

**ВЛИЯНИЕ ВЯЗКИХ СВОЙСТВ
ПЛАВАЮЩЕГО ЛЬДА НА СТОЯЧИЕ
ПОВЕРХНОСТНЫЕ ВОЛНЫ В
ОГРАНИЧЕННОМ БАССЕЙНЕ**

А.Е. Букатов, О.М. Букатова

Морской гидрофизический институт
НАН Украины
г. Севастополь, ул. Капитанская, 2
E-mail: ocean@alpha.mhi.iuf.net

Рассмотрено влияние вязкости плавающего неупругого ледяного покрова на плоские стоячие поверхностные гравитационные волны малой амплитуды в ограниченном бассейне постоянной глубины. Дана оценка зависимости собственных частот и скорости затухания колебаний от параметров бассейна, толщины и вязкости льда.

Введение. Важным компонентом гидрологического режима полярных районов океана, замерзающих морей и внутренних водоемов является ледяной покров. Оценка его влияния на динамические процессы важна при решении экологических и ряда практических задач, связанных с освоением шельфовых зон. Теоретическому анализу свободных и вынужденных прогрессивных поверхностных волн в покрытом льдом бассейне посвящены работы [1, 2]. Стоячие изгибно-гравитационные волны рассмотрены в [3] без учета вязких свойств ледяного покрова. В настоящей работе изучается влияние вязкости плавающего неупругого ледяного покрова (сплоченного битого льда) на плоские стоячие поверхностные гравитационные волны малой амплитуды в ограниченном бассейне постоянной глубины.

Постановка задачи. Пусть на поверхности однородной идеальной несжимаемой жидкости, заполняющей прямоугольный бассейн глубины $H = \text{const}$, плавает неупругий ледяной покров (битый лед). Рассмотрим влияние вязкости ледяного покрова на плоские стоячие колебания жидкости. В предположении потенциальности движения жидкости задача заключается в решении уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0, \quad -H \leq z \leq 0, \quad 0 \leq x \leq l \quad (1)$$

с граничными условиями на поверхности ($z = 0$)

$$\zeta + \frac{1}{g} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \kappa \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - \eta \frac{\partial^3 \zeta}{\partial t \partial x^2} = 0 \quad (2)$$

и на дне ($z = -H$) бассейна

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0. \quad (3)$$

На боковых стенках бассейна ($x = 0, x = l$), как и на дне должно выполняться условие непротекания

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0. \quad (4)$$

При этом возвышение поверхности бассейна ζ и потенциал скорости φ связаны кинематическим соотношением

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad z = 0. \quad (5)$$

Здесь

$$\kappa = \frac{\rho_1 h}{\rho g}, \quad \eta = \frac{\mu h}{\rho g},$$

h, ρ_1, μ — толщина, плотность и коэффициент вязкого трения ледяного покрова, ρ — плотность воды, g — ускорение свободного падения, l — ширина бассейна.

Вывод основных уравнений. Чтобы получить стоячие колебания, рассмотрим потенциал скорости φ в виде

$$\varphi(x, z, t) = \frac{a\sigma}{k} \Phi(x, z) \exp(i\sigma t),$$

где a амплитуда колебаний (вертикальное смещение поверхности бассейна), k — волновое число, σ — частота колебаний. Для удовлетворения уравнения (1) и граничных условий (3) на дне и (4) на стенках бассейна предположим, что зависимость Φ от x и z определяется соотношением

$$\Phi = ch k(z + H) \cos kx, \quad k = \pi n / l, \quad n = 1, 2, \dots \quad (6)$$

Следовательно

$$\varphi(x, z, t) = \frac{a\sigma}{k} ch k(z + H) \cdot \cos kx \exp(i\sigma t), \quad k = \pi n / l, \quad n = 1, 2, \dots \quad (7)$$

Тогда для стоячих колебаний ($k = \pi n / l, n = 1, 2, \dots$) составляющие скорости частиц жидкости u и w соответственно вдоль осей x и z найдем по формулам

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -a\sigma ch k(z + H) \sin kx \exp(i\sigma t),$$

$$w = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -a\sigma sh k(z + H) \cos kx \exp(i\sigma t).$$

Подставляя φ из (7) в кинематическое соотношение (5), получим выражение для возвышения поверхности бассейна в виде

$$\zeta = -ia sh kH \cos kx \exp(i\sigma t). \quad (9)$$

Из динамического условия (2) с учетом (5) найдем выражение, связывающее волновое число и частоту колебаний

$$\sigma^2 \kappa_1 - (1 + i\eta \sigma k^2) k g t h k H = 0, \\ \kappa_1 = 1 + \kappa k g t h k H.$$

Отсюда, полагая $\sigma = \sigma_0 + i\delta$ при заданной длине волны, найдем

$$\sigma_0 = \sigma_0 \sigma_1, \quad \sigma_1 = \sqrt{1 - \frac{1}{4} \eta^2 k^4 \sigma_0^2}, \\ \sigma_0 = \sqrt{\frac{1}{\kappa_1} k g t h k H}, \quad \delta = \frac{1}{2\kappa_1} \eta k^3 g t h k H,$$

где σ_0 представляет частоту колебаний при отсутствии трения, а δ определяет скорость затухания гравитационных поверхностных волн, обусловленного внутренним трением плавающего льда. При отсутствии льда

$$\sigma_0 = \sqrt{k g t h k H}, \quad \text{так как } \kappa_1 = 1 \text{ при } h = 0 \text{ и} \\ \sigma_1 = 1 \text{ в силу } \eta = 0 \text{ при } h = 0.$$

Видно, что в покрытом льдом бассейне при учете трения [4-6] периодические возмущения могут иметь место при

$$\eta < \eta_1, \quad \eta_1 = 2(k^2 \sigma_0)^{-1}. \quad (11)$$

Это условие приобретает вид

$$\eta < \eta_1 = \frac{2}{k^2} \sqrt{\kappa + \frac{1}{kg}}, \quad (12)$$

если волны короткие ($kH \gg 1$), и

$$\eta < \eta_1 = \frac{2}{k^2} \sqrt{\kappa + \frac{1}{k^2 g H}} \quad (13)$$

в приближении мелкой воды ($kH \ll 1$). Условия (12), (13) можно выразить через длину волны возмущений $\lambda = 2\pi/k$ в виде [6]

$$\lambda^5 + 2\pi k g \lambda^4 - 8\pi^5 g \eta^2 > 0, \\ \lambda^6 + 4\pi^2 k g H \lambda^4 - 16\pi^6 g H \eta^2 > 0$$

соответственно.

Для u , w , ζ из (8), (9) с учетом (10) получим выражения

$$u = A e^{-\delta t} c h k (z + H) \sin kx \cos(\sigma_0 + \gamma t) \\ w = -A e^{-\delta t} s h k (z + H) \cos kx \cos(\sigma_0 + \gamma t) \\ \zeta = a e^{-\delta t} s h k H \cos kx \sin \sigma_0 t,$$

$$A = a \sqrt{\sigma_0 + \delta^2}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \delta / \sigma_0, \quad k = \pi n / l.$$

Анализ результатов. Для количественной оценки влияния вязкости ледяного покрова на волновые характеристики проводились численные расчеты при значениях

$\rho_1/\rho = 0.87$, $0 \leq h \leq 0.6$ м, $H = 50$ м, $1 \leq l/H \leq 20$. Некоторые результаты расчетов приведены на рис. 1-4. Распределение η_1 по ширине бассейна иллюстрируют графики на рис. 1. Напомним, что величина η_1 характеризует верхнюю границу значений коэффициента трения при которых возможны периодические колебания. Номера графиков 1, 2, 3 соответствуют здесь номерам n мод колебаний, а сплошные, штриховые и пунктирные линии отвечают толщинам льда 0.2, 0.4, 0.6 м. Видно, что величина η_1 растет с увеличением как ширины бассейна, так и толщины льда. Чем выше номер моды колебаний n , тем значение η_1 меньше.

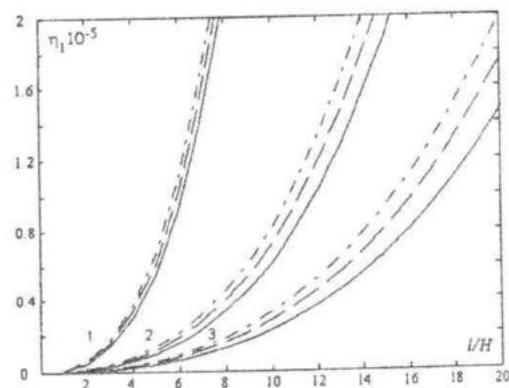


Рис. 1 — Влияние толщины льда на распределение η_1 по ширине бассейна

Вязкость льда при фиксированной его толщине уменьшает частоту колебаний σ_0 . Причем влияние вязкости усиливается с ростом номера моды и убывает с увеличением ширины бассейна при постоянной его глубине. Это иллюстрируют графики на рис. 2, где представлена зависимость σ_1 от n , μ и l/H . Сплошные линии отвечают здесь первой моде колебаний, а штриховые второй. Как сплошные, так и штриховые линии по порядку сверху вниз соответствуют значениям μ , равным 10^6 и $1.9 \cdot 10^6$ Пас.

Величина δ , характеризующая обусловленное вязкостью затухание колебаний, убывает с ростом ширины бассейна и растет с увеличением коэффициента трения μ и номера моды. Это показывают графики 1 и 2 на рис. 3, соответствующие первой и второй модам при $h = 0.2$ м. Сплошные и штриховые линии приведены для значений μ , равных 10^6 и $1.9 \cdot 10^6$ Пас. Чем толще лед, тем больше δ , что видно из графиков на

рис.4, где сплошные, штриховые и штрих-пунктирные линии отвечают толщинам льда 0.2, 0.4, 0.6м при $n = 1$ и $\mu=1.9 \cdot 10^6$ Пас.

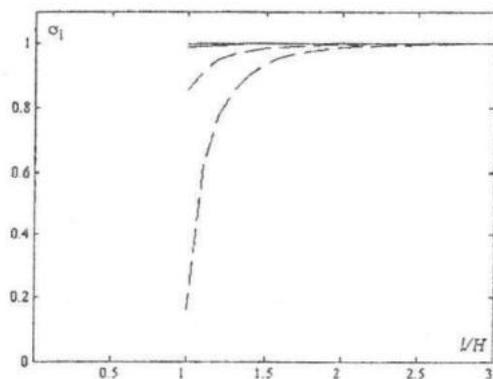


Рис. 2 – Влияние вязкости на σ_1

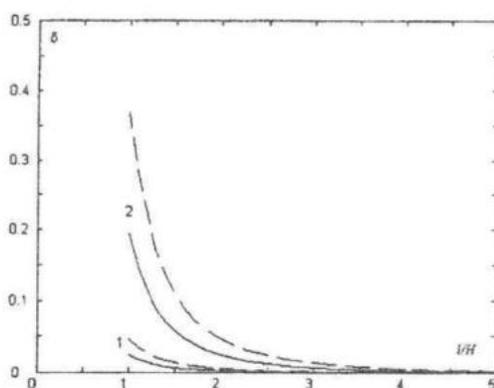


Рис. 3 – Распределение δ по ширине бассейна

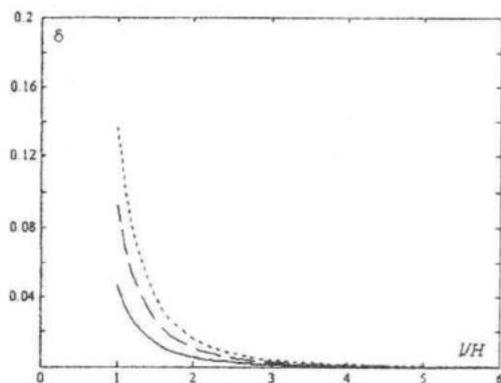


Рис. 4 – Зависимость декремента затухания от толщины льда

Заключение. Верхняя граница интервала значений коэффициента вязкого трения плавающего льда, допускающих периодические колебания в ограниченном бассейне постоянной глубины, смещается в сторону больших величин с ростом толщины льда и ширины бассейна. Чем выше номер моды колебаний, тем указанный интервал меньше. Декремент обусловленного вязкостью затухания возмущений убывает с ростом ширины бассейна и растет с увеличением номера моды и толщины льда. Частота колебаний уменьшается под влиянием вязкости льда. С увеличением ширины бассейна и номера моды это влияние убывает.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хейсин Д.Е. Динамика ледяного покрова. – Л.: Гидрометеиздат, 1967.-215с.
2. Букатов А.Е., Черкесов Л.В. Влияние ледяного покрова на волновые движения жидкости // Морские гидрофизические исследования.-1971.-№2(52). – С. 113–144.
3. Букатов А.Е., Букатова О.М. Влияние ледового сжатия на стоячие колебания в замерзающем бассейне // Системы контроля окружающей среды. – Севастополь: МГИ НАН Украины, 2004. – С. 187–190.
4. Крылов Ю.М. Распространение длинных волн под ледяным полем // тр. ГОИН. – 1948. №8. – С. 52–59.
5. Савченко В.Г. О влиянии ледового покрова на поверхностные и внутренние свободные гравитационные волны // Проблемы Арктики и Антарктики. – Л.: Гидрометеиздат, 1986. – вып. 62. – С. 103–110.
6. Букатов А.Е., Завьялов Д.Д., Букатова О.М., Соломаха Т.А. Влияние ледяного покрова на волновые возмущения в Азовском море // Морской гидрофизический журнал. – 2001. – №4. – С. 11–22.