**ОПИСАНИЕ ПЕРЕНОСА И НАКОПЛЕНИЯ СНЕГА В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ
МОДЕЛИ ПОВЕРХНОСТНОГО БАЛАНСА МАССЫ ГОРНОГО ЛЕДНИКА.
ЧАСТЬ I. ТЕОРИЯ, БАЗОВЫЕ АЛГОРИТМЫ И ТЕСТИРОВАНИЕ**

О.О. Рыбак^{1,2}, Е.А. Рыбак^{1,2}, И.А. Корнева^{2,3}

¹Сочинский научно-исследовательский центр РАН, г. Сочи, ул. Театральная, 8а

²Филиал Института природно-технических систем, г. Сочи, Курортный проспект, 99/18

E-mail: o.o.rybak@gmail.com, elena.rybak@gmail.com

³Институт глобального климата и экологии имени академика Ю.А. Израэля,

РФ, г. Москва, ул. Глебовская, 20Б

E-mail: comissa@mail.ru

Одна из ключевых проблем в математическом моделировании динамики горных ледников заключается в корректном расчете накопления и перераспределения твердых осадков. Хотя эти процессы достаточно хорошо изучены, однако применяемые в настоящее время методы приложимы, главным образом, к краткосрочным прогнозам. В статье рассмотрен расчетный алгоритм описания переноса и накопления снега для последующего включения в модель поверхностного баланса массы горного ледника для построения долгосрочных проекций эволюции горного оледенения. Алгоритм основан на решении уравнения адвекции-диффузии с полуэмпирическим описанием скорости переноса. В численных экспериментах со схематически заданным рельефом поверхности исследованы некоторые ключевые особенности перераспределения снега.

Ключевые слова: горный ледник, аккумуляция, снежный покров, метелевый перенос, математическая модель

Поступила в редакцию: 11.07.2019. После доработки: 05.08.2019.

Введение. Реалистичное описание динамики горного ледника и надежный прогноз его эволюции методами математического моделирования упирается в проблему формализации снегонакопления на его поверхности, включая пространственные особенности выпадения твердых осадков и перераспределения уже выпавшего снега (лавинное питание и др.). Если расходная часть поверхностного баланса массы, абляция, включающая таяние и сублимацию, может быть в достаточной мере аккуратно оценена, опираясь на хорошо известные обстоятельства или понятно формализуемые, исходя из общих физических законов, потоки массы и энергии, то расчет приходной части, аккумуляции, сопряжен со многими неопределенностями. Считается, что пространственная изменчивость зимнего баланса массы (часто отождествляемого с аккумуляцией, что, однако, не совсем верно в отношении ледников в южных широтах, где аккумуляция наблю-

дается и в летнее время) на порядок превышает ошибку при расчете таяния в сезон абляции [1]. Снегонакопление на поверхности ледника зависит от многочисленных факторов, при этом их соотношение меняется от одного ледника к другому. Наряду с атмосферными осадками в приходной части баланса массы большую роль играет метелевый перенос и лавинное питание. На северном склоне Большого Кавказа осадки составляют более половины в приходной части баланса массы, а метелевый перенос – от 10 до 42% [2]. Распределение твердых осадков над ледником может значительно отличаться от суммы осадков на близлежащих метеорологических станциях. Проблема расчета суммы осадков, по-видимому, не может быть решена средствами реанализа, так как расхождение в модельных и измеренных данных может достигать 50% [3]. Собственно говоря, даже измерение суммы осадков непосредственно на леднике

не гарантирует от ошибки. Систематический недоучет твердых осадков при измерении осадкомером конструкции Третьякова составляет 30–60%, а дождемером – более 50% (соответствующие ссылки даны в работе [4]). Сопоставление измеренных сумм осадков на метеостанциях и толщина соответствующих слоев и сезонного снега в шурфах также свидетельствует о существенном расхождении в оценках выпавших твердых осадков. Например, годовое количество осадков на метеостанциях Терскол и Местиа составляет около 1000 мм, в то же время годовая аккумуляция на леднике Джанкуат, который расположен приблизительно на одинаковом расстоянии от обеих метеостанций, достигает 2800–2900 мм/год [5]. Аналогичная картина наблюдается на поверхности ледникового массива Эльбруса, который находится приблизительно в 20 км от метеостанции Терскол. Так, на относительно пологом Западном плато средняя аккумуляция в 1924–2009 гг., рассчитанная на основе интерпретации данных бурения снежно/фирновой/ледяной толщи, составила 1455 мм/год [6], то есть в практически полтора раза больше, чем средняя годовая сумма осадков на метеостанции Терскол.

Физические механизмы перераспределения снега в процессе выпадения осадков изучены достаточно хорошо и детально. В целом их можно формально свести к переносу материала в двухфазной жидкости. Разумеется, этот процесс (точнее, набор процессов, включая сублимацию частиц снега) достаточно сложен. Существует немало математических моделей, описывающих процессы метелевого переноса – ALPINE3D [7], SPONSOR [8], PIEKTUK-T, PIEKTUK-B, WINDBLAST, SNOWSTORM [9], SnowTran-3D [10], SMOOTH [11] и др. Практически все они в той или иной степени опираются на теоретические положения, наиболее полно сформулированные в фундаментальной работе Дюнина [12]. Несмотря на то, что указанные модели хорошо описывают процесс формирования снежного покрова,

они предназначены для относительно краткосрочных прогнозов. Если же задача стоит в построении эволюционной картины ледника (группы ледников) на длительный период, то указанные модели едва ли пригодны из-за того, что они требовательны к детальной входной информации, которая, разумеется, в случае прогнозных расчетов не может быть предоставлена.

В настоящей работе рассмотрены некоторые аспекты упрощенного подхода к расчету пространственного перераспределения снега, который призван в какой-то мере преодолеть зависимость более сложных моделей к входной метеоинформации. Конечная цель исследования, которое не ограничивается рамками настоящей статьи, заключается в полноценном включении алгоритмов снегонакопления и снегопереноса в модель поверхностного баланса массы горного ледника. В рамках упрощенного подхода реализована схематическая имитация механизмов дефляции, переноса и аккумуляции снега в пределах ограниченной области. В работе использованы, главным образом, идеи, сформулированные в [10, 11].

Постановка задачи. Если пренебречь теплообменом поверхностного слоя снега/фирна/льда с нижележащими слоями ледника, то процессы, формирующие баланс массы на поверхности, вполне можно рассматривать для бесконечно тонкого слоя (скин-слоя). В этом случае толщина снега будет только характеристикой поверхности, обладающей определенным набором свойств (значением альбедо, влагопоглощающей способностью и т.д.). Перераспределение снега можно описать уравнением [8]:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{1}{\rho_{sm}} \left[\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + S \right], \quad (1)$$

где η – толщина подвижного слоя льда, ρ_{sm} – плотность подвижного снега, Q_x и Q_y – горизонтальные потоки снега по направлениям x и y соответственно, S – сумма

всех локальных источников/стоков (твердые осадки, таяние, сублимация). В соответствии с [8] потоки Q_x и Q_y состоят из трех компонент F , D и G :

$$\begin{aligned} Q_x &= F_x(u^*, snow, x) + \\ &+ D_x(\varepsilon\{u^*\}, snow, x) \frac{\partial h}{\partial x} + G_x(snow, \frac{\partial h}{\partial x}), \\ Q_y &= F_y(v^*, snow, y) + \\ &+ D_y(\varepsilon\{v^*\}, snow, y) \frac{\partial h}{\partial y} + G_y(snow, \frac{\partial h}{\partial y}), \quad 2) \end{aligned}$$

где F_x и F_y – проекции на оси x и y скорости переноса снега. В настоящей работе в качестве полуэмпирического уравнения для F_x и F_y нами использовано уравнение, предложенное в [13]:

$$|\vec{F}| = 0,000077(w_{10} - 5)^3, \quad (3)$$

где w_{10} – скорость ветра на высоте 10 м над поверхностью земли. Очевидно, что базовая идея [11] заключается в полуэмпирическом подходе к расчету переноса, что существенно упрощает реальную картину и позволяет избежать описания ряда трудноформализуемых процессов дефляции, сальтации и др. Наряду с формулой (3) было получено несколько аналогичных полуэмпирических выражений (их подробный обзор дан в [11]), однако все они содержат базовое допущение о пороговом значении скорости ветра, ниже которого переноса снега не происходит.

Вторые члены в правой части уравнений (2) описывают горизонтальную диффузию и зависят от турбулентных компонент скорости ветра и состояния снежного покрова, описываемого функцией $snow$, $h = \eta + s$ – высота заснеженной поверхности, s – высота «неподвижной» поверхности снега или поверхности земли. Третьи члены, G_x и G_y описывают смещение снега за счет гравитации. Поскольку нас интересует только перераспределение снега в поле ветра, осадки, сублимация, гравитационное смещение и турбулентная диффузия не рассматриваются. Таким образом, подстановка (2) в (1) дает

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{1}{\rho_{sm}} \left[\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} \right]. \quad (4)$$

Уравнение (4) решается численно методом переменных направлений.

Рис. 1. Схематическое представление элемента рельефа (высота, м)

Схематическое задание рельефа и поля ветра. В настоящей работе исследуются схематические случаи перераспределения снега в квадратной области размером 5×5 км с пространственным разрешением 25 м, $h=\eta$, $\rho_{sm}=0,5 \text{ кг} \cdot \text{м}^{-3}$. Рельеф задается схематически. Рассматривается три конфигурации:

1) Эксперимент 1: симметричная относительно центра области ($x_0=2,5$ км, $y_0=2,5$ км) гора (рис. 1а) радиусом $R_{max}=1500$ м и максимальной высотой $s_{max}=500$ м, поверхность которой задается формулой:

$$s(i, j) = s_{max} \left\{ \cos \left[\frac{d}{R_{max}} \frac{\pi}{2} \right] \right\}^2, d \leq R_{max} \\ s(i, j) = 0, d > R_{max}, \quad (5)$$

где $d = [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]^{1/2}$ – расстояние от центра горы.

2) Эксперимент 2: Аналогичная форма рельефа, высота поверхности которой не ограничена нулевым уровнем при $d > R_{max}$ (рис 1б).

3) Эксперимент 3: Симметричный относительно центра области ($x_0 = 2,5$ км, $y_0 = 2,5$ км) эллипсовидный элемент рельефа (рис. 1в), высота поверхности которого задается выражением (5), а радиус формулой

$$R_{max} = \frac{ab}{(a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi)^{1/2}}, \quad (6)$$

где $a = 500$ м, $b = 2075$ м – малая и большая полуоси, φ – угол между радиусом и большой полуосью (рис. 1в).

В уравнении (3) задается только зональная составляющая скорости ветра $w_{10} = 10 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$. Трансформация поля ветра [10] рассчитывается, исходя из угла наклона поверхности в каждом узле пространственной сетки

$$\beta = \arctan \left[\left(\frac{\partial h}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial h}{\partial y} \right) \right]^{1/2}, \quad (7)$$

ее азимута

$$\zeta = \frac{3\pi}{2} - \arctan \left[\left(\frac{\partial h}{\partial y} \right) / \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right) \right] \quad (8)$$

и топографической кривизны

$$\Omega_c = \frac{1}{4} \left[\frac{h - 0.5(h_W + h_E)}{2\eta} + \frac{h - 0.5(h_S + h_N)}{2\eta} + \frac{h - 0.5(h_{SW} + h_{NE})}{2\sqrt{2}\eta} + \frac{(h_{NW} + h_{SE})}{2\sqrt{2}\eta} \right], \quad (9)$$

где h_W , h_E и т.д. – значения высоты поверхности в узлах пространственной сетки в восьми направлениях на расстоянии η от узла сетки, для которой производятся вычисления. По смыслу топографическая кривизна Ω_c – это осредненная разница между абсолютной высотой в ячейке и средней высотой в восьми попарно диаметрально расположенных ячейках.

Рис. 2. Начальное поле толщины снега (м): эксперименты 1 и 2 (а), эксперимент 3 (б)

Выбор η в общем случае зависит от характера рельефа и особенностей снегонакопления [10]. В настоящей работе $\eta=1$. Проекция угла между нормалью к поверхности в узле сетки и направлением ветра определяется формулой

$$\Omega_s = \beta \cos(\vartheta - \zeta), \quad (10)$$

где направление вектора скорости ветра определяется как

$$\theta = \frac{3\pi}{2} - \arctan\left(\frac{v}{u}\right), \quad (11)$$

а u и v – проекции вектора скорости ветра на пространственные оси. Ω_c и Ω_s норми-

руются таким образом, чтобы их значения лежали в диапазоне от $-0,5$ до $+0,5$. В приземном слое скорость ветра w_t рассчитывается, как $w_t = W_w w_{10}$, где

$$W_w = 1 + \gamma_s \Omega_s + \gamma_c \Omega_c, \quad (12)$$

а веса γ_c и γ_s выбираются таким образом, чтобы их сумма равнялась единице. В настоящей работе $\gamma_c = \gamma_s = 0,5$. Изменение направления вектора скорости ветра определяется соотношением [14]:

$$\theta_t = \theta + \theta_d, \text{ где}$$

$$\theta_d = -0,5 \Omega_s \sin[2(\zeta - \theta)]. \quad (13)$$

Рис. 3. Результаты эксперимента 1. Направление ветра (а), коэффициент W_w из (12) (б), толщина снежного покрова, м, по окончании эксперимента (в), разность толщины снежного покрова в конце и в начале эксперимента (г). Красным цветом на (а), белым цветом на (б) и черным цветом на (г) показаны изолинии высоты рельефа, м, красным цветом на (в) – изолинии начальной толщины снежного покрова, м

Численные эксперименты, их результаты и обсуждение. Начальное поле толщины снежного покрова в экспериментах 1 и 2 (Э1 и Э2) показано на рис. 2а, в эксперименте 3 (Э3) – на рис. 2б. Длительность экспериментов составила 24 модельных часа.

В Э1 и Э2 поле скорости ветра ожидаемо трансформируется в окрестностях горы таким образом (рис. 3а и 4а), что с наветренной стороны образуется область, где скорость более, чем на треть, выше первоначальной, а с подветренной на 20% ниже, и сам поток образует зону дивергенции с наветренной стороны и конвергенции с подветренной стороны (рис. 3б и 4б). Картина перераспределения снега в Э1 и Э2 (рис. 3в и 4в) в целом похожа –

происходит дефляция на наветренной стороне и накопление на подветренной (рис. 3г и 4г). Вследствие того, что в Э1 гора расположена на ровной плоскости, снег накапливается также на наветренной стороне в узкой полосе перегиба поверхности (в полуокружности у основания горы) и сносится в аналогичной области (полуокружности) на подветренной (рис. 3в, г). В Э2 такого не происходит вследствие того, что гора расположена в депрессии, переход от одного элемента рельефа к другому происходит постепенно и резкие изменения в поле скорости отсутствуют.

Максимальный рост толщины снежного покрова приходится на подветренную часть за вершиной в области конвергенции потоков, где она возрастает многократно.

Рис. 4. Результаты эксперимента 2. Обозначения как на рис. 3

Давно известно, что накопление снега на подветренных участках характерно для распределения снега в реальных условиях [10, 12, 13]. Отсутствие механизма вертикального перераспределения снега (G_x и G_y в ур. 2) приводит к нереалистичной толщине снега на подветренной стороне у вершины горы.

В ЭЗ схематический рельеф местности (рис. 1в) представляет собой эллипсоидальную гору, окруженную депрессиями и двумя симметрично расположенными относительно центра области хребтами. Перераспределение снега в условиях более

сложного рельефа подчиняется тем же закономерностям, что и в случае рассмотренного выше более простого.

Аналогично происходит снижение скорости ветра на подветренных сторонах положительных элементов рельефа (гора, хребты) и усиление на наветренных, величина которых контролируется величиной множителя W_w (ур. 12), который, в свою очередь является функцией кривизны поверхности рельефа, ориентацией склонов по отношению к направлению вектора ветра.

Рис. 5. Результаты эксперимента 3. Обозначения как на рис. 3

Заключительные замечания. В работе рассмотрены вопросы применения относительно простого подхода к расчету перераспределения снежного покрова для включения в математическую модель поверхностного баланса массы горного ледника. Было показано, что применение полуэмпирического соотношения между скоростью ветра и массопереносом позволяет упростить процедуру расчетов, и в то же время воспроизвести главные особенности перераспределения снежного покрова в зависимости от формы подстилающей поверхности. В дальнейшем предстоит оценить чувствительность результатов моделирования к значениям ключевых настраиваемых параметров η , γ_c и γ_s в уравнениях (9) и (12). Для более реалистичного воспроизведения перераспределения снега необходимо будет ввести описание вертикального смещения (иными словами, параметризовать лавинное питание) и горизонтальной турбулентной диффузии в уравнение (4), что предусмотрено в уравнении (2). Основная задача, которая предстоит в будущем – воспроизвести процесс перераспределения и аккумуляции снега в реальных условиях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Machtguth H., Eisen O., Paul F., Hoelze M.* Strong spatial variability of snow accumulation observed with helicopter-borne GPR on two adjacent Alpine glaciers // *Geophysical Research Letters*. 2006. V. 33. L13503. doi:10.1029/2006GL026576.
2. *Панов В.Д., Лурье П.М., Ильичев Ю.Г.* Состояние современного оледенения северного склона Большого Кавказа на начало XXI столетия // *Устойчивое развитие горных территорий*. 2010. Т. 2. № 3.

С. 69–73.

3. *Торопов П.А., Михаленко В.Н., Кутузов С.С. и др.* Температурный и радиационный режим ледников на склонах Эльбруса в период абляции за последние 65 лет // *Лед и Снег*. 2016. Т. 56. № 1. С. 5–19. doi:10.15356/2076-6734-2016-1-5-19.

4. *Морозова П.А., Рыбак О.О.* Регионализация данных глобального климатического моделирования для расчета баланса массы горных ледников // *Лед и Снег*. 2017. Т. 57. № 4. С. 437–452. doi:10.15356/2076-6734-2017-4-437-452.

5. *Рыбак О.О., Рыбак Е.А.* Применение данных сетевых метеорологических станций для расчета баланса массы ледников (на примере ледника Джанкуат, Центральный Кавказ) // *Системы контроля окружающей среды*. 2017. № 9 (29). С. 100–108.

6. *Mikhalenko V., Sokratov S., Kutuzov S. et al.* Investigation of a deep ice core from the Elbrus western plateau, the Caucasus, Russia // *The Cryosphere*. 2015. V. 9. P. 2253–2270. doi:10.5194/tc-9-2253-2015.

7. *Lehning M., Löwe H., Ryser M., Raderschall N.* Inhomogeneous precipitation distribution and snow transport in steep terrain // *Water Resources Research*. 2008. V. 44. W07404. doi:10.1029/2007WR006545.

8. *Шмакин А.Б., Турков Д.В., Михайлов А.Ю.* Модель снежного покрова с учетом слоистой структуры и ее сезонной эволюции // *Криосфера Земли*. 2009. Т. XIII. № 4. С. 69–79.

9. *Xiao J., Bintanja R., Déry S.J. et al.* An intercomparison among four models of blowing snow // *Boundary-Layer Meteorology*. 2000. V. 97. P. 109–135.

10. *Liston G.E., Hahnel R.B., Sturm M., Heimstra A., Berezovskaya S., Tabler R.D.* Simulating complex snow distributions in windy environments using SnowTran-3D //

Journal of Glaciology. 2007. V. 53 (181). P. 241–256.

11. *Ohara N.* A practical formulation of snow surface diffusion by wind for watershed-scale applications // *Water Resources Research*. 2014. V. 50. P. 5074–5089. doi:10.1002/2013WR014744.

12. *Дюнин А.К.* Механика метелей (Вопросы теории проектирования снегорегулирующих средств). Новосибирск: Изд-во

Сибирского отделения АН СССР, 1963. 380 с.

13. *Dyunin A.K., Kotlyakov V.M.* Redistribution of snow on the mountains under the effect of heavy snow-storms // *Cold Regions Science and Technology*. 1980. V. 3. P. 287–294.

14. *Ryan B.C.* A Mathematical Model for Diagnosis and Prediction of Surface Winds in Mountainous Terrain. *Journal of Applied Meteorology*. 1977. V. 16. P. 571–584.

DESCRIPTION OF SNOW TRANSPORT AND ACCUMULATION IN A MATHEMATICAL MODEL OF SURFACE MASS BALANCE OF A MOUNTAIN GLACIER. PART I. THEORY AND BASIC ALGORITHMS

O.O. Rybak^{1,2}, E.A. Rybak^{1,2}, I.A. Korneva^{2,3}

¹Sochi Research Center of RAS,
RF, Sochi, Teatral'naya St., 8A

²Branch of Institute of Natural and Technical Systems,
RF, Sochi, Kurortny Av., 99/18

³Yu. A. Izrael Institute of Global Climate and Ecology,
RF, Moscow, Glebovskaya St., 20B

One of the challenging problems in mathematical modeling of mountain glacier dynamics is correct calculation of snow accumulation and redistribution. Though these processes have been sufficiently well-studied, methods which are used now are mainly applicable to only short-term predictions. Considered in the paper, is a computational algorithm for description of snow transportation and accumulation for further incorporation in a surface mass balance model for construction of long-term projections of evolution of mountain glaciation. An algorithm is based on the solution of the advection-diffusion equation with semi-empirical description of snow transport velocity. Some basic features of snow redistribution are outlined in numerical experiments with schematically prescribed terrain.

Keywords: mountain glacier, accumulation, snow cover, snow storm transportation, mathematical model