СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЖИДКОСТИ В ДВУМЕРНОМ БАССЕЙНЕ ПЕРЕМЕННОЙ ГЛУБИНЫ

С.Ю. Артамонов

Черноморский филиал Московского Государственного Университета им. М.В. Ломоносова
г. Севастополь, ул. Героев Севастополя, 7
E-mail: sergei.artamonov@gmail.com

В работе в рамках линейной теории длинных волн получено аналитическое выражение для произвольной моды свободных колебаний жидкости в бассейне с параболическим профилем дна.

Введение. В работе [1] получены частные решения для первых двух мод свободных колебаний жидкости в бассейне с параболическим профилем дна. В данной работе найдено общее решение этой задачи.

Рассмотрим задачу о свободных длинных волнах в бассейне переменной глубины. Для определения горизонтальной составляющей скорости u и профиля свободной поверхности ζ будем исходить из уравнений [1,2]

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g\frac{\partial \zeta}{\partial x}, \qquad (1)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\frac{\partial (hu)}{\partial x}, \qquad (2)$$

считая h функцией от x. Для определения горизонтальной составляющей скорости u из (1) и (2) получим такое дифференциальное уравнение в частных производных:

$$\frac{\partial^2 (uh)}{\partial t^2} - gh\frac{\partial^2 (uh)}{\partial x^2} = 0. \qquad (3)$$

При этом граничные условия зависят от конкретного вида профиля дна бассейна. Уравнение (3) допускает решение

$$hu = f(x)\sin\sigma t, \qquad (4)$$

представляющее собою стоячие волны. Для определения $f(x)$ имеем из (3) обыкновенное дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами

$$h(x)f''(x) + \frac{\sigma^2}{g}f(x) = 0. \qquad (5)$$

Из (2) и (4) получим выражения для u и ζ:

$$\zeta = \frac{1}{\sigma}f'(x)\cos\sigma t, \qquad (6)$$

$$u = \frac{1}{h(x)}f(x)\sin\sigma t. \qquad (7)$$

Таким образом, задача о стоячих длинных волнах (сейшах) в бассейне произвольной глубины $h(x)$ сводится к решению уравнения (9); по известной функции $f(x)$ профиль свободной поверхности и горизонтальная скорость определяются формулами (6) и (7).

Проведём исследование стоячих волн в бассейне, глубина которого меняется по параболическому закону

$$h(x) = h_0\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right), \quad (-a \le x \le a). \qquad (8)$$

Для определение $f(x)$ из (5) получаем

$$\left(a^2 - x^2\right)f''(x) + bf(x) = 0. \ \left(b = \frac{\sigma^2 a^2}{gh_0}\right) \qquad (9)$$

Требуя ограниченности горизонтальной составляющей скорости на границах бассейна ($x=\pm a$), находим такие условия для $f(x)$:

$$f(\pm a) = 0. \qquad (10)$$

Уравнение (9) допускает решение в виде многочлена n-ой степени ($n\ge 2$), так как в этом случае каждое из слагаемых (9) представляет собой многочлены одинаковой степени.

Найдём решение уравнения (9) в виде многочлена произвольной степени n. Так как решение (9) должно удовлетворять граничным условиям (10), то многочлен n-ой степени будем искать в виде:

$$f(x) = A_{n-1}\left(x^2 - a^2\right)\left(x^{n-2} + \alpha_1 x^{n-3} + \alpha_2 x^{n-4} + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + \alpha_{n-4}x^2 + \alpha_{n-3}x + \alpha_{n-2}\right). \qquad (11)$$

Здесь множитель A_{n-1} взят для сохранения необходимой размерности, а $f(x)$ и соответственно u и ζ определяются с точностью до произвольного (безразмерного) множителя. Подставляя (11) в (9), получим:

$$\left(a^2 - x^2\right)f''(x) + bf(x) = A_{n-1}\left[x^n\left(b - n(n-1)\right) + \right.$$
$$+ x^{n-1}\left(\alpha_1 b - \alpha_1(n-1)(n-2)\right) +$$
$$+ x^{n-2}\left(b(\alpha_2 - a^2) + a^2 n(n-1) - (n-2)(n-3)(\alpha_2 - a^2)\right) + \ldots$$
$$+ x\left(3\cdot 2a^2\left(\alpha_{n-3} - a^2\alpha_{n-5}\right) - ba^2\alpha_{n-3}\right) +$$
$$\left. + \left(2a^2\left(\alpha_{n-2} - a^2\alpha_{n-4}\right) - ba^2\alpha_{n-2}\right)\right] = 0. \qquad (12)$$

Последнее равенство может обращаться в нуль при любых $-a < x < a$ только при равенстве нулю коэффициентов при всех степенях x. Отсюда следует, что:

$$x^n: \qquad b = n(n-1). \tag{13}$$

$$x^{n-1}: \quad \alpha_1 = 0,$$

$$x^{n-2}: \quad \alpha_2 = -\frac{a^2(n-2)(n-3)}{n(n-1)-(n-2)(n-3)},$$

$$x^{n-3}: \quad \alpha_3 = 0,$$

и т.д. Для произвольного i имеем:

$$\begin{cases} \alpha_i = -\dfrac{a^2\alpha_{i-2}(n-i)(n-i-1)}{n(n-1)-(n-i)(n-i-1)}, \text{ если } i - \text{чётное} \\ \alpha_i = 0, \text{ если } i - \text{нечётное} \\ \alpha_0 = 1. \end{cases} \tag{14}$$

Из (9) и (13) для частоты (n-1)-ой моды σ_{n-1} и периода τ_{n-1} находим следующие выражения:

$$\sigma_{n-1} = \frac{\sqrt{n(n-1)gh_0}}{a}, \tag{15}$$

$$\tau_{n-1} = \frac{2\pi a}{\sqrt{n(n-1)gh_0}}. \tag{16}$$

Откуда видно, что $\tau_n < \tau_{n-1}$.

Соотношение (14) для определения коэффициентов α_i - это рекуррентная формула (α_i выражается через α_{i-2}). Отсюда получаем и явное выражение для α_i:

$$\begin{cases} \alpha_i = \dfrac{(-1)^{\frac{i}{2}} a^i (n-i-1)\cdot\ldots\cdot(n-2)}{[n(n-1)-(n-2)(n-3)]\cdot\ldots\cdot[n(n-1)-(n-i)(n-i-1)]} \\ \text{если } i - \text{чётное, } i>1, \\ \alpha_i = 0, \text{ если } i - \text{нечётное,} \\ \alpha_0 = 1. \end{cases} \tag{17}$$

Рассмотрим отдельно случаи для чётного и нечётного числа n – степени многочлена $f(x)$. Если n – чётное, то коэффициенты $\alpha_{n-3}, \alpha_{n-5}, \alpha_{n-7}, \ldots$ равны нулю, поэтому (11) запишется в виде:

$$f(x) = A_{n-1}\left(x^2 - a^2\right)\left(x^{n-2} + \alpha_2 x^{n-4} + \alpha_4 x^{n-6} + \ldots + \alpha_{n-6}x^4 + \alpha_{n-4}x^2 + \alpha_{n-2}\right). \tag{18}$$

Все коэффициенты α_i при нечётных степенях x равны нулю, а многочлен $f(x)$ – чётная функция. Из (6) и (7) находим выражения для u_{n-1} и ζ_{n-1}:

$$u_{n-1} = -\frac{A_{n-1}a^2}{h_0}\left(x^{n-2} + \alpha_2 x^{n-4} + \alpha_4 x^{n-6} + \ldots + \alpha_{n-4}x^2 + \alpha_{n-2}\right)\cdot\sin(\sigma_{n-1}t) \tag{19}$$

$$\zeta_{n-1} = \frac{A_{n-1}}{\sigma_{n-1}}\left(nx^{n-1} + (n-2)(\alpha_2 - a^2)x^{n-3} + (n-4)(\alpha_4 - a^2\alpha_2)x^{n-5} + \ldots + 4(\alpha_{n-4} - a^2\alpha_{n-6})x^3 + 2(\alpha_{n-2} - a^2\alpha_{n-4})x\right)\cdot\cos(\sigma_{n-1}t) \tag{20}$$

Перейдём к случаю, когда n – степень многочлена $f(x)$ – нечётное число. Здесь коэффициенты $\alpha_{n-2}, \alpha_{n-4}, \alpha_{n-6}, \ldots$ равны нулю. Следовательно, (11) принимает вид:

$$f(x) = A_{n-1}\left(x^2 - a^2\right)\left(x^{n-2} + \alpha_2 x^{n-4} + \alpha_4 x^{n-6} + \ldots \alpha_{n-7}x^5 + \alpha_{n-5}x^3 + \alpha_{n-3}x\right). \tag{21}$$

Все коэффициенты α_i при чётных степенях x равны нулю, а многочлен $f(x)$ – нечётная функция. Из (6) и (7) найдём выражения для u_{n-1} и ζ_{n-1}:

$$u_{n-1} = -\frac{A_{n-1}a^2}{h_0}\left(x^{n-2} + \alpha_2 x^{n-4} + \alpha_4 x^{n-6} + \ldots + \alpha_{n-5}x^3 + \alpha_{n-3}x\right)\cdot\sin(\sigma_{n-1}t), \tag{22}$$

$$\zeta_{n-1} = \frac{A_{n-1}}{\sigma_{n-1}}\left(nx^{n-1} + (n-2)(\alpha_2 - a^2)x^{n-3} + (n-4)(\alpha_4 - a^2\alpha_2)x^{n-5} + \ldots + 3(\alpha_{n-3} - a^2\alpha_{n-5})x^2 - a^2\alpha_{n-3}\right)\cdot\cos(\sigma_{n-1}t). \tag{23}$$

В качестве примера рассмотрим решение уравнения (9) в виде многочлена 10-ой степени (девятая мода). Расчёты проводим для значения параметра $a=150000$ *м*, $h_0=2000$ *м*. Используя (17), для нахождения α_i имеем:

$$\begin{aligned} &\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = -\frac{28}{17}a^2, \\ &\alpha_3 = 0, \quad \alpha_4 = \frac{14}{17}a^4, \\ &\alpha_5 = 0, \quad \alpha_6 = -\frac{28}{221}a^6, \\ &\alpha_7 = 0, \quad \alpha_8 = \frac{7}{2431}a^8. \end{aligned} \tag{24}$$

Из (18) получаем, что $f(x)$ запишется в виде:

$$f(x) = A_9\left(x^2 - a^2\right)\left(x^8 - \frac{28}{17}a^2x^6 + \frac{14}{17}a^4x^4 - \frac{28}{221}a^6x^2 + \frac{7}{2431}a^8\right)$$

Используя (19), (20) имеем выражения для u_9 и ζ_9:

$$u_9 = -\frac{A_9a^2}{h_0}\left(x^8 - \frac{28}{17}a^2x^6 + \frac{14}{17}a^4x^4 - \frac{28}{221}a^6x^2 + \frac{7}{2431}\right)\cdot\sin(\sigma_9 t), \tag{25}$$

$$\zeta_9 = \frac{A_9}{\sigma_9}\left(10x^9 - 8a^2\frac{45}{17}x^{17} + 6a^4\frac{42}{17}x^5 -\right.$$

$$-4a^6\frac{210}{221}x^3+2a^8\frac{315}{2431}x\Bigg)\cdot\cos(\sigma_9 t), \quad (26)$$

где σ_9 определяется формулой (15). Решая численно уравнение $\zeta_9(x)=0$, находим координаты узловых точек профиля свободной поверхности девятой моды. Результаты приведены в таблице 1.

Таблица 1 – Узловые точки профиля свободной поверхности девятой моды (x_i, *км*)

x_1	-145,224
x_2	-125,405
x_3	-92,006
x_4	-48,638
x_5	0
x_6	48,638
x_7	92,006
x_8	125,405
x_9	145,224

Заметим, что корни уравнения $\zeta_9(x)=0$ симметричны относительно начала координат. Это объясняется тем, что $\zeta_9(x)$ - нечётная функция по x. Сравним модули значений ζ_9 в точках локального экстремума. Так как рассматриваются свободные колебания, то ζ_9 определяется с точностью до произвольного безразмерного множителя. Потребуем, чтобы на стенке бассейна (при $x=a$) выполнялось условие $\zeta_9(a)=1$ м. Сводка соответствующих результатов приведена в таблице 2.

Таблица 2 – Значения ζ_9 в точках локальных экстремумов

x_i, *км*	$\zeta_9(x_i)$, *м*
-150	-1
-137,930	0,4
-110,816	-0,31
-71,689	0,28
-24,792	-0,26
24,792	0,26
71,689	-0,28
110,816	0,31
137,930	-0,4
150	1

Заметим, что при приближении к середине бассейна максимумы и минимумы ζ_9 (гребни и впадины) по модулю убывают и ζ_9 достигает максимального по модулю значения на стенках бассейна.

Вычислим теперь узловые точки $u_9(x)$. Для этого решим численно уравнение $u_9(x)=0$. Результаты приведены в таблице 3.

Таблица 3 – Узловые точки горизонтальной составляющей скорости девятой моды (x_i, *км*)

x_1	-137,930
x_2	-110,816
x_3	-71,689
x_4	-24,792
x_5	24,792
x_6	71,689
x_7	110,816
x_8	137,930

Заметим, что узловые точки $u_9(x)$ совпадают с нулями уравнения $\zeta_9'(x)=0$. Это объясняется видом уравнения (9).

Так как в работе рассматриваются длинные волны, то полученные результаты будут справедливы, если длина волны значительно больше глубины бассейна.

Найдём минимальное расстояние между соседними узловыми точками профиля свободной поверхности девятой моды ζ_9. Оно равно $l=19{,}819\,км$. Отсюда

$$lh_0^{-1}=9{,}9. \quad (28)$$

В теории длинных волн можно рассматривать решение исходного дифференциального уравнения (9) в виде многочлена лишь для тех значений n (n – степень многочлена), для которых величина lh_0^{-1} значительно больше единицы.

Литература

1. Н.Е. Кочин, И.А. Кибель, Н.В. Розе. Теоретическая гидромеханика: в 2-ух т. – М: Гостехиздат, Т.1. 1955. – 560 с.
2. Л.В. Черкесов. Основы динамики несжимаемой жидкости. – Киев: Наукова думка, 1984. – 168 с.