

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ВХОДНЫХ ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛИ ПЕРЕНОСА ПАССИВНОЙ ПРИМЕСИ

С.В. Кочергин, В.С. Кочергин

Морской гидрофизический институт
НАН Украины
г. Севастополь, ул. Капитанская, 2
E-mail: ko4ep@mail.ru

Рассмотрена модель переноса пассивной примеси, основанная на TVD-аппроксимациях. Идентификация входных параметров модели осуществляется при помощи вариационного алгоритма усвоения данных измерений. В качестве входных параметров рассматриваются начальные данные и скорость течений. Исследуется сходимость итерационного процесса при использовании различных разностных аппроксимаций уравнения переноса пассивной примеси.

Использование модели переноса пассивной примеси и вариационных методов идентификации её параметров [1] являются важными задачами при решении вопросов связанных с экологией водоемов. При численном моделировании распространения примеси применение TVD-схем [2] оказывается оправданным. Поэтому такие схемы применены для решений основной и сопряженной задачи. Решение сопряженной задачи лежит в основе вариационного алгоритма минимизации квадратичного функционала качества прогноза. Модель переноса выступает в качестве ограничений на вариации входных параметров.

Для лучшего понимания сути проблемы рассмотрим одномерный аналог уравнения переноса пассивной примеси. В области интегрирования D на интервале времени $[0, \bar{t}]$ в качестве модели рассмотрим одномерное уравнение:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + U \frac{\partial \varphi}{\partial x} = k \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad \Gamma: \varphi = 0, \quad t = 0: \varphi = \varphi_0, \quad (1)$$

где $U = \text{const}$, $k = \text{const}$, Γ -граница области интегрирования.

Пусть на момент времени \bar{t} имеются данные измерений о поле концентрации $\varphi_{изм}$, тогда задача идентификации параметров модели (1) состоит в нахождении минимума функционала:

$$I_0(\varphi) = \frac{1}{2} (\varphi - \varphi_{изм}, \varphi - \varphi_{изм})_{D, \bar{t}}, \quad (2)$$

где скалярное произведение определено следующим образом:

$$\begin{aligned} (\varphi, \varphi^*)_{D, \bar{t}} &= \int_{D, \bar{t}} \varphi \cdot \varphi^* dD_t = \\ &= \int_0^{\bar{t}} \int_{D_t} \varphi \cdot \varphi^* dD dt \end{aligned} \quad (3)$$

Минимизация квадратичного функционала (2) осуществляется при условии, что φ является решением модели (1). Поэтому, поиск минимума (2) при ограничениях (1) эквивалентно минимизации следующего функционала:

$$\begin{aligned} I(\varphi) = I_0(\varphi) + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + U \frac{\partial \varphi}{\partial x} - k \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \varphi^* \right) + \\ + (\varphi, \varphi^*)_{\Gamma, \bar{t}} - (\varphi - \varphi_0, \varphi^*)_{D, t=0} \end{aligned} \quad (4)$$

Следуя [2] выбираем множители Лагранжа как решение сопряженной задачи:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \varphi^*}{\partial t} - U \frac{\partial \varphi^*}{\partial x} - k \frac{\partial^2 \varphi^*}{\partial x^2} &= 0 \\ \Gamma: \varphi^* &= 0 \\ t = \bar{t}: \varphi^* &= \nabla I_0(\varphi) \end{aligned} \quad (5)$$

В случае идентификации начальных данных, из условия стационарности функционала имеем:

$$\nabla \varphi_0 I(\varphi) = \varphi^* \Big|_{t=0} \quad (6)$$

С некоторым итерационным параметром τ необходимо осуществлять спуск в пространстве параметров в направлении этого градиента:

$$\varphi_0^{n+1} = \varphi_0^n + \tau \nabla \varphi_0 I(\varphi) \quad (7)$$

При идентификации скорости имеем следующий итерационный процесс:

$$\begin{aligned} \nabla_U I &= \int_0^{\bar{t}} \int_0^X \frac{\partial \varphi}{\partial x} \varphi^* dx dt \\ \nabla_U I &= - \int_0^{\bar{t}} \int_0^X \frac{\partial \varphi}{\partial x} \varphi dx dt \end{aligned} \quad (8)$$

$$U^{n+1} = U^n + \tau \nabla_U I$$

Идентификация коэффициента турбулентной вязкости осуществляется при помощи следующего итерационного процесса:

$$\nabla k = \int_0^T \int_0^X \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \varphi^*}{\partial x} dx dt \quad (9)$$

$$k^{n+1} = k^n + \tau \nabla_k I(\varphi)$$

Итерационный параметр τ определяется выражением:

$$\tau = \frac{\int_0^X (\varphi_{изм} - \varphi) \delta \varphi dx}{\int_0^X \delta \varphi^2 dx} \quad (10)$$

Здесь $\delta \varphi$ является решением соответствующей задачи в вариациях, которая зависит от того, какой параметр уравнения переноса идентифицируется. В случае инициализации начальных данных, задача в вариациях имеет вид:

$$\frac{\partial \delta \varphi}{\partial t} + U \frac{\partial \delta \varphi}{\partial x} = k \frac{\partial^2 \delta \varphi}{\partial x^2}$$

$$\Gamma: \varphi = 0$$

$$t = 0: \delta \varphi = \varphi^* \quad (11)$$

При идентификации поля скорости имеем задачу в вариациях следующего вида:

$$\frac{\partial \delta \varphi}{\partial t} + U \frac{\partial \delta \varphi}{\partial x} + \delta U \frac{\partial \varphi}{\partial x} = k \frac{\partial^2 \delta \varphi}{\partial x^2}$$

$$\delta U = \nabla_{U'} I(\varphi)$$

$$\Gamma: \varphi = 0$$

$$t = 0: \delta \varphi = 0 \quad (12)$$

При идентификации коэффициента турбулентной вязкости необходимо решать следующую задачу в вариациях.

$$\frac{\partial \delta \varphi}{\partial t} + U \frac{\partial \delta \varphi}{\partial x} = k \frac{\partial^2 \delta \varphi}{\partial x^2} + \delta k \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$$

$$\delta k = \nabla_k I(\varphi)$$

$$\Gamma: \varphi = 0$$

$$t = 0: \delta \varphi = 0 \quad (13)$$

Отметим, что выражения для градиентов (8) являются формально сопряженными, поэтому существует возможность организации итерационного процесса с использованием обоих выражений для более быстрого достижения минимума квадратичного функционала. Кроме этого использование той или иной формулы зависит от гладкости φ и φ^* , так как дифференцирование сильно градиентного поля может привести к нежелательным эффектам.

В случае, когда данные измерения имеются для нескольких моментов времени на исследуемом временном интервале алгоритм ничем принципиально не отличается от исследуемого. При решении сопряженной задачи в этом случае невязки прогноза задаются в 5 (в правой части уравнения в виде дополнительного источника).

Численные эксперименты проводились при следующих значениях входных параметров модели: $U = 20 \text{ см/с}$, $\Delta x = 1.4 \cdot 10^6 \text{ см}$, $\Delta t = 1.2 \cdot 10^3 \text{ сек}$, $A_M = 10^6 \text{ см}^2/\text{с}$.

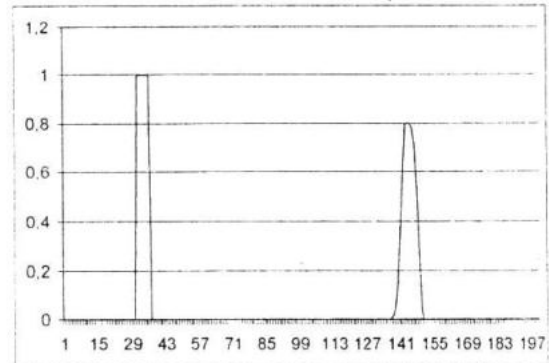


Рисунок 1 – Начальное поле и сгенерированные данные измерений ($U=20 \text{ см/с}$)

На рисунке 1 изображены начальные данные и решение уравнения (1) на конечный момент времени, который используется в качестве данных измерений при идентификации параметров модели. На рисунке 2 изображена структура квадратичного функционала качества прогноза и итерационный процесс поиска истинного значения скорости.

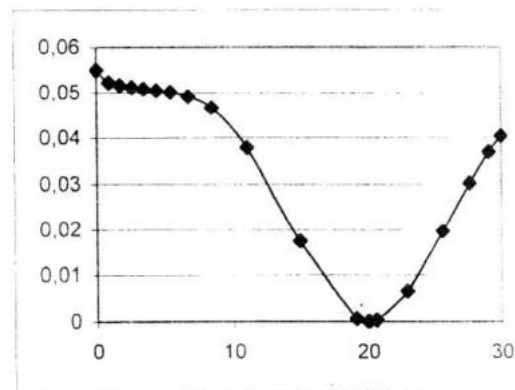


Рисунок 2 – Структура квадратичного функционала качества прогноза и итерационный процесс поиска истинного значения скорости

Из рисунка 2 видно, что поиск оптимального U сильно зависит от его начального значения.

чения. Например, если в качестве начального значения скорости взять $U = 10 \text{ см/с}$, то истинное значение будет восстановлено за 2-3 итерации. Аналогичный вывод можно сделать из рисунка 3, который изображает итерационный процесс идентификации истинного значения $U = 20 \text{ см/с}$ в случае использования оптимально итерационного параметра τ и расчет при $\tau = 1$.

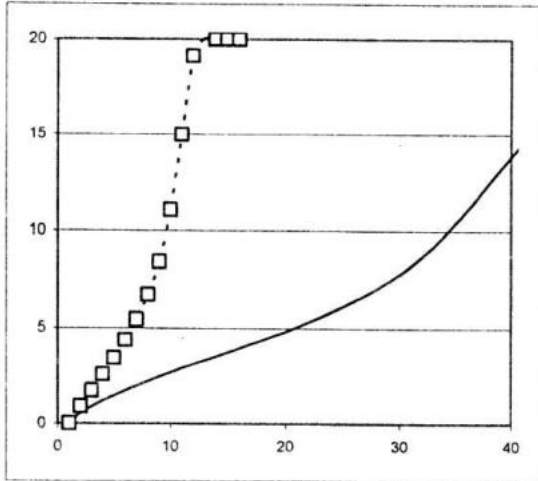


Рисунок 3 – Итерационный процесс восстановления истинного значения скорости.

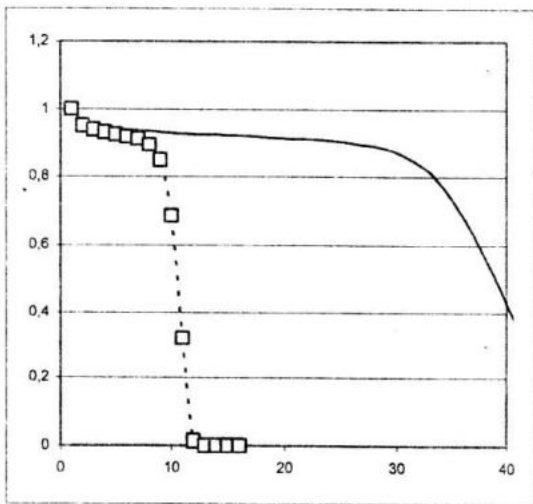


Рисунок 4 – Падение нормированного функционала качества прогноза

На рисунке 4 изображено падение нормированного функционала качества прогноза для соответствующих вариантов расчетов. В данном расчете показана важность выбора оптимального итерационного параметра. Поле апробации алгоритма идентификации поля скорости на одномерном примере была реализована аналогичная процедура в двумерном случае. Идентифицировались скорости U, V по серии спутниковых данных в которых присутствует одиночный вихрь (рисунок 5). Полученное поле скорости изображено на этом же рисунке. Из рисунка видно, что в результате работы алгоритма удалось получить антициклонический вихрь в поле скорости.

В результате численных экспериментов исследована работоспособность вариационного алгоритма идентификации. Показана важность выбора оптимальных итерационных параметров при реализации процедуры.

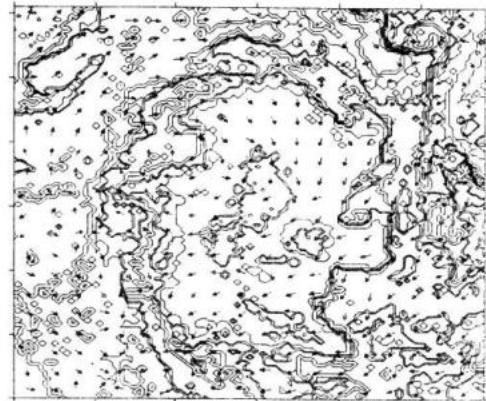


Рисунок 5 – Структура вихря и восстановленное поле скорости.

ЛИТЕРАТУРА

1. В.Н. Еремеев, В.П. Кочергин., С.В. Кочергин, С.Н. Скляр // Математическое моделирование гидродинамики глубоководных бассейнов – Севастополь: ЭКОСИ-Гидрофизика, 2002, – 238 с.
2. A. Harten High resolution schemes for hyperbolic conservation laws, I. Comput. Phys. – 1983. – P. 353 – 393.