициент внутреннего трения, плотность и толщина снега; ρ,H,ζ- плотность и глубина воды, возвышение поверхности лед-вода. Потенциал $\Phi(x,z,t)$ удовлетворяет уравнению Лапласа во всем объеме жидкости, условию непротекания на дне $\frac{\partial\Phi}{\partial z}=0$ и кинематическому соотношению на границе лед-вода $\frac{\partial\zeta}{\partial t}=\frac{\partial\Phi}{\partial z}$. Решая задачу о свободных волновых возмущениях в водоеме с ледяным покровом, из (1)-(2) получим дисперсионное уравнение, связывающие волновое число r и частоту σ изгибно-гравитационных волн.

$$\sigma^2\chi^*-R[D_1r^4+1+i(\sigma\eta_1r^2+\delta D_1r^4)]=0, \qquad (3)$$

$R=rg\,th\,rH$, $\chi^*=1+\chi_1R$, $D_1=E_1h_1^3[12\rho g(1-\upsilon^2)]^{-1}$

Если $\delta=0$, то (3) переходит в дисперсионную зависимость для изгибно-гравитационных волн, затухающих только из-за вязкости снега.

Решая уравнение (3) при фиксированной длине волны $\lambda=2\pi\backslash r$, находим $\sigma^*=\sigma+i\sigma_1$, где

$$\sigma^2=0.5\left[\sigma_s^2+\sqrt{\sigma_s^4+\left(\delta D_1r^4R\chi^{*-1}\right)^2}\right] \qquad (4)$$

$$\sigma_1=0.5R\chi^{*-1}r^2[\eta_1+\delta D_1r^2\sigma^{-1}] \qquad (5)$$

$$\sigma_s^2=[R(4(D_1r^4+1)\chi^*-\eta_1^2r^4R)](2\chi^*)^{-2}$$

σ_s – частота свободных волн, с учетом слоя снега и упругой ледяной пластины. Величина σ_1 определяет скорость затухания поверхностных волн. Первое слагаемое в (5) обусловлено только вязкостью снега и характеризует скорость затухания при $\delta=0$ [3]. Второе слагаемое определяется только вязкостью льда .

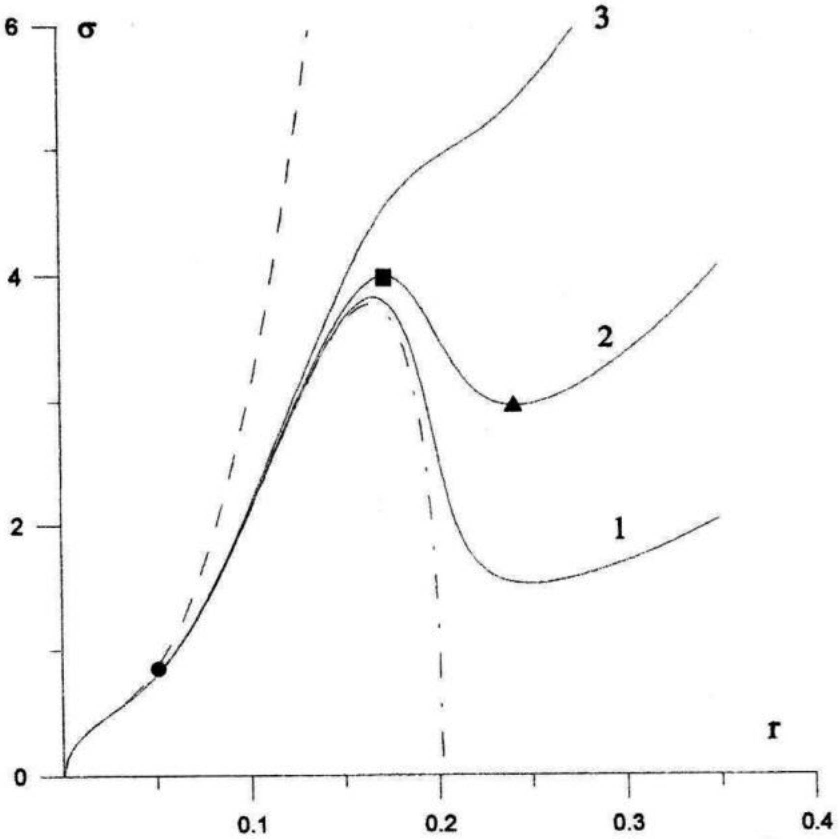

Рис. 1 - Дисперсионные кривые для различных моделей ледяного покрова

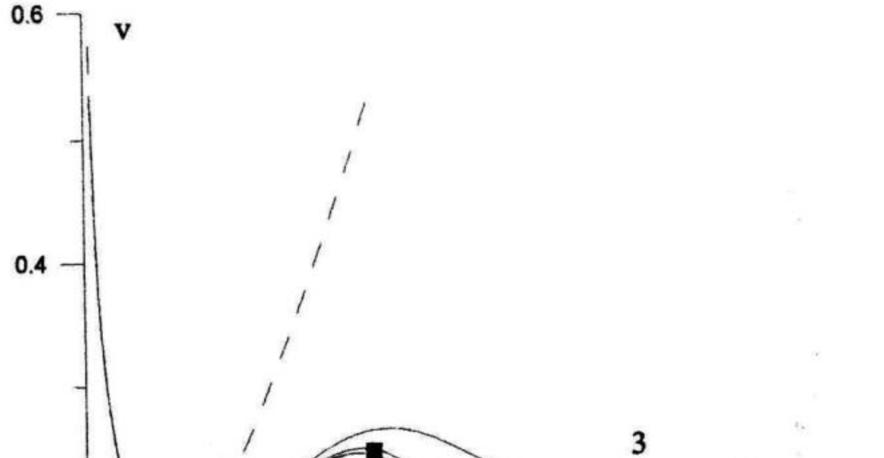

Рис. 2 - Распределение фазовой скорости волновых возмущений по волновому числу

Численный анализ распределений σ по r, характеризующих дисперсионную зависимость, а также распределение фазовой и групповой скоростей по частоте проводился при значениях H, h_1, h_2 (м), равных 10^3,1.5,1 соответственно. Величины E_1(н/м^2), ρ, ρ_1, ρ_2 (кг/м ^{3}), υ, полагались равными $3\cdot10^9$, 10^3, 870, 250, 0.34 соответственно. Дисперсионные кривые представлены на рис.1, а зависимость фазовой скорости $v=\sigma / r(gh)^{1/2}$ от волнового числа - на рис.2. Штриховые линии на рисунках соответствуют чисто упругой модели льда (η=0, δ=0), а штрихпунктирные – модели упругого льда покрытого снегом ($\eta=5\cdot10^6$ Па·с , δ=0). Линии 1,2,3 представлены для $\eta=5\cdot10^6$ Па·с и соответствуют параметрам затухания δ, равным 0.05, 0.1, 0.2. Из рисунков видно, что без учета вязких свойств ледяного покрова (штриховые линии) существует одна волновая система. Характер волны, гравитационный или изгибный, определяется ветвью дисперсионной кривой. Учет снега (штрихпунктирные линии) приводит к ограничению частоты существования периодических возмущений и образованию второй волновой системы. Дополнительный учет неупругих свойств льда (линии 1-3) существенно деформирует дисперсионные кривые. Периодические возмущения возможны во всем диапазоне волновых чисел. Кроме того возникает дополнительная система волн, обусловленная вязкостью льда. Таким образом, весь частотный диапазон существования волновых возмущений при рассмотрении вязкоупругой модели ледяного покрова можно поделить на четыре интервала, в каждом из которых преобладает влияние сил упругости или вязкости. Границы интервалов определяются как $\sigma_k=\sigma(r_k)$, k=1,2,3, где r_k – действительные корни уравнения $\sigma'(r)=0$. Для наглядности на рис.1,2 кругом, квадратом и треугольником отмечены значения, соответствующие σ_1, σ_2, σ_3 при δ=0.1. Первый участок (0, σ_1) представляет длинные гравитационные волны, имеющие нормальную дисперсию и влияние диссипативных факторов на фазовые характеристики которых можно не учитывать. Влияние вязкости проявляется лишь в незначительном затухании возмущений. Второй диапазон (σ_1, σ_2) определяется совместным действием упругих сил льда и вязкости снега. Это интервал существования изгибногравитационных волн, обладающих аномальной дисперсией. Увеличение коэффициента внутреннего трения снега приводит к сужению этого диапазона, а рост цилиндрической жесткости к его расширению. Третий интервал (σ_2, σ_3) обусловлен внутренним трением снега. Для него периодические возмущения проявляют аномальную дисперсию. Более короткие волны обладают меньшей скоростью затухания. Учет комплексности модуля упругости изменяет правую границу интервала. Увеличение параметра затухания приводит к расширению диапазона. Последний интервал определяется вязкостью ледяной пластины. Наблюдается рост частоты свободных колебаний с уменьшением длины волны. Это характерно и для изгибных волн без учета снега. Чем больше параметр затухания, тем этот эффект проявляется сильнее. Отметим, что если η=0, то учет только комплексности модуля упругости приводит к незначительной количественной деформации дисперсионных кривых в случае упругого льда. Совместное влияние двух вязких факторов приводит к существенному качественному и количественному изменению дисперсионных зависимостей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хейсин Д.Е. Динамика ледяного покрова. Л.: Гидрометеоиздат, 1967.- 215с.

2. Крылов Ю.М. Распространение длинных волн под ледяным покровом. Тр.ГОИН. 1948.№8.-С.52-59.

3. Букатов А.Е., Соломаха Т.А. Затухание изгибно-гравитационных волн. Морской гидрофизический журнал.1990.№5.-С.18-24.

4. Мартинчек Г. Динамическая вязкоупругость в техническом применении. Успехи механики. 1988.т.6, №3/4.-С.100-144.