

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ФУНКЦИЙ ВЛИЯНИЯ ПРИ РЕШЕНИИ ЭКОЛОГИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

B.C. Кочергин

Морской гидрофизический институт
НАН Украины
г. Севастополь, ул. Капитанская, 2
E-mail: ko4ep@mail.ru

На примере модели переноса пассивной примеси рассматриваются функции влияния для различных районов Черного моря. Расчеты проведены при заданных климатических полях скоростей. Анализируются полученные результаты численного интегрирования соответствующих сопряженных задач, производится сравнение со спутниковыми данными.

При решении экологических задач часто необходимо следить не за значениями концентрации в каждой точке расчетной области, а за некоторыми интегральными характеристиками. Такими величинами могут быть суммарная или средняя концентрация примеси в некоторой интересующей нас области. Такие характеристики можно вычислять непосредственно по значениям концентрации.

При этом эти значения концентрации на конечный момент интегрирования ищутся путем решения модели переноса с заданными начальными данными и функциями источников загрязнения. Таким образом, задавая различные начальные данные или различные функции источников, мы получаем серию полей концентрации, для которых вычисляем некоторый функционал в исследуемой области. Среди таких расчетов можно выбрать наиболее оптимальный с точки зрения не превышения функционалом некоторых его допустимых значений. С другой стороны решение подобного рода задач может быть упрощено на основе метода сопряженных уравнений. При этом, в соответствии с [1–4] сопряженная задача решается один раз и исследуемое значение функционала может быть вычислено при различных начальных полях и функции источником. Для реализации такого алгоритма в качестве модели переноса пассивной примеси в области D , $D_t = D \times [0, \bar{t}]$ рассмотрим уравнение:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + AC = f,$$

$$A = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} - k \frac{\partial^2}{\partial z^2} - A_H \Delta \quad (1)$$

с краевыми условиями:

$$\Gamma : \frac{\partial C}{\partial n} = 0 \quad (2)$$

и начальными данными:

$$t = 0 : C = C_0, \quad (3)$$

где C – концентрация примеси; f – функция источников; C_0 – начальное поле концентрации; k – вертикальный коэффициент турбулентной диффузии; A_H – горизонтальный коэффициент турбулентной диффузии; n – нормаль к границе Γ (области интегрирования D); $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ –

оператор Лапласа. Задача (1) решается в области интегрирования D , на временном интервале $[0, \bar{t}]$.

В соответствии с [1] поставим сопряженную задачу:

$$-\frac{\partial C^*}{\partial t} + A^* C^* = p,$$

$$A^* = -\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\partial W}{\partial z} - k \frac{\partial^2}{\partial z^2} - A_H \Delta \quad (4)$$

с краевыми условиями:

$$\Gamma : \frac{\partial C^*}{\partial n} = 0 \quad (5)$$

и начальными данными:

$$t = 0 : C^* = h, \quad (6)$$

где p и h пока не определены, а оператор уравнения (4) является формально сопряженным к оператору уравнения (1).

Помножим скалярно (1) на C^* (пока произвольную функцию):

$$\left(\frac{\partial C}{\partial t} + AC - f, C^* \right)_{D_t} = 0 \quad (7)$$

где скалярное произведение определяется следующим образом:

$$(C, C^*)_{D_t} = \int_0^{\bar{t}} (C, C^*)_{D_t} dt = \int_0^{\bar{t}} \int_D C \cdot C^* dD dt \quad (8)$$

Пусть область интегрирования:

$$D = [x_1(y, z), x_2(y, z)] \times [y_1(x, z), y_2(x, z)] \times [0, H(x, y)],$$

тогда введем обозначение:

$$\begin{aligned}\Gamma_{yz} &= [y_1(x, z), y_2(x, z)] \times [0, H(x, y)], \\ \Gamma_{xz} &= [x_1(y, z), x_2(y, z)] \times [0, H(x, y)], \\ \Gamma_{xy} &= [x_1(y, z), x_2(y, z)] \times [y_1(x, z), y_2(x, z)], \\ \Gamma_{yzt} &= \Gamma_{yz} \times [0, \bar{t}], \\ \Gamma_{xzt} &= \Gamma_{xz} \times [0, \bar{t}], \\ \Gamma_{xyt} &= \Gamma_{xy} \times [0, \bar{t}],\end{aligned}$$

где $H(x, y)$ – рельеф дна исследуемого бассейна.

В (8) произведем интегрирование по частям:

$$\begin{aligned}&\left(-\frac{\partial C^*}{\partial t} + A^* C^*, C \right)_{D_t} + \left(C, C^* \right)_{D_t} \Big|_0^t - \\ &- \left(k \frac{\partial C}{\partial z}, C^* \right)_{\Gamma_{yzt}} \Big|_0^H + \left(k C, \frac{\partial C^*}{\partial z} \right)_{\Gamma_{yzt}} \Big|_0^H - \\ &- \left(A_H \frac{\partial C}{\partial x}, C^* \right)_{\Gamma_{xzt}} \Big|_{x_1}^{x_2} + \left(A_H C, \frac{\partial C^*}{\partial x} \right)_{\Gamma_{xzt}} \Big|_{x_1}^{x_2} - \\ &- \left(A_H \frac{\partial C}{\partial y}, C^* \right)_{\Gamma_{xyt}} \Big|_{y_1}^{y_2} + \left(A_H C, \frac{\partial C^*}{\partial y} \right)_{\Gamma_{xyt}} \Big|_{y_1}^{y_2} + \\ &+ (UC, C^*)_{\Gamma_{yzt}} \Big|_{x_1}^{x_2} + (VC, C^*)_{\Gamma_{yzt}} \Big|_{y_1}^{y_2} + \\ &+ (WC, C^*)_{\Gamma_{xyt}} \Big|_0^H - (f, C)_{D_t} = 0\end{aligned}\quad (9)$$

Учитывая (2) выбираем C^* , как решение (4)–(6), при условии выполнения уравнения неразрывности в D . Кроме этого для U, V, W выполняются условия твердой крышки на поверхности моря и непротекания на соответствующих участках границ. Тогда (9) преобразуется к следующему виду:

$$\begin{aligned}&\int_{D_t} p \cdot C dD_t + \int_D h \cdot C_t dD = \\ &= \int_{D_t} f \cdot C^* dD_t + \int_D C_0 \cdot C_0^* dD.\end{aligned}\quad (10)$$

В случае отсутствия источников загрязнения имеем:

$$\int_{D_t} p \cdot C dD_t + \int_D h \cdot C_t dD = \int_D C_0 \cdot C_0^* dD. \quad (11)$$

Если в качестве функционала задачи берется суммарная концентрация примеси в области Ω на конечный момент времени:

$$I = \int_{\Omega} C_i d\Omega, \quad (12)$$

то выбираем:

$$p = 0 \text{ и } h = \begin{cases} 1 & \text{в } \Omega \\ 0 & \text{вне } \Omega \end{cases}. \quad (13)$$

Из (11) имеем:

$$\int_{\Omega} C_i d\Omega = \int_D C_0 \cdot C_0^* dD. \quad (14)$$

Решение сопряженной задачи (4)–(6) с условием (13) является весовой функцией в (14) при начальных данных. Решив один раз сопряженную задачу, задавая различные C_0 можно по формуле (14) сразу вычислять значения функционала (12) в интересующей нас области. То есть по C_0^* можно судить какие области D оказывают влияние на формирование полей в Ω .

Проиллюстрируем возможности данного подхода следующим расчетом, в котором сопряженная модель (5)–(7) интегрировалась при $A_H = 3 \cdot 10^4 \text{ см}^2/\text{с}$, k, U, V, W – были рассчитаны по модели [5] на пяти километровой сетке. Эти входные данные имелись на каждые сутки, а для промежуточных моментов времени производилась линейная интерполяция. При численной реализации (5)–(7) использовался метод TVD-аппроксимаций [6, 7].

Анализируя данные о концентрации коколитофорид на 10 мая 2006 года, представленные на рисунке 1, важно знать, какие районы Черного моря ответственны за такую структуру в известном поле концентрации, и как они коррелируют с имеющейся информацией на 26 апреля этого же года, которая представлена на рисунке 2. На рис. 2 обозначена интересующая нас область в поле концентрации коколитофорид. Задача рассматривается на временном интервале 15 суток. Выбирая в качестве функционала задачи выражение (8) и решая сопряженную задачу (5)–(7) с (9) мы получаем решение, которое является весовым множителем при соответствующих входных параметрах. Такая функция влияния показана на рисунке 3, представлен результат, обозначенный черным маркером, рассчитанный с климатическими полями скоростей.

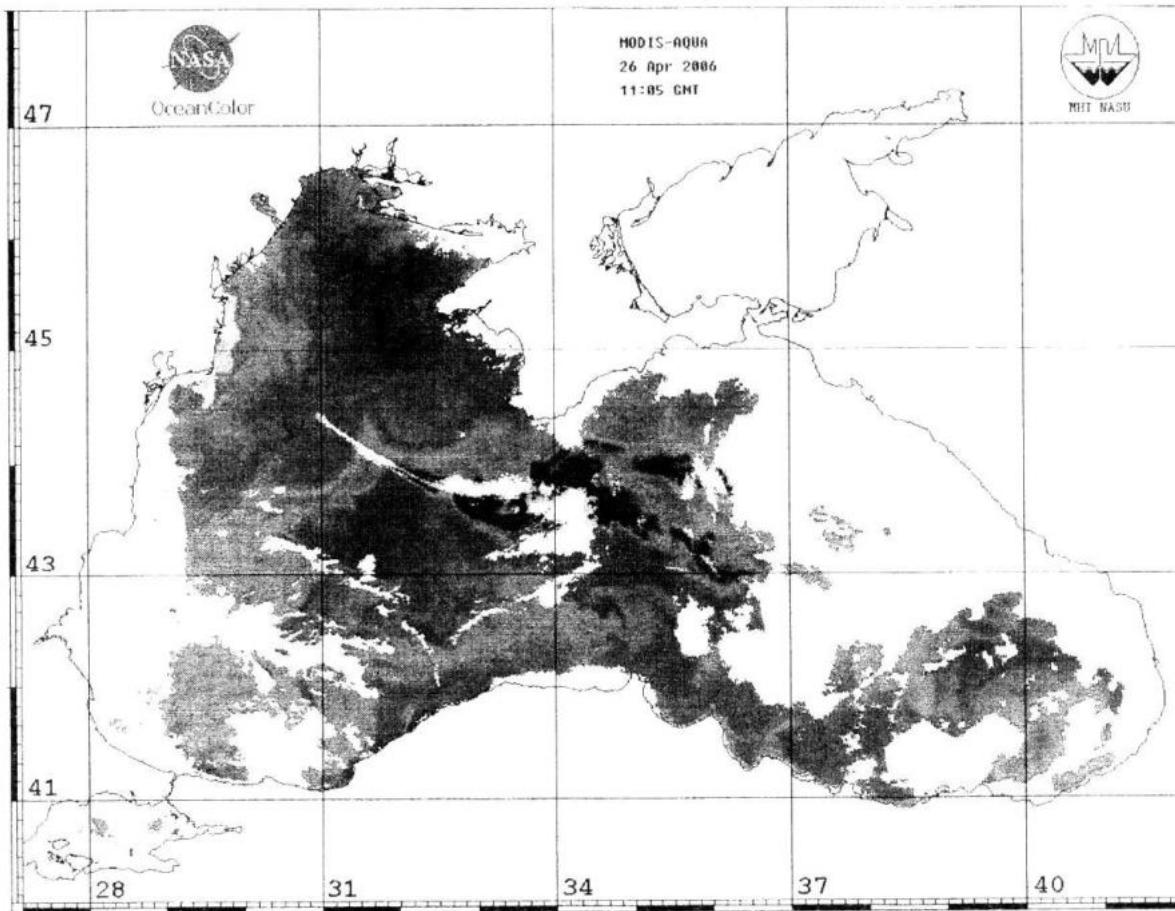


Рисунок 1 – Концентрация коколитофорид на 26 апреля

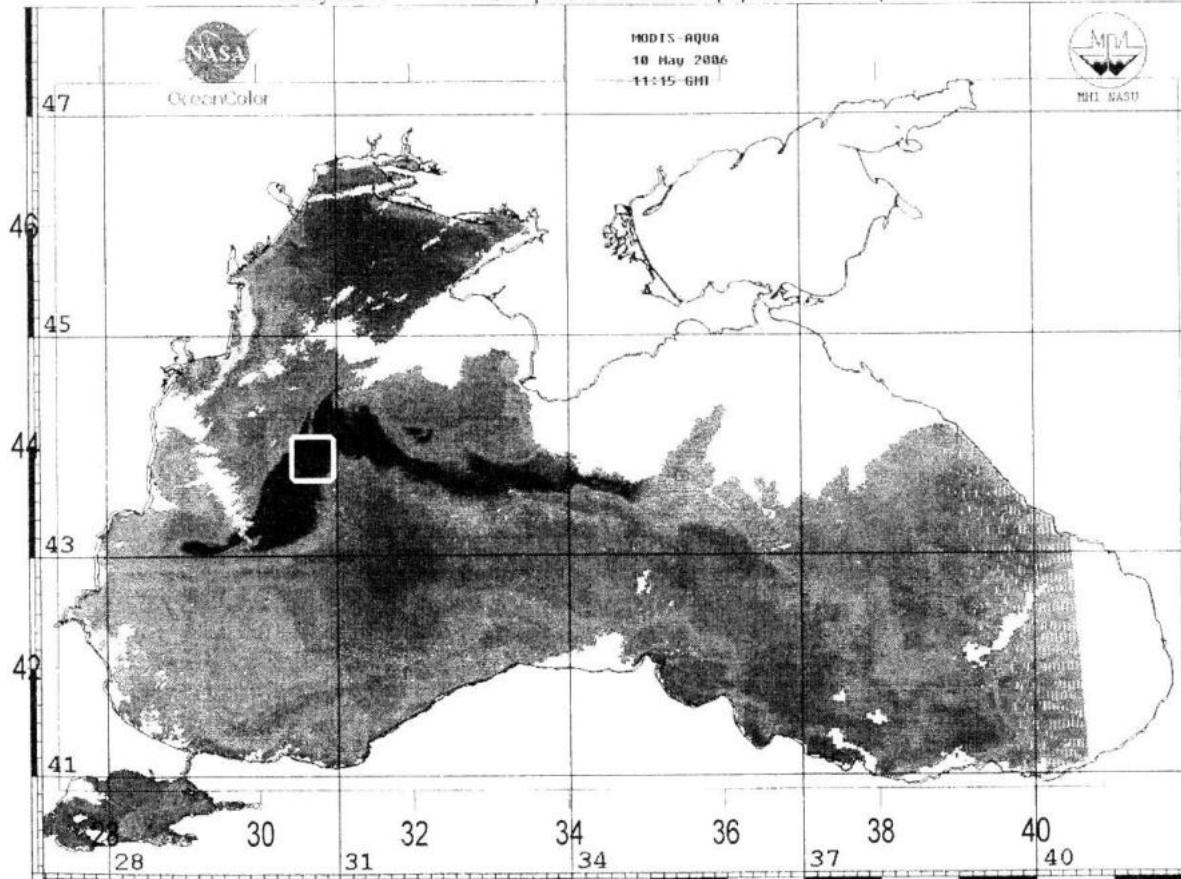


Рисунок 2 – Концентрация коколитофорид на 10 мая и исследуемая область Ω

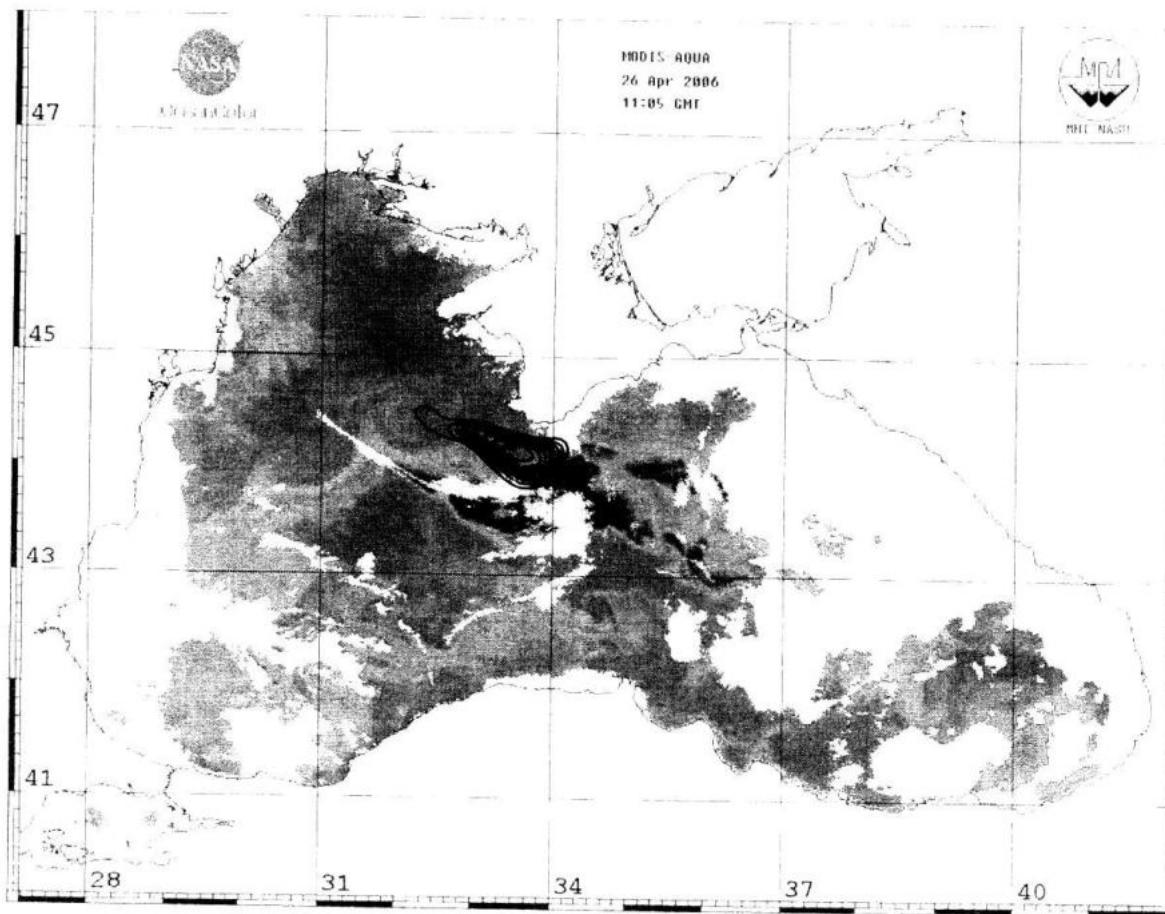


Рисунок 3 Решение сопряженной задачи для исследуемой области

Видно, что имеется хорошее соответствие между данными измерений и полученным решением сопряженной задачи. Максимум в концентрации коколитофорид сформировался, в основном, в области южнее Крымского полуострова. Это хорошо соответствует пространственной структуре коколитофорид в поверхностном слое Черного моря, несмотря на климатический характер используемого поля скорости. При наличии реальных данных о поле скорости такой расчет может быть существенно уточнен.

Ввиду большого объема информации, имеющейся в трехмерных полях скоростей и коэффициентов, умозрительные заключения о возможных источниках загрязнений весьма затруднительны. При использовании сопряженных уравнений удается точно проследить все изменения в полях и указать возможные районы формирования исследуемой примеси.

Л и т е р а т у р а

1. Марчук Г.И. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. – М.: Наука, 1982. – 320 с.
2. Марчук Г.И. Основные и сопряженные уравнения динамики атмосферы и океана. – Метеорология и гидрология, 1974, № 2. – С. 17–34.
3. Марчук Г.И., Методы вычислительной математики. – М.: Наука, 1977. – 455 с.
4. Лионе Ж.Л. Ценность. Сопряженная функция. – М.: Атомиздат, 1972. – 175 с.
5. Knysh V.V., Demyshev S.G., Korotaev G.K. and Sarkisyan A.S. Four-dimensional climate of season Black Sea circulation. – Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling, 2001, vol. 16, №. 5. – P. 409–426.
6. Harten A. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws. I. Comput. Phys. – 1983. – P. 353–393.
7. Pietrzak J. The use of TVD limiters for forward-time upstream-biased advection schemes in ocean modeling – Mon. Wea. Rev., 1998, vol. 126. – P. 812–830.