УДК 681.511.46

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ДВУХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ КВАДРОКОПТЕРА

А.Е. Безуглая, Е.А. Шушляпин, А.А. Афонина

ФГАОУ ВО «Севастопольский государственный университет»
РФ, г. Севастополь, ул. Университетская, 33
E-mail: anna_bezuglaya@list.ru

В работе выполнены исследования по разработке и верификации двух моделей квадрокоптера: на основе углов Крылова и с использованием кватернионов. По предложенной ранее конфигурации изготовлен рабочий образец квадрокоптера, для которого измерены и рассчитаны все параметры математической модели. Приведены результаты компьютерного моделирования полета квадрокоптера на основе двух исследуемых моделей, а также качественное сравнение этих моделей.
Ключевые слова: беспилотный летательный аппарат, квадрокоптер, нелинейная модель, углы Крылова, кватернионы, терминальное управление, метод конечного состояния.

Введение. Интенсивное развитие робототехники в последние годы открывает практически безграничные возможности для повышения эффективности любой отрасли. Использование беспилотных летательных аппаратов, в частности квадрокоптеров, в сфере контроля окружающей среды позволяет успешно решить большой объем рутинных задач малыми трудозатратами. Таким образом, применение квадрокоптеров в качестве универсальной платформы измерительных средств и фиксирующей аппаратуры может помочь в следующих областях:

– контроль состояния экологии моря – для автоматизированного сбора измеряемых данных по заданным маршрутам;
– поиск и спасание терпящих бедствие – для расширения зоны поиска и сокращения времени обнаружения;
– проведение аэрофотосъемки – для снижения финансовых издержек и, следовательно, для получения возможности более частого обновления картографической информации.

Как объект управления, квадрокоптер является сложной нелинейной системой с шестью степенями свободы и четырьмя управляемыми величинами. В научных публикациях предлагаются различные подходы к управлению квадрокоптером, решающие в основном задачу стабилизации при ручном управлении с помощью радиоаппаратуры на расстоянии [1]. Большинство предлагаемых алгоритмов управления при этом используют линеаризованные математические модели, что накладывает определенные ограничения на условия полета. Применение нелинейных моделей и соответствующих методов управления может значительно расширить круг решаемых задач. В частности, с помощью метода конечного состояния [2], рассчитанного на нелинейные системы, можно решить задачу терминального управления. Ранее этот метод и его различные варианты были успешно опробованы на двухколесном двухколейном роботе.

Математические модели и подходы к управлению. В работе [3] была предложена конфигурация квадрокоптера. На основе этой конфигурации осуществлена сборка устройства, а также произведены пробные полеты с управлением с помощью радиоаппаратуры. Разработка системы автоматического управления квадрокоптера с помощью метода конечного состояния нацелена на приведение аппарата в точку с заданными координатами за заданное время. Для применения указанного метода требуется математическая модель квадрокоптера в нормальной форме.

В данной работе выполнены исследования по разработке и верификации моделей квадрокоптера в системах координат с углами Крылова (модель 1) и через кватернионы (модель 2). Функции от углов Крылова или углов Эйлера традиционно используются для описания углового движения твердого тела. Тем не менее, применение кватернионов в качестве кинематических параметров также широко используется в задачах управления летательными аппаратами. Кватернионы представляют собой гиперкомплексные числа, имеющие одну вещественную и три мнимых части [4]. При этом компоненты кватерниона входят в вектор состояния системы вместо углов Крылова. Связь между углами Крылова и компонентами кватерниона задается выражениями

$$\begin{pmatrix} \varphi \\ \theta \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \arctan\left(\dfrac{q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2}{2(q_2 q_3 + q_0 q_1)}\right) \\ -\arcsin(2(q_1 q_3 - q_0 q_2)) \\ \arctan\left(\dfrac{q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2}{2(q_1 q_2 + q_0 q_3)}\right) \end{pmatrix}, \tag{1}$$

$$\begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\psi}{2} + \sin\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\psi}{2} \\ \sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\psi}{2} - \cos\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\psi}{2} \\ \cos\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\psi}{2} + \sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\psi}{2} \\ \cos\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\psi}{2} - \sin\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\psi}{2} \end{pmatrix}, \tag{2}$$

где φ, θ, ψ – углы крена, тангажа и рыскания (углы Крылова) квадрокоптера, q_0, q_1, q_2, q_3 – компоненты кватерниона.

Модель 1, построенная на углах Крылова, имеет следующий вектор состояния $x = (x, y, z, \varphi, \theta, \psi, v_x, v_y, v_z, \omega_x, \omega_y, \omega_z)^T$, где x, y, z – пространственные координаты квадрокоптера в неподвижной (земной) системе координат; φ, θ, ψ – углы Крылова, v_x, v_y, v_z – линейные скорости движения квадрокоптера, $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ – угловые скорости вращения квадрокоптера. Управляющими воздействиями $u = (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4)^T$ являются угловые скорости вращения четырех винтов квадрокоптера. Математическая модель 1 имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x} = v_x, \\ \dot{y} = v_y, \\ \dot{z} = v_z, \\ \dot{\varphi} = \omega_x + \omega_y s_\varphi t_\theta + \omega_z c_\varphi t_\theta, \\ \dot{\theta} = \omega_y c_\varphi - \omega_z s_\varphi, \\ \dot{\psi} = \omega_y \dfrac{s_\varphi}{c_\theta} + \omega_z \dfrac{c_\varphi}{c_\theta}, \\ \dot{v}_x = a_1(-c_\varphi s_\theta c_\psi - s_\varphi s_\psi)(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 + \omega_4^2), \\ \dot{v}_y = a_1(-c_\varphi s_\theta s_\psi + s_\varphi c_\psi)(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 + \omega_4^2), \\ \dot{v}_z = a_2 - a_1 c_\varphi c_\theta (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 + \omega_4^2), \\ \dot{\omega}_x = a_3 \omega_y \omega_z - a_4 \omega_y (\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4) + a_5(\omega_2^2 - \omega_4^2), \\ \dot{\omega}_y = a_6 \omega_x \omega_z + a_4 \omega_x (\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4) + a_5(\omega_1^2 - \omega_3^2), \\ \dot{\omega}_y = a_7 \omega_x \omega_y + a_8(\omega_1^2 - \omega_2^2 + \omega_3^2 - \omega_4^2), \end{cases} \tag{3}$$

В формуле (3) для тригонометрических функций введены следующие обозначения: $s_\alpha = \sin\alpha, c_\alpha = \cos\alpha, t_\alpha = tg\alpha$. Числовые параметры $a_1,...,a_8$ вычисляются по следующим выражениям

$$
\begin{aligned}
a_1 &= \frac{k}{m}, \\
a_2 &= g, \\
a_3 &= \frac{J_y - J_z}{J_x}, \\
a_4 &= \frac{J_r}{J_x}, \\
a_5 &= \frac{lk}{J_x}, \\
a_6 &= \frac{J_z - J_x}{J_y}, \\
a_7 &= \frac{J_x - J_y}{J_z}, \\
a_8 &= \frac{b}{J_z},
\end{aligned}
$$

где m – масса квадрокоптера, l – длина луча квадрокоптера, g - ускорение свободного падения, J_x, J_y, J_z – компоненты тензора инерции, J_r – момент инерции винта, k, b – экспериментально получаемые коэффициенты.

Компоненты тензора инерции квадрокоптера и момент инерции винта в свою очередь вычисляются по следующим выражениям

$$
\begin{aligned}
J_x &= \tfrac{2}{5} m_c r^2 + 2l^2 m_l, \\
J_y &= \tfrac{2}{5} m_c r^2 + 2l^2 m_l, \\
J_z &= \tfrac{2}{5} m_c r^2 + 4l^2 m_l, \\
J_r &= m_r r_r^2,
\end{aligned}
\tag{4}
$$

где m_c – масса корпуса квадрокоптера, r – радиус корпуса, m_r – масса винта, r_r – радиус винта, m_l – масса луча квадрокоптера с установленными на него двигателем, винтом и регулятором скорости.

Математическая модель 2, построенная на кватернионах, имеет вектор состояния

$$
x = (x, y, z, q_0, q_1, q_2, q_3, v_x, v_y, v_z, \\ \omega_x, \omega_y, \omega_z)^T,
$$

где q_0, q_1, q_2, q_3 - компоненты кватерниона. Остальные переменные состояния, параметры и управляющий вектор аналогичны модели 1. Математическая модель 2 имеет вид

$$
\begin{cases}
\dot{x} = v_x, \\
\dot{y} = v_y, \\
\dot{z} = v_z, \\
\dot{q}_0 = \frac{1}{2}(-q_1\omega_x - q_2\omega_y - q_3\omega_z), \\
\dot{q}_1 = \frac{1}{2}(q_0\omega_x - q_3\omega_y + q_2\omega_z), \\
\dot{q}_2 = \frac{1}{2}(q_3\omega_x + q_0\omega_y - q_1\omega_z), \\
\dot{q}_3 = \frac{1}{2}(-q_2\omega_x + q_1\omega_y + q_0\omega_z), \\
\dot{v}_x = a_1(-2q_1q_3 - 2q_0q_2)(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 + \omega_4^2), \\
\dot{v}_y = a_1(-2q_2q_3 - 2q_0q_1)(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 + \omega_4^2), \\
\dot{v}_z = a_2 - a_1(q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2)(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 + \omega_4^2), \\
\dot{\omega}_x = a_3\omega_y\omega_z - a_4\omega_y(\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4) + a_5(\omega_2^2 - \omega_4^2), \\
\dot{\omega}_y = a_6\omega_x\omega_z + a_4\omega_x(\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4) + a_5(\omega_1^2 - \omega_3^2), \\
\dot{\omega}_y = a_7\omega_x\omega_y + a_8(\omega_1^2 - \omega_2^2 + \omega_3^2 - \omega_4^2),
\end{cases}
\tag{5}
$$

Даже визуальное сравнение систем (3) и (5), описывающих первую и вторую модели соответственно, показывает, что модель 2 требует меньшего времени моделирования за счет более простых правых частей, не содержащих тригонометрических функций. Кроме того, известно, что в модели 1 при определенных значениях углов происходит вырождение кинематических уравнений. Преимуществом же модели 2 является то, что компоненты кватерниона не вырождаются при любом положении твердого тела.

Для моделирования движения квадрокоптера в Mathcad потребовалось измерить и рассчитать по формулам (4) ряд параметров, полученные значения которых приведены в таблице 1. Следует, однако, отметить, что значения коэффициента аэродинамического сопротивления k и коэффициента тяги b квадрокоптера взяты из научных публикаций и в дальнейшем подлежат уточнению в ходе экспериментов на реальном объекте.

Таблица 1. Значения параметров квадрокоптера

Параметр	**Значение**
1	**2**
m_c	0,692 кг
m_r	0,008 кг
m_l	0,094 кг
m	1,068 кг
r	0,075 м
r_r	0,12 м
l	0,247 м
J_x, J_y	0,013 кг/м^2
J_z	0,024 кг/м^2
J_r	$1{,}152 \cdot 10^{-4}$ кг/м^2
k	10^{-5}
b	10^{-7}

Компьютерное Mathcad-моделирование показало практически точное совпадение зависимостей пространственных координат от времени.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *M. Schreier*. Modeling and Adaptive Control of a Quadrotor // International Conference on Mechatronics and Automation. 2012. P. 383–390.

2. *Шушляпин Е.А.* Управление нелинейными системами на основе прогноза конечного состояния неуправляемого движения. Севастополь: СевНТУ. 2012. 282 с.

3. *Зосименко К.В.* Математическая модель и конфигурация четырехвинтового беспилотного летательного аппара та / К.В. Зосименко, А.С. Терехов, А.Е. Безуглая // Интеллектуальные системы, управление и мехатроника – 2016: Материалы Всероссийской научн.-техн. конф., Севастополь 19-21 мая 2016 г., Севастополь: СевГУ. 2016. С. 145–149.

4. *Бранец В.Н.* Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела / В.Н. Бранец, И.П. Шмыглевский // Главная редакция физико-математической литературы, Изд-во «Наука», М.: 1973. 320 с.

A COMPARATIVE ANALYSIS OF TWO QUADROTOR MATHEMATICAL MODELS

A.E. Bezuglaya, E.A. Shushlyain, A.A. Afonina

Federal State Educational Institution of Higher Education «Sevastopol State University»
Russian Federation, Sevastopol, Universitetskaya St., 33

In this paper, some investigations are made concerning development and verification of two quadrotor models: one is based on Krylov angles, and the other is based on quaternions. According to previously proposed quadrotor configuration, a real working UAV was constructed and all parameter values of its mathematical model were measured and calculated. The results of quadrotor flight computer simulation based on two models under consideration are presented. A qualitative comparison of these models is shown.

Key words: unmanned aerial vehicle, quadrotor, terminal control, nonlinear model, Krylov angles, quaternions, terminal control, terminal state method.