ВОЛНЫ КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ В ПОТОКЕ ОДНОРОДНОЙ ЖИДКОСТИ С ПЛАВАЮЩИМ ЛЬДОМ

Анд.А. Букатов, Ант.А. Букатов

Морской гидрофизический институт
НАН Украины
г.Севастополь, ул. Капитанская, 2
E-mail: ocean@alpha.mhi.iuf.net

На основе метода многомасштабных асимптотических разложений получены аналитические выражения для определения характеристик волновых возмущений с точностью до величин третьего порядка малости, формируемых бегущей периодической волной конечной амплитуды в покрытом льдом однородном потоке жидкости постоянной глубины.

Введение. В линейном приближении анализ влияния плавающего ледяного покрова на волновое возмущение выполнен в [1, 2]. Распространение нелинейных волн в ледовых условиях при отсутствии потока рассмотрено в [3] для бассейна малой и в [4] – произвольной постоянной глубины. В данной работе получено аналитическое решение задачи о нелинейных возмущениях, формируемых бегущей периодической волной в однородном потоке идеальной несжимаемой жидкости с плавающим льдом.

Постановка задачи. Пусть однородная идеальная несжимаемая жидкость течет с постоянной скоростью U. Ее поверхность покрыта льдом, плывущим вместе с потоком. Рассмотрим влияние льда на распространение волн конечной амплитуды вверх и вниз по потоку. Выберем начало координат на невозмущенной поверхности лед вода. Ось z направим вертикально вверх, а ось x – горизонтально вниз по потоку. Движение жидкости будем считать потенциальным, а вертикальные смещения льда безотрывными, отслеживающими профиль взволнованной поверхности жидкости $\zeta(x,t)$. Тогда, учитывая из восстанавливающих сил только силу тяжести, для определения потенциала скорости $\varphi(x, z, t)$ возмущений основного потока в безразмерных переменных

$$x_1 = kx, \quad z_1 = kz, \quad \zeta_1 = k\zeta, \quad t_1 = \sqrt{kg}t,$$
$$\varphi_1 = \frac{k^2}{\sqrt{kg}}\varphi, \quad U_1 = \sqrt{\frac{k}{g}}U,$$

где k – волновое число, g – ускорение силы тяжести, получим уравнение Лапласа

$$\Delta\varphi = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad -H \le z \le \zeta \qquad (1)$$

с граничными условиями на поверхности ($z = \zeta$)

$$\zeta + \frac{\partial\varphi}{\partial t} + U\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{1}{2}V^2 + \\ + \kappa k\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + U\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right] = 0 \quad (2)$$

и на дне бассейна ($z = -H$)

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0. \qquad (3)$$

В начальный момент времени ($t = 0$)

$$\zeta = f(x), \quad \frac{\partial\zeta}{\partial t} = 0. \qquad (4)$$

здесь

$$V^2 = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2,$$

$\kappa = h\rho_1/\rho$, h и ρ_1 – толщина и плотность льда, ρ – плотность воды. В динамическом условии (2) выражение с множителем κ представляет собой инерцию вертикальных смещений льда. Причем второе слагаемое в квадратных скобках этого выражения характеризует нелинейность вертикального ускорения льда. Потенциал скорости φ и возвышение поверхности жидкости ζ связаны кинематическим условием

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} - \frac{\partial\zeta}{\partial x}\left(U + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) - \frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0 \qquad (5)$$

при $z = \zeta$.

Уравнения для нелинейных приближений. Решение задачи (1) – (5) найдем методом многих масштабов [5], позволяющим получить для ζ и φ равномерно пригодные разложения. Введем две новые медленно меняющиеся по сравнению с $t = T_0$ переменные $T_1 = \varepsilon t$, $T_2 = \varepsilon^2 t$, где ε малое, но конечное, и предположим, что

$$\begin{aligned} &\zeta = \varepsilon\zeta_0, \quad \varphi = \varepsilon\varphi_0, \quad f = \varepsilon f_0, \\ &\zeta_0 = \zeta_1 + \varepsilon\zeta_2 + \varepsilon^2\zeta_3 + O(\varepsilon^3), \\ &\varphi_0 = \varphi_1 + \varepsilon\varphi_2 + \varepsilon^2\varphi_3 + O(\varepsilon^3), \\ &f_0 = f_1 + \varepsilon f_2 + \varepsilon^2 f_3 + O(\varepsilon^3). \end{aligned} \qquad (6)$$

Здесь f_n – функции от x, а ζ_n, φ_n – от x, T_0, T_1, T_2. Подставим (6) в (1) – (5), имея ввиду,

что по правилу дифференцирования сложной функции

$$\frac{\partial}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial T_0}+\varepsilon\frac{\partial}{\partial T_1}+\varepsilon^2\frac{\partial}{\partial T_2}.$$

Тогда, собрав коэффициенты при одинаковых степенях ε и приравняв их нулю, для определения ζ_n, φ_n порядка ε^n, $n = 1, 2, 3$ получим уравнения

$$\Delta\varphi=0,\quad -\infty<x<\infty,\quad -H\le z\le 0,\quad (7)$$

$$\zeta_n+\frac{\partial\varphi_n}{\partial T_0}+U\frac{\partial\varphi_n}{\partial x}+$$

$$+\kappa k\frac{\partial}{\partial z}\left(U\frac{\partial\varphi_n}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_n}{\partial T_0}\right)=F_n^*,\ z=0,\quad (8)$$

$$\frac{\partial\zeta_n}{\partial T_0}+U\frac{\partial\zeta_n}{\partial x}-\frac{\partial\varphi_n}{\partial z}=L_n^*,\ z=0,\quad (9)$$

$$\frac{\partial\varphi_n}{\partial z}=0,\quad z=-H,\qquad (10)$$

$$\zeta_n=f_n(x),\quad \frac{\partial\zeta_n}{\partial T_0}=G_n,\quad t=0.\quad (11)$$

здесь

$$F_n^*=F_n+F_n^0,\ L_n^*=L_n+L_n^0,$$

$$F_1=F_1^0=L_1=L_1^0=L_2^0=G_1=0,$$

$$F_2=-\frac{\partial\varphi_1}{\partial T_1}-\zeta_1\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial T_0}+U\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right)-$$

$$-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\right)^2\right]-\kappa kF_{21},$$

$$F_{21}=\zeta_1\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(U\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_1}{\partial T_0}\right)+$$

$$+\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial\varphi_1}{\partial T_1}\right],$$

$$L_2=-\frac{\partial\zeta_1}{\partial T_1}-\frac{\partial\zeta_1}{\partial x}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}+\zeta_1\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial z^2},\ G_2=-\frac{\partial\zeta_1}{\partial T_1}$$

$$F_3=-\frac{\partial\varphi_2}{\partial T_1}-\zeta_1\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial\varphi_1}{\partial T_1}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial T_0}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right)^2+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\right)^2\right]-F_{31},$$

$$F_{31}=\frac{\partial\varphi_1}{\partial T_2}+\zeta_2\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial z\partial T_0}+\frac{1}{2}\zeta_1^2\frac{\partial^3\varphi_1}{\partial z^2\partial T_0}+$$

$$+\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\frac{\partial\varphi_2}{\partial z}-UF_{32}-\kappa kF_{33},$$

$$F_{32}=\zeta_1\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial z\partial x}+\zeta_2\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial z\partial x}+\frac{1}{2}\zeta_1^2\frac{\partial^3\varphi_1}{\partial z^2\partial x},$$

$$F_{33}=UF_{34}+\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial z\partial x}\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}+\zeta_1\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial z\partial x}\right)+$$

$$+\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\left(\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial z\partial x}+\zeta_1\frac{\partial^3\varphi_1}{\partial z^2\partial x}\right)+F_{35},$$

$$F_{34}=\zeta_1\frac{\partial^3\varphi_2}{\partial z^2\partial x}+\zeta_2\frac{\partial^3\varphi_1}{\partial z^2\partial x}+\frac{1}{2}\zeta_1^2\frac{\partial^4\varphi_1}{\partial z^3\partial x},$$

$$F_{35}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial T_1}+\frac{\partial\varphi_1}{\partial T_2}\right)+\zeta_1\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial T_1}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial T_2}\right)+$$

$$+\zeta_2\frac{\partial^3\varphi_1}{\partial z^2\partial T_0}+\frac{1}{2}\zeta_1^2\frac{\partial^4\varphi_1}{\partial z^3\partial T_0},$$

$$L_3=-\frac{\partial\zeta_2}{\partial T_1}-\frac{\partial\zeta_1}{\partial T_2}-\frac{\partial\zeta_1}{\partial x}\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}-\frac{\partial\zeta_2}{\partial x}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}-$$

$$-\zeta_1\left(\frac{\partial\zeta_1}{\partial x}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial z\partial x}-\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial z^2}\right)+L_{31},$$

$$L_{31}=\zeta_2\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial z^2}+\frac{1}{2}\zeta_1^2\frac{\partial^3\varphi_1}{\partial z^3},$$

$$G_3=-\frac{\partial\zeta_1}{\partial T_2}-\frac{\partial\zeta_2}{\partial T_1},$$

$$F_2^0=-\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}+\kappa k\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial z^2}\right)F_{21}^0,$$

$$F_{21}^0=\frac{\partial\zeta_1}{\partial T_0}+U\frac{\partial\zeta_1}{\partial x},$$

$$F_3^0=-\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}F_{31}^0-\frac{\partial\zeta_1}{\partial T_0}F_{32}^0-UF_{33}^0-\kappa kF_{34}^0,$$

$$F_{31}^0=\frac{\partial\zeta_1}{\partial T_1}+\frac{\partial\zeta_2}{\partial T_0}+\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\frac{\partial\zeta_1}{\partial x},$$

$$F_{32}^0=\frac{\partial\varphi_2}{\partial z}+\zeta_1\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial z^2},$$

$$F_{33}^0=\frac{\partial\zeta_1}{\partial x}F_{32}^0+\frac{\partial\zeta_2}{\partial x}\frac{\partial\varphi_1}{\partial z},\ L_3^0=-\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\left(\frac{\partial\zeta_1}{\partial x}\right)^2,$$

$$F_{34}^0=\left(\zeta_1\frac{\partial^3\varphi_1}{\partial z_3}+\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial z^2}\right)F_{21}^0+$$

$$+\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial z^2}\left(F_{31}^0+U\frac{\partial\xi_2}{\partial x}\right)+\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial z\partial x}\frac{\partial\xi_1}{\partial x}\frac{\partial\varphi_1}{\partial z},$$

Отметим, что слагаемые F_2^0, F_3^0, L_3^0 входящие в правые части уравнений (8), (9), обусловлены учетом зависимости ζ_0 от x и t при подстановке потенциала скорости

$$\varphi(x,\varepsilon\zeta_0,t)=\varphi(x,0,t)+\varepsilon\zeta_0\varphi_z(x,0,t)+$$

$$+\frac{1}{2}\varepsilon^2\zeta_0^2\varphi_{zz}(x,0,t)+\ldots\ldots$$

на поверхности потока $z=\zeta$ в динамическое (2) и кинематическое (3) условия.

Выражения для характеристик волнового возмущения потока. Задача сформулирована в общем случае неустановившихся возмущений конечной амплитуды на однородном потоке жидкости. Ограничимся рассмотрением бегущих периодических волн, принимая первое ($n=1$) приближение возмущений ζ_1 поверхности потока в форме

$$\zeta_1=\cos\theta,\quad \theta=x-\tau T_0+\beta(T_1,T_2). \quad (12)$$

Тогда из кинематического условия (5) находим

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}=\tau_1\sin\theta,\quad \tau_1=\tau-U,\quad z=0. \quad (13)$$

Для удовлетворения граничному условию (10) на дне запишем φ_1 в виде

$$\varphi_1=b_0\mathrm{ch}\,(z+H)\sin\theta. \quad (14)$$

После подстановки (14) в (13) получим $b_0=\tau_1/\mathrm{sh}H$. Тогда

$$\varphi_1=b\sin\theta,\ b_1=\tau_1\mathrm{sh}^{-1}H\ \mathrm{ch}\,(z+H). \quad (15)$$

Подставляя (12) и (15) в динамическое условие (8) при $n=1$, найдем дисперсионное соотношение

$$\tau_1^2=(1+\kappa k\ \mathrm{th}H)^{-1}\mathrm{th}H, \quad (16)$$

связывающее частоту и волновое число возмущений малой амплитуды [1].

Выражение, определяющее обусловленный нелинейностью фазовый сдвиг $\beta(T_1,T_2)$, определением из последующих приближений.

Подставив ζ_1 и φ_1 из (12) и (15) в правые части условий (8), (9) для второго приближения и решив задачу при $n=2$, предполагая отсутствие основной гармоники, найдем

$$\zeta_2=a_2\cos 2\theta,\quad \varphi_2=b_2\sin 2\theta, \quad (17)$$

$$a_2=\tau_1^2\frac{\eta_2}{\mu_2},\ b_2=\frac{\tau_1\nu_2\mathrm{ch}2(z+H)}{2\mu_2\mathrm{ch}2H},$$

$$\eta_2=\frac{3}{2}(\mathrm{cth}H-\mathrm{th}H+2\kappa k)(1+\mathrm{th}^2H)^{-1},$$

$$\nu_2=\mathrm{cth}H-\tau_1^2\left(\frac{5}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{cth}^2H+\kappa k\mathrm{cth}H\right),$$

$$\mu_2=2\tau_1^2(1+2\kappa k\ \mathrm{th}2H)-\mathrm{th}2H.$$

При этом θ не зависит T_1, так как $\beta=\beta(T_2)$.

Полученные решения для первого (12), (15), (16) и второго (17) приближений определяют правые части динамического (8) и кинематического (9) условий задачи для третьего ($n=3$) приближения. Исключив в них слагаемые порождающие секулярность, для ζ и φ в третьем приближении найдем

$$\zeta_3=\cos 3\theta,\ \varphi_3=b_3\sin 3\theta,$$

$$a_3=\tau_1^2\frac{\eta_3}{\mu_3},\quad b_3=\tau_1\frac{\nu_3\mathrm{ch}3(z+H)}{3\mu_3\mathrm{ch}3H},$$

$$\eta_3=l_2-[l_4+\kappa k(l_{41}-3l_2)]\mathrm{th}3H,$$

$$\nu_3=l_2-3\tau_1^2(l_4+\kappa k l_{41}),$$

$$\beta=-\frac{1}{2}\tau_1[l_1+\tau_1^2(l_3+\kappa k l_{31})]\varepsilon^2 t,$$

$$\mu_3=3\tau_1^2(1+3\kappa k\ \mathrm{th}3H)-\mathrm{th}3H,$$

$$l_1=a_2\left(\frac{1}{2}\mathrm{cth}H+\mathrm{cth}2H\right)-\frac{1}{2}\mathrm{cth}H\mathrm{cth}2H-\frac{3}{8},$$

$$l_2=3a_2\left(\frac{1}{2}\mathrm{cth}H+\mathrm{cth}2H\right)-\frac{3}{2}\mathrm{cth}H\mathrm{cth}2H+\frac{5}{8},$$

$$l_3=a_2\left(\frac{1}{2}+\mathrm{cth}H\mathrm{cth}2H\right)+\frac{5}{8}\mathrm{cth}H-\frac{1}{2}\mathrm{cth}^2H\mathrm{cth}2H,$$

$$l_{31}=a_2\left(\frac{5}{2}\mathrm{cth}H-\mathrm{cth}2H\right)+\frac{1}{2}\mathrm{cth}H(\mathrm{cth}2H-\mathrm{cth}H)+\frac{3}{8},$$

$$l_4=a_2\left(\frac{11}{2}-\mathrm{cth}H\mathrm{cth}2H\right)-\frac{15}{8}\mathrm{cth}H+\frac{1}{2}\mathrm{cth}^2H\,\mathrm{cth}2H,$$

$$l_{41}=a_2\left(5\mathrm{cth}2H-\frac{1}{2}\mathrm{cth}H\right)+\frac{1}{2}\mathrm{cth}H(\mathrm{cth}H-5\mathrm{cth}2H)-\frac{1}{8}.$$

Отметим, что $\mu_{2,3}\neq 0$ при $H\neq 0$.

Таким образом, возвышение поверхности ζ и потенциал скорости φ возмущения основного потока жидкости с плавающим льдом с точностью до величин третьего порядка малости определяются выражениями

$$\zeta=\sum_{n=1}^{3}\varepsilon^n a_n\cos\theta,\ \varphi=\sum_{n=1}^{3}\varepsilon^n b_n\sin\theta, \quad (18)$$

$$\theta = x - \sigma t,\ \ \sigma = U \pm \tau_1\left(1 + \varepsilon^2\sigma_0\right),$$

$$\sigma_0 = \frac{1}{2}\left[l_1 + \tau_1^2\left(l_3 + \kappa k l_{31}\right)\right],\ \ a_1 = 1,$$

где знаки плюс и минус перед τ_1 в квадратных скобках характеризуют возмущения, бегущие вниз и вверх по потоку соответственно, а τ_1 имеет вид (16).

В размерных величинах

$$\zeta = a\cos\theta + a^2 k a_2 \cos 2\theta + a^3 k^2 a_3 \cos 3\theta, \quad (19)$$

$$\varphi = a\sqrt{g/k}\, b_1 \sin\theta + a^2\sqrt{kg}\, b_2 \sin 2\theta + a^3 k\sqrt{kg}\, b_3 \sin 3\theta,$$

$$\theta = kx - \sigma t,\ \ \sigma = kU \pm \sqrt{kg}\,\tau_1\left(1 + \varepsilon^2\sigma_0\right)$$

$$\tau_1 = \sqrt{\left(1 + \kappa k\ \mathrm{th}kH\right)^{-1}\mathrm{th}kH},$$

где $a = \varepsilon/k$ – амплитуда начальной гармоники. Фазовую скорость волнового возмущения определим по формуле

$$\nu = U \pm \sqrt{g/k}\,\tau_1\left(1 + \varepsilon^2\sigma_0\right). \quad (20)$$

Если при выводе кинематического и динамического граничных условий для нелинейных приближений пренебречь зависимостью ζ_0 от x и t в выражении потенциала скорости на поверхности потока (полагая F_2^0, F_3^0, L_3^0 равными нулю в (8), (9)), то в формулах (18) – (20), определяющих решение задачи, следует учесть, что

$$\eta_2 = \frac{1}{2}\left(3\mathrm{cth}H - \mathrm{th}H + 8\kappa k\right)\left(1 + \mathrm{th}^2 H\right)^{-1},$$

$$\nu_2 = \mathrm{cth}H - \frac{1}{2}\tau_1^2\left(3 - \mathrm{cth}^2 H\right),$$

$$l_1 = a_2\left(\frac{1}{2}\mathrm{cth}H + \mathrm{cth}2H\right) - \frac{1}{2}\mathrm{cth}H\mathrm{cth}2H + \frac{3}{8},$$

$$l_2 = 3a_2\left(\frac{1}{2}\mathrm{cth}H + \mathrm{cth}2H\right) - \frac{3}{2}\mathrm{cth}H\mathrm{cth}2H + \frac{3}{8},$$

$$l_3 = a_2\left(\mathrm{cth}H\mathrm{cth}2H - \frac{3}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}\mathrm{cth}H\mathrm{cth}2H - \frac{9}{8}\right)\mathrm{cth}H,$$

$$l_{31} = 3a_2\left(\frac{1}{2}\mathrm{cth}H - \mathrm{cth}2H\right) + \left(\frac{3}{2}\mathrm{cth}2H - \frac{1}{4}\mathrm{cth}H\right)\mathrm{cth}H + \frac{3}{8},$$

$$l_4 = a_2\left(\frac{7}{2} - \mathrm{cth}H\mathrm{cth}2H\right) + \left(\frac{1}{2}\mathrm{cth}H\mathrm{cth}2H - \frac{11}{8}\right)\mathrm{cth}H,$$

$$l_{41} = 3a_2\left(\mathrm{cth}2H - \frac{1}{2}\mathrm{cth}H\right) + 3\left(\frac{1}{4}\mathrm{cth}H - \frac{1}{2}\mathrm{cth}2H\right)\mathrm{cth}H - \frac{1}{8}.$$

В таком случае a_2, a_3, σ_0 на глубокой воде ($kH >> 1$) при отсутствии потока ($U = 0$) и льда ($h = 0$) принимают значения $1/2$, $3/8$, $1/2$, совпадающие с полученными в [6] при обычном разложении по малому параметру.

Заключение. Таким образом, методом многих масштабов получены асимптотические разложения до величин третьего порядка малости для возвышения поверхности лед – вода и потенциала скорости нелинейных возмущений, формируемых бегущей периодической волной в однородном потоке идеальной жидкости с плавающим битым льдом.

Литература

1. Д.Е. Хейсин Динамика ледяного покрова. – Л.: Гидрометеоиздат. 1967. – 215 с.
2. А.Е. Букатов Влияние ледового сжатия на неустановившиеся изгибно-гравитационные волны // Океанология. 1980. – XX, №4. – С. 600–606.
3. А.Т. Ильичев, А.В. Марченко О распространении длинных нелинейных волн в тяжелой жидкости под ледяным покровом // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1989. №1. – С. 88–95.
4. A.E. Bukatov, A.A. Bukatov Propagation of surface waves of finite amplitude in a basin with floating broken ice // Int. Journal of Offshore and Polar Engineering. 1999. – 9, №3. – P. 161–166.
5. А.Х. Найфе Методы возмущений. – М.: Мир. 1976. – 455 с.
6. G.G. Stokes On the theory of oscillatory waves // Math. Phys. Pap. Cambr. Univ. press. 1847. – 1. – P. 197–229.