

# СКОРОСТИ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ В БЕГУЩЕЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ВОЛНЕ КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ

Ант.А. Букатов, О.М. Букатова

Морской гидрофизический институт  
НАН Украины  
г.Севастополь, ул. Капитанская, 2  
E-mail: ocean@alpha.mhi.iuf.net

На основе асимптотического разложения потенциала скорости, полученного методом многих масштабов до величин третьего порядка малости, проведен анализ распределения составляющих скорости движения жидких частиц в бегущей периодической поверхностной волне конечной амплитуды.

**Введение.** В линейной постановке исследование скорости волновых течений в однородной жидкости выполнено в [1]. Стационарный перенос жидких частиц в направлении распространения нелинейной периодической волны, предсказанный теорией Стокса [2], рассмотрен в [3–5] при бесконечной и в [6–8] при конечной глубине бассейна без количественного анализа распределения составляющих скорости движения жидких частиц по длине волны.

В настоящей работе на основе асимптотического разложения потенциала скорости, полученного в [9] методом многих масштабов [10] до величин третьего порядка малости, проведен анализ распределения составляющих скорости в бегущей нелинейной периодической волне и рассмотрена зависимость отношения максимальных по длине волны значений вертикальной и горизонтальной составляющих скорости от волнового числа.

**Постановка задачи.** Пусть неограниченный в горизонтальных направлениях бассейн глубины  $H$  заполнен однородной идеальной несжимаемой жидкостью. Рассмотрим распространение периодических волн малой, но конечной амплитуды, предполагая движение жидкости потенциальным. В безразмерных переменных  $x_1 = kx$ ,  $z_1 = kz$ ,  $t_1 = \sqrt{kg}t$ , где  $k$  – волновое число, а  $g$  – ускорение силы тяжести, задача заключается в решении уравнения Лапласа

$$\Delta\varphi = 0, \quad -\infty < x < +\infty, \quad -H \leq z \leq \zeta \quad (1)$$

с граничными условиями на свободной поверхности жидкости

$$\zeta - \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial\varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial\varphi}{\partial z} \right)^2 \right] = 0, \quad z = \zeta \quad (2)$$

и на дне бассейна

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0, \quad z = -H. \quad (3)$$

В начальный момент времени ( $t = 0$ )

$$\zeta = f(x), \quad \frac{\partial\zeta}{\partial t} = 0. \quad (3)$$

Потенциал скорости  $\varphi(x, z, t)$  и возвышение свободной поверхности  $\zeta(x, t)$  связаны кинематическим условием

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} - \frac{\partial\zeta}{\partial x} \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0, \quad z = \zeta. \quad (5)$$

**Аналитические выражения для составляющих скорости движения жидких частиц.** Решение сформулированной задачи (1)–(5), полученное методом многомасштабных асимптотических разложений для случая бегущих периодических волн, имеет вид

$$\zeta = \sum_{n=1}^3 \varepsilon^n a_n \cos n\theta, \quad \varphi = \sum_{n=1}^3 \varepsilon^n (b_n \sin n\theta + \varphi_n^*)$$

где

$$\varepsilon = ak, \quad \theta = x + \sigma t,$$

$$\sigma = \tau \left( 1 + \frac{1}{2} \varepsilon^2 (l_3 - l_1 \coth^{-1} H) \right), \quad \tau^2 = \tanh H,$$

$$a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{\tau^2}{\tanh 2H - 2\tau^2} \cdot \left( \tanh 2H - \frac{\tanh 2H}{4 \sinh^2 H} - \coth H \right),$$

$$a_3 = \frac{\tau^2 (l_2 \tanh 3H - l_4)}{\tanh 3H - 3\tau^2}, \quad b_1 = \tau \frac{\cosh(z+H)}{\sinh H},$$

$$b_2 = \tau \left( a_2 - \frac{1}{2} \coth H \right) \cosh 2(z+H) \sinh^{-1} 2H,$$

$$b_3 = \tau \left( a_3 - \frac{1}{3} l_4 \right) \cosh 3(z+H) \sinh^{-1} 3H,$$

$$l_1 = -\frac{1}{2} a_2 - \frac{5}{8} \coth H - \coth 2H \coth H \left( a_2 - \frac{1}{2} \coth H \right),$$

$$l_2 = \frac{5}{2} a_2 - \frac{3}{8} \coth H + (3 - \coth H \coth 2H) \left( a_2 - \frac{1}{2} \coth H \right),$$

$$l_3 = \frac{1}{2} (\coth H + 2 \coth 2H) a_2 - \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \coth 2H \coth H,$$

$$l_4 = \frac{3}{2} a_2 \coth H + \frac{5}{8} + 3 \left( a_2 - \frac{1}{2} \coth H \right) \coth 2H,$$

$$\varphi_1^* = 0, \quad \varphi_2^* = \frac{\tau^2}{4} (\coth^2 H + 1) t,$$

$$\varphi_3^* = -\tau \frac{1}{2} (l_3 + l_1 \coth^{-1} H) \cdot \sin \theta \cosh(z+H) \sinh^{-1} H.$$

Отсюда для составляющих скорости частиц жидкости найдем

$$u = \frac{\partial}{\partial x} (\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3), \quad w = \frac{\partial}{\partial z} (\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3),$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = \tau \cosh(z+H) \sinh^{-1} H \cos \theta,$$

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} = 2\tau \left( a_2 - \frac{1}{2} \coth H \right) \cdot \cosh 2(z+H) \sinh^{-1} 2H \cos 2\theta,$$

$$\frac{\partial \varphi_3}{\partial x} = 3\tau \left( a_3 - \frac{1}{3} l_4 \right) \frac{\cosh 3(z+H)}{\sinh 3H} \cos 3\theta - \frac{\tau}{2} (l_3 + l_1 \coth H) \cos \theta \frac{\cosh(z+H)}{\sinh H},$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = \tau \sinh(z+H) \sinh^{-1} H \sin \theta,$$

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial z} = 2\tau \left( a_2 - \frac{1}{2} \coth H \right) \cdot \sinh 2(z+H) \sinh^{-1} 2H \sin 2\theta,$$

$$\frac{\partial \varphi_3}{\partial z} = 3\tau \left( a_3 - \frac{1}{3} l_4 \right) \frac{\sinh 3(z+H)}{\sinh 3H} \sin 3\theta - \frac{\tau}{2} (l_3 + l_1 \coth H) \sin \theta \frac{\sinh(z+H)}{\sinh H}.$$

В размерных величинах скорости волновых течений до величин третьего порядка малости имеют вид

$$u = \sqrt{kg} \frac{\partial}{\partial x} (a\varphi_1 + ka^2\varphi_2 + k^2a^3\varphi_3),$$

$$w = \sqrt{kg} \frac{\partial}{\partial z} (a\varphi_1 + ka^2\varphi_2 + k^2a^3\varphi_3).$$

**Анализ результатов.** Для количественной оценки величин составляющих скорости жидкости и их распределения по длине волны проводились численные расчеты. На рисунке 1 для иллюстрации приведены зависимости  $u(x)$  (штриховая линия) и  $w(x)$  (сплошная линия) при  $H = 25\text{ м}$ ,  $t = 0$ ,  $k = 0.01\text{ м}^{-1}$ ,  $a = 1.2\text{ м}$ . Такие значения соответствуют длине волны  $\lambda = 628\text{ м}$ , периоду  $\tau = 12.43\text{ с}$  и фазовой скорости волны  $v = 50.57\text{ м/с}$ . Видно, что в точках экстремальных значений на профиле  $u(x)$  вертикальная составляющая скорости, как и в линейном случае, равна нулю. Однако в точках на профиле  $w(x)$  экстремальным величинам вертикальной составляющей скорости отвечают не нулевые значения горизонтальной составляющей  $u(x)$ .

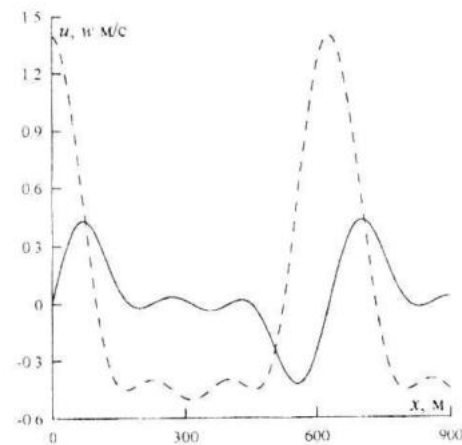


Рисунок 1 – Распределение составляющих скорости движения жидкости вдоль профиля волны

Отметим, что распределение горизонтальной составляющей скорости вдоль направления распространения волн имеет вид, качественно похожий на профиль возвышения свободной поверхности.

Отношение максимальных по длине волны значений вертикальной к горизонтальной составляющих скорости приведено на рисунке 2 для  $H = 10$  м. Штриховая линия отвечает линейному случаю, а линии 1 и 2 соответствуют значениям амплитуды 1 м и 2 м нелинейной волны.

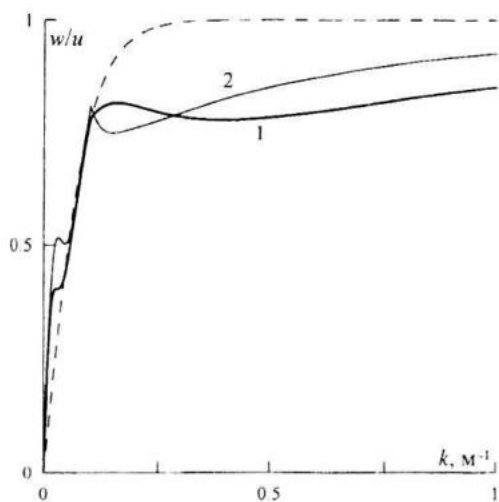


Рисунок 2 – Зависимость отношения максимальных по длине волны значений  $w$  и  $u$  от волнового числа

Графики показывают, что рассматриваемое отношение всегда меньше единицы. Следовательно, горизонтальная составляющая скорости больше вертикальной. При малой глубине отношение изменяется с длиной волны не монотонно. При уменьшении длины волны величина этого отношения приближается к единице, что свидетельствует об уменьшении влияния нелинейности.

**Заключение.** Таким образом, на основе метода многомасштабных асимптотических разложений с точностью до величин третьего порядка малости получены выражения для определения составляющих скорости движения жидких частиц в бегущей перио-

дической нелинейной волне в слое однородной несжимаемой жидкости конечной глубины. Рассмотрено распределение составляющих скорости вдоль профиля волны и зависимость отношения максимальных по длине волны значений вертикальной к горизонтальной составляющих от волнового числа. Показано, что это отношение приближается к единице при уменьшении длины волны.

## Литература

1. А.Е. Букатов, В.В. Жарков Влияние битого льда на скорость волновых течений при прохождении прогрессивных волн над уступом дна // Морской гидрофизический журнал, 2001. – №5. – С. 3–14.
2. G.G. Stokes On the theory of oscillatory waves // Math. Phys. Pap. Cambr. Univ. Press., 1847. – 1. – P. 197–229.
3. С.В. Нестеров Возбуждение волн конечной амплитуды бегущей системой давления // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана, 1968. – 4, №10. – С. 1123–1125.
4. Дж. Ньюмен Морская гидродинамика. – Л.: Судостроение, 1985. – 386 с.
5. M.S. Longuet-Higgins Lagrangian moments and mass transport in Stokes Waves // J. Fluid Mech., 1987. – 179. – P. 547–555.
6. Л.Н. Сретенский Теория волновых движений жидкости. – М.–Л.: ОНТИ, 1936. – 304 с.
7. Ю.З. Алешков Течения и волны в океане. – СПб.: Изд-во С.-Петербургского университета, 1996. – 228 с.
8. M.S. Longuet-Higgins Lagrangian moments and mass transport in Stokes Waves. Part 2. Water of finite depth // J. Fluid Mech., 1988. – 186. – P. 321–336.
9. А.Е. Букатов, А.А. Букатов Нелинейные поверхностные волны в бассейне с плавающим битым льдом // Морской гидрофизический журнал, 2002. – №5. – С. 34–46.
10. А.Х. Найфе Методы возмущений. – М.: Мир, 1976. – 455 с.