ТОПОГРАФИЧЕСКИЕ ВНУТРЕННИЕ ВОЛНЫ, ГЕНЕРИРУЕМЫЕ НЕСТАЦИОНАРНЫМ ТЕЧЕНИЕМ

В.Ф. Санников

Морской гидрофизический институт
НАН Украины
г. Севастополь, ул. Капитанская, 2
E-mail: vf_sannikov@mail.ru

Представлена математическая модель, позволяющая в линейной постановке с использованием длинноволнового приближения, рассчитывать поля внутренних волн, генерируемых локальной неровностью дна в нестационарном пространственно однородном потоке. Проведен анализ распределения по горизонтали амплитуд одной внутренней моды в ближней области.

Введение. Волны, образующиеся за препятствиями под действием набегающего потока, являются одними из наиболее распространенных в природе. Моделированию топографических волн, генерируемых стационарными течениями, посвящено большое число работ (см., например, обзоры в [1, 2]). Учет изменений со временем параметров течений, характерных для природных явлений, затруднителен, поскольку значительно усложняет решение соответствующих гидродинамических задач, поэтому сопутствующие эффекты изучены мало.

В настоящей работе на основе простой гидродинамической модели [3] получено пригодное для вычислений решение соответствующей задачи о длинных волнах, генерируемых локальной неровностью дна в однородном нестационарном потоке стратифицированной жидкости. Выполнен анализ особенностей формирования поля вынужденных внутренних волн. Использовано линейное приближение квазистатики, граничное условие «твердой крышки» на поверхности жидкости, отфильтровывающее поверхностные волны. Предполагается, что горизонтальный масштаб изменчивости потока во много раз больше длин генерируемых волн. В развитие модели [3] учитывается вращение Земли в приближении f – плоскости. Проведен анализ распределения по горизонтали амплитуд одной внутренней моды и зависимость этого распределения от скорости течения и географической широты.

Математическая модель. Рассматривается безграничный в горизонтальных направлениях $-\infty < x,\ y < +\infty$ слой невязкой несжимаемой жидкости глубины $-H+hf(x,y)$. В невозмущенном состоянии плотность жидкости $\rho_0(z)$ зависит только от одной вертикальной координаты z.

Поле вертикальных смещений жидких частиц $\zeta(x,y,z,t)$, генерируемое малой неровностью дна $hf(x,y)$ в стратифицированном потоке $\mathbf{v}_0(t)=(u_0(t),\ v_0(t))$, является решением уравнения [3]

$$\left(D^2+l^2\right)\zeta_{zz}+N^2(z)\Delta_2\zeta=0 \qquad (1)$$

с граничными и начальными условиями

$$\zeta=0 \quad (z=0), \quad \zeta=hf(x,y) \quad (z=-H); \qquad (2)$$

$$\zeta(x,y,z,0)=-hf(x,y)z/H, \quad \partial\zeta(x,y,z,0)/\partial t=0,$$

где $D=\partial/\partial t+u_0\partial/\partial x+v_0\partial/\partial y$; l – параметр Кориолиса; $N(z)$ – частота Вяйсяля-Брента; g– ускорение свободного падения.

Решение нестационарной пространственной задачи (1), (2) строится в виде разложения по модам внутренних волн

$$\zeta=h\left(-\frac{z}{H}f(x,y)+\sum_{n=1}^{\infty}Z_n(z)B_n(x,y,t),\right)$$

где $Z_n(z)$ – собственные функции; λ^2_n – собственные значения задачи Штурма-Лиувилля

$$d^2Z_n/dz^2+\lambda^2_n N^2Z_n=0, \quad Z_n(-H)=Z_n(0)=0,$$

удовлетворяющие условию нормировки

$$\int_{-H}^{0}N^2Z_nZ_m dz=0\,(n\neq m), \quad \int_{-H}^{0}N^2Z_n^2 dz=1.$$

Значение $c_n=1/\lambda_n$ представляет собой скорость распространения свободных длинных внутренних волн n-й моды в невращающейся жидкости.

Амплитудные множители $B_n(x,y,t)$ удовлетворяют уравнению

$$\left(D^2+l^2-\lambda_n^2\Delta_2\right)B_n=Z_{nz}(-H)\Delta_2 f.$$

Последнее, после перехода в подвижную систему координат $x=x_1+x_0(t)$, $y=y_1+y_0(t)$,

$$x_0(t)=\int_0^t u_0(\tau)d\tau, \quad y_0(t)=\int_0^t v_0(\tau)d\tau,$$

преобразуется в неоднородное уравнение Клейна-Гордона-Фока [4], решение которого представляет собой трехкратный интеграл по времени и горизонтальным переменным. Для упрощения использовано модельное цилиндрическое распределение неровности дна

$$f(x,y)=\left[(x^2+y^2)/L^2+1\right]^{-m},$$

позволяющее для целых значений m преобразовать трехкратный интеграл в двукратный.

В результате, выражение для поля вертикальных смещений $\zeta(x,y,z,t)$ записывается в виде

$$\zeta = h\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(z)A_n(x,y,t).$$

Здесь множитель $\varphi_n(z)$ определяется только стратификацией и описывает распределение возмущений n-й моды по вертикали, выражение $A_n(x,y,t) = f(x,y) + J_n(x,y,t)$ – описывает эволюцию распределений возмущений среды по горизонтали. Для функции $J_n(x,y,t)$ выведено выражение в виде двойного интеграла по ограниченной области от гладкой подынтегральной функции, что позволило выполнить расчеты.

Результаты расчетов. Рассмотрим эволюцию распределения $A_n(x,y,t)$ в случае, когда $v_0(t)=(c,0)$ при $t>0$. В целом, представление о характере волнового поля в сверхкритическом случае $c>c_n$ дает работа [5], где рассмотрена задача об установившихся волнах, генерируемых областью поверхностных давлений. Нестационарная задача позволяет изучить характер эволюции волнового поля. Выполненные в рамках этой работы расчеты показали, что для океанических условий при $c/c_n=2$ в ближней области ($|x|$, $|y|$ < 200 км) волновое поле практически устанавливается за 2–3 суток.

В докритическом случае ($c<c_n$) с изменением скорости потока неровностью дна генерируются внутренние волны, распространяющиеся вверх по потоку. При этом с течением времени в ближней области волновые возмущения затухают. В этой связи представляет интерес характер распределения в конкретный момент времени амплитудного множителя $A_n(x,y,t)$ – рисунок 1. Отметим, что вниз по потоку возмущения жидкости незначительны.

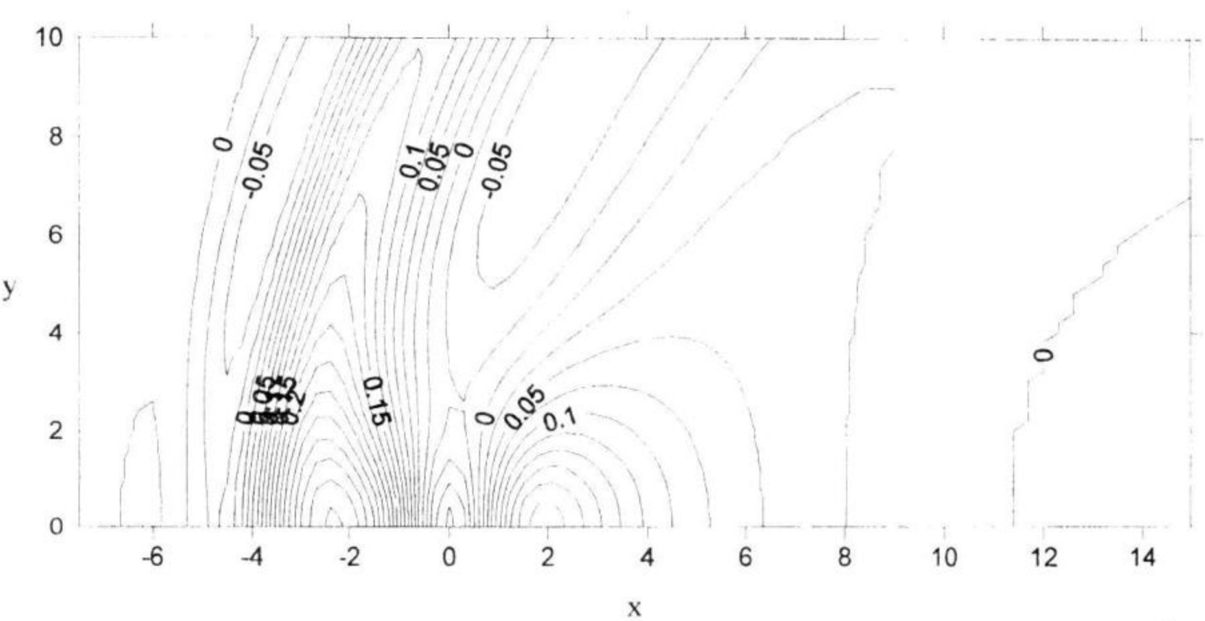

Рисунок 1 – Распределение $A_n(x,y,t)$ в докритическом случае (c/c_n=0.8); L=20 км, t=2 сут, m=2, φ=30°. Размерность пространственных переменных x и y – 10 км

Для оценки времени установления были выполнены расчеты зависимости $A_n(x,0,t)$ для тех же параметров модели и промежутка времени 10 суток – рисунок 2. Представленные расчеты показывают, что в докритическом случае затухание возмущений потока в окрестности вершины неровности дна проходит за большее время, чем расчетное. Использование больших значений времени требует доработки алгоритма расчета и, возможно, поиска других форм представления решения.

Результаты вычислений показывают, что в примере изменения амплитуды отдельной моды $A_n(x,0,t)$ имеют квазипериодический характер с периодом порядка 2-х суток.
На рисунках 3 и 4 представлены зависимости высоты волны в фиксированный момент времени – (max $A_n(x,y,t)$ - min $A_n(x,y,t)$) от скорости потока и географической широты.

Отметим, что с увеличением широты φ в докритическом (c<0.4) диапазоне высоты волн растут, а в околокритическом и сверхкритическом – убывают, что является следствием дисперсии. В низких и умеренных широтах высоты вынужденных волн максимальны в критическом случае, когда $c = c_n$. В представленном примере (рисунок 4) высоты волн незначительно меняются с широтой в сверхкритическом диапазоне (fr > 2).

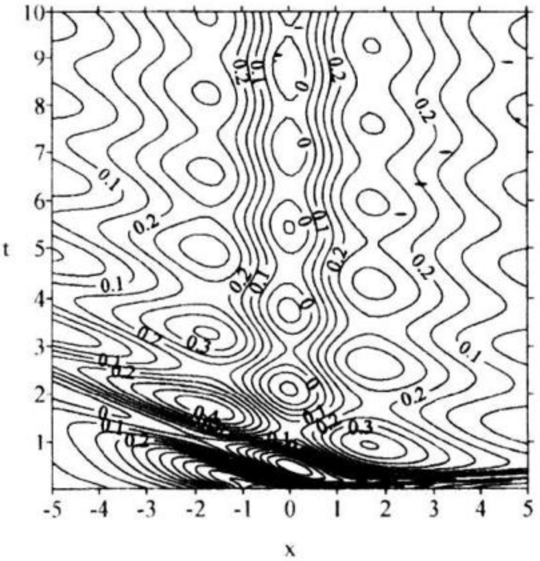

Рисунок 2 – Распределение $A_n(x,0,t)$, демонстрирующее характер установления ближней области волнового поля в докритическом случае (c/c_n=0.8). Размерность времени t – 1 сут; пространственной переменной x – 10 км

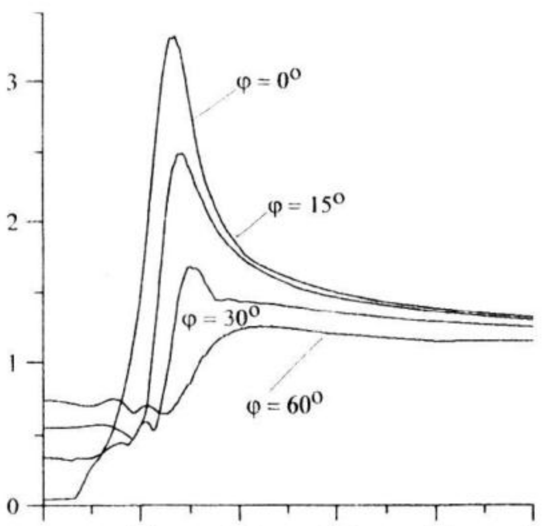

Рисунок 3 – Зависимость высоты волны от скорости течения; c_n=0.5 м/с, L=40, t=2 сут.

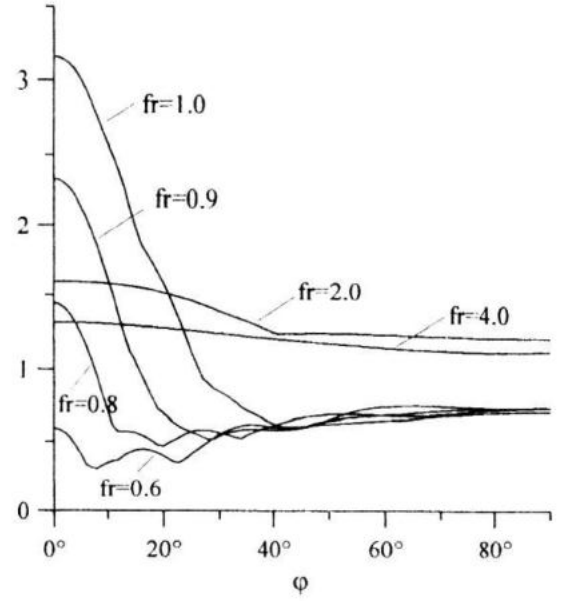

Рисунок 4 – Зависимость высоты волны от географической широты, $fr = c/c_n$.

Заключение. Результаты выполненных расчетов показывают, что при изменении скорости потока в докритическом диапазоне (до 2-3 м/с для условий океана) волновые возмущения, создаваемые локальной неровностью дна, медленно затухают в ближней области. В этой связи эффекты нестационарности течения представляются значимыми.

Литература

1. Черкесов Л.В., Власенко В.И., Стащук Н.М., Суворов А.М., Фомин В.В. Гидродинамика морских волн. – Киев: Наук. Думка. 1992. – 162 с.

2. Sharman R.D., Wurtele M.G. Three-Dimensional Structure of Forced Gravity Waves and Lee Waves // J. Atmos. Sci. V. 61. 2004. – P. 664–681.

3. Санников В.Ф. Фокусировка внутренних волн, генерируемых при неравномерном движении области атмосферных давлений // Морской гидрофизический журнал. – 2006. – № 5. – С. 22–29.

4. Polyanin A.D. Handbook of Linear Partial Differential Equations for Engineers and Scientists. – Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton. – 2002. – P. 375.

5. Веденьков В.Е., Санников В.Ф. Ближнее поле внутренних волн за движущейся областью атмосферных давлений// Морской гидрофизический журнал. – 1991. – № 3. – С. 20–25.