

# АНТИЭЛИАЗИНГ В МНОГОКАНАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ АНАЛОГО-ЦИФРОВОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СИГНАЛА

В.А. Гайский, П.В. Гайский

Морской гидрофизический институт  
НАН Украины  
г. Севастополь, ул. Капитанская, 2  
E-mail: gaysky@inbox.ru

*Предлагаются методы антиэлиазинга с использованием нескольких каналов преобразования сигнала, включающих физические аналоговые и виртуальные цифровые фильтры.*

Типичными в измерительных системах являются каналы преобразования сигнала, в которых входной сигнал  $x(t)$  проходит аналоговый преобразователь (АП) с комплексной частотной характеристикой  $\dot{H}(\omega)$ , сигнал  $y(t)$  с выхода которого поступает на аналого-цифровой преобразователь (АЦП), выдающий на выходе последовательность равномерных отсчетов  $y(k\tau_0)$  с интер-

валом времени  $\tau_0$  или частотой  $f_0 (\omega_0 = 2\pi f_0)$ . Если частота дискретизации  $f_0$  не удовлетворяет условиям теоремы Котельникова-Найквиста, т.е. не превышает в 2 раза максимальную частоту  $f_m$  в спектре сигнала, то имеет место элиазинг.

Все сигналы от окружающей среды, временные и пространственные, имеют бесконечный спектр и в измерительных системах аналоговые преобразователи-датчики не должны быть и обычно не являются идеальными фильтрами низких частот, поэтому элиазинг в дискретизированном сигнале  $y(k\tau_0)$  обычно есть.

Целью работы является разработка методов антиэлиазинга с использованием параллельных каналов преобразования. Схема элиазинга сигнала с бесконечным спектром при дискретизации с частотой  $\omega_0$  показана на рис. 1.

Для комплексного спектра дискретизированного сигнала запишем по аналогии с [1–3]

$$Y^*(\omega) = \omega_0 \sum_{i=-\infty}^{\infty} \dot{Y}(i\omega_0 \pm \omega) = 2\omega_0 \sum_{i=0}^{\infty} \dot{Y}(i\omega_0 \pm \omega), \quad 0 \leq \omega \leq \frac{\omega_0}{2}. \quad (1)$$

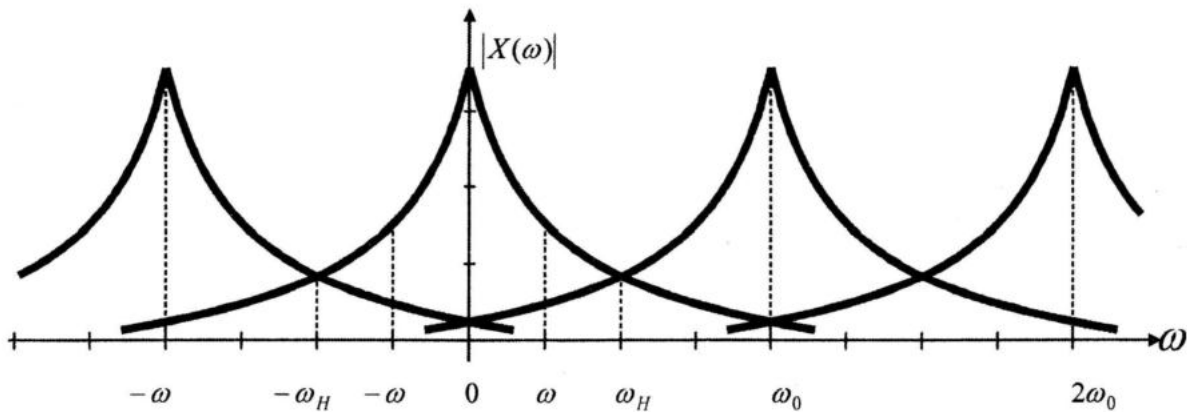
Для наглядности схема элиазинга, приведенная к полуоси положительных частот – «пила», показана на рис. 2а. По этой схеме значения модуля  $|Y(\omega)|$  спектральных составляющих непрерывного сигнала проектируются на «пилу», умножаются на «вес» в точке «пилы», «отражаются» влево с этим весом и суммируются (накладываются) в модулях спектра дискретизированного сигнала  $|\dot{Y}^*(\omega)|$  в диапазоне  $\left[0, \frac{\omega_0}{2}\right]$  на оси частот.

Для немодулированного сигнала (комплексная частотная характеристика АП  $\dot{H}(\omega) = 1$ )  $\dot{Y}(\omega) = \dot{X}(\omega)$  «веса» точек «пилы» равны 1 на прямых и равны 2 на вершинах (рис. 2б).

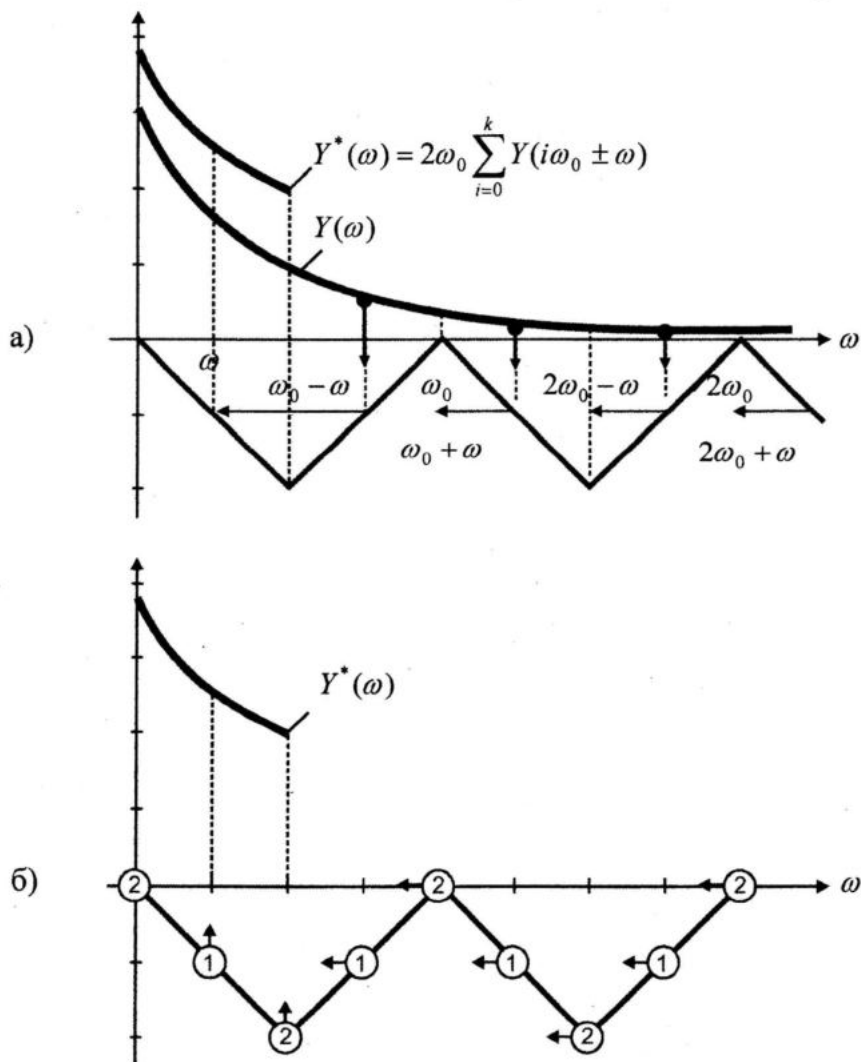
При этом в одном канале преобразования для каждой из определяемых гармоник в полосе частот  $\left[0, \frac{\omega_0}{2}\right]$  нет информативных параметров для выделения гармоник частот наложения.

Таковыми информативными параметрами можно наделять гармоники за счет их модуляции («подкрашивания») путем пропускания перед дискретизацией через несколько АП с разными  $\dot{H}_v(\omega)$ , т.е. при использовании нескольких параллельных каналов преобразования.

Рассмотрим принципы такой модуляции подробнее. Для комплексного спектра  $\dot{Y}^*(\omega)$  дискретизированного сигнала  $y(k\tau_0)$  можем записать



Р и с. 1. Схема элиайзинга



Р и с. 2. "Пила" элиайзинга

$$(2\omega_0)^{-1} \dot{Y}^*(\omega) = \sum_{i=0}^{\infty} Y_c(i\omega_0 + \omega) + \sum_{i=0}^{\infty} Y_c(i\omega_0 - \omega) + j \left[ \sum_{i=0}^{\infty} Y_s(i\omega_0 + \omega) + \sum_{i=0}^{\infty} Y_s(i\omega_0 - \omega) \right] \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} Y_c(i\omega_0 \pm \omega) &= Y(i\omega_0 \pm \omega) \cos \varphi(i\omega_0 \pm \omega) \\ Y_s(i\omega_0 \pm \omega) &= Y(i\omega_0 \pm \omega) \sin \varphi(i\omega_0 \pm \omega) \end{aligned} \quad (3)$$

$$\varphi(i\omega_0 \pm \omega) = \operatorname{arctg} \frac{Y_s(i\omega_0 \pm \omega)}{Y_c(i\omega_0 \pm \omega)}. \quad (4)$$

Используя аналогичные обозначения для представления в частотной области входного сигнала  $\dot{X}(\omega)$  и комплексной частотной характеристики АП [3], получим до дискретизации

$$\dot{Y}(\omega) = H(\omega)X(\omega), \quad (5)$$

$$\begin{aligned} Y_c(\omega) &= H_c(\omega)X_c(\omega) - H_s(\omega)X_s(\omega), \\ Y_s(\omega) &= H_s(\omega)X_c(\omega) + H_c(\omega)X_s(\omega). \end{aligned} \quad (6)$$

После дискретизации

$$\begin{aligned} Y_c^*(\omega) &= (2\omega_0) \sum_{i=0}^{\infty} Y_c(i\omega_0 \pm \omega) = 2\omega_0 \left[ \begin{aligned} &\sum_{i=0}^{\infty} H_c(i\omega_0 \pm \omega)X_c(i\omega_0 \pm \omega) - \\ &-\sum_{i=0}^{\infty} H_s(i\omega_0 \pm \omega)X_s(i\omega_0 \pm \omega) \end{aligned} \right], \\ Y_s^*(\omega) &= (2\omega_0) \sum_{i=0}^{\infty} Y_s(i\omega_0 \pm \omega) = 2\omega_0 \left[ \begin{aligned} &\sum_{i=0}^{\infty} H_s(i\omega_0 \pm \omega)X_c(i\omega_0 \pm \omega) + \\ &+\sum_{i=0}^{\infty} H_c(i\omega_0 \pm \omega)X_s(i\omega_0 \pm \omega) \end{aligned} \right]. \end{aligned} \quad (7)$$

Учитывая, что реально наблюдаемые  $Y^*(\omega)$  лежат в полосе частот  $\left[0, \frac{\omega_0}{2}\right]$ , и практически целесообразно ограничить верхнюю частоту восстанавливаемого сигнала некоторым значением

$$\omega_m \leq k\omega_0 + \frac{\omega_0}{2}, \quad (8)$$

то для индекса  $i$  получим  $i \leq k$ , т.е.  $i = \overline{0, k}$ .

Далее считаем  $H_c(i\omega_0 \pm \omega)$  и  $H_s(i\omega_0 \pm \omega)$  для  $i = \overline{0, k}$  известными, поскольку при наличии нескольких каналов они могут быть определены в

рабочем режиме по принципам идентификации параметрически инвариантных систем [4]. Неизвестными являются  $X_c(i\omega_0 \pm \omega)$  и  $X_s(i\omega_0 \pm \omega)$ . При

$i = \overline{0, k}$  это составит  $2(k+1)$  неизвестных для одной частоты  $\omega$  или для  $\omega_0/2 + 1$  частот  $k = 0, \frac{\omega_0}{2}$  составит

$$2\left(\frac{\omega_0}{2} + 1\right)(k+1) \text{ неизвестных.}$$

Один канал дает  $2\left(\frac{\omega_0}{2} + 1\right)$  уравнений. Следовательно, необходимо  $(k+1)$  каналов с разными  $\dot{H}_v(\omega)$ .

Перепишем выражения (7) для  $(k+1)$  каналов

$$\left. \begin{aligned} (2\omega_0)^{-1} Y_{c_v}^*(\omega) &= \sum_{i=0}^k H_{c_v}(i\omega_0 \pm \omega) X_c(i\omega_0 \pm \omega) - \sum_{i=0}^k H_{s_v}(i\omega_0 \pm \omega) X_s(i\omega_0 \pm \omega) \\ (2\omega_0)^{-1} Y_{s_v}^*(\omega) &= \sum_{i=0}^k H_{s_v}(i\omega_0 \pm \omega) X_c(i\omega_0 \pm \omega) + \sum_{i=0}^k H_{c_v}(i\omega_0 \pm \omega) X_s(i\omega_0 \pm \omega) \end{aligned} \right\}, \quad (9)$$

$$v = \overline{1, (k+1)}.$$

Параметрами каналов являются компоненты  $\dot{H}(\omega)$  и частота дискретизации  $\omega_0$ , увязанная со значением  $k$  при заданном  $\omega_m$  выражением (8).

Изменением этих параметров можно формировать новые каналы с новыми последовательностями выходных сигналов, в которых гармоники запредельных частот будут промодулированы по-разному.

Физические каналы реализуются до и в процессе дискретизации. Виртуальные каналы создаются после дискретизации программно. Рассмотрим несколько возможных вариантов.

#### Физические каналы преобразования сигнала.

Использование параллельных каналов с разными частотными характеристиками АП  $\dot{H}_v(\omega)$  и одной частотой дискретизации  $\omega_0$  для борьбы с элиаизингом представляется тривиальным, поскольку напрашивается естественное решение: оставить один АП, а несколько АЦП заставить работать с временным сдвигом  $\tau_0/(k+1)$  и получить суммарную частоту дискретизации  $(k+1)\omega_0$ , что и решает задачу. Однако есть смысл теоретически рассмотреть этот случай, поскольку, во-первых, при дискретизации процессов и полей окружающей среды такое решение не всегда возможно, во-вторых, в измерительных параметрически инвариантных системах уже используется несколько параллельных каналов, в-третьих, механизм антиэлиаизинга с использованием виртуальных каналов преобразования (цифровых фильтров ЦФ) аналогичен.

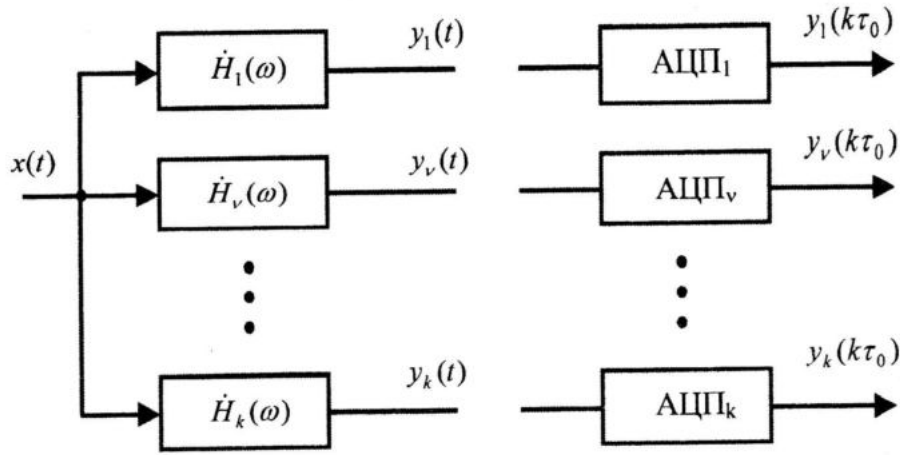
Структурная схема системы с несколькими параллельными каналами преобразования сигнала представлена на рис. 3. Аналоговый сигнал  $x(t)$ , в час-

тотной области отображаемый с неизвестными квадратурными составляющими  $X_c(\omega)$  и  $X_s(\omega)$ , проходит аналоговые преобразователи (АП) с известными комплексными коэффициентами передачи  $\dot{H}_v(\omega)$ , формируются аналоговые сигналы  $y_v(t)$ , представление которых в частотной области соответствует  $\dot{Y}_v(\omega) = \dot{H}_v(\omega)\dot{X}(\omega)$ . Сигналы  $y(t)$  далее дискретизируются и оцифровываются в последовательности  $y_v^*(k\tau_0)$ , результаты дискретного преобразования Фурье которых  $Y_{c_v}^*(\omega)$  и  $Y_{s_v}^*(\omega)$  используются далее для процедуры антиэлиаизинга. Схема элиаизинга сигнала в одном канале преобразования представлена на рис. 4.

Практически целесообразно ограничиться двумя физическими каналами преобразования с  $\dot{H}_1(\omega)$  и  $\dot{H}_2(\omega)$ , поскольку при формировании параметрически инвариантной системы для идентификации  $\dot{H}_1(\omega)$  и  $\dot{H}_2(\omega)$  достаточно двух каналов, а для формирования каналов с разными меньшими частотами дискретизации, кратными  $\omega_0$ , достаточно прореживания, т.е. формирования виртуальных дополнительных каналов. Таких каналов, как показано в [5], всего может быть  $N \ln N$ , где  $N$  – число отсчетов дискретизированного сигнала.

Схема антиэлиаизинга для этого случая и примера при  $\omega_m = \{12, 6, 4, 3, 2, 1\}$  до частот  $\omega_m = 28$  показана на рис. 5.

Возможно формирование дополнительных физических каналов преобразования из набора  $\langle \omega_{0i} \rangle$  с разными не кратными частотами дискретизации. Эти варианты в данной работе не рассматриваются.



Р и с. 3. Система с параллельными каналами преобразования сигнала

Виртуальные каналы преобразования сигнала. Последовательность отсчетов дискретизированного сигнала  $y(k\tau_0)$  может быть пропущена через разные цифровые фильтры для получения новых последовательностей, которые будут эквивалентны выходным сигналам  $z(k\tau_0)$

виртуальных каналов. Допустим, что комплексный коэффициент передачи  $\tau$ -го цифрового фильтра равен

$$\dot{G}_\tau(\omega) = G_{\tau c}(\omega) + jG_{\tau s}(\omega). \quad (10)$$

Тогда можем записать

$$\dot{Z}_\tau(\omega) = \dot{H}_v(\omega)\dot{G}_\tau(\omega)\dot{X}(\omega) = \dot{P}_{v\tau}(\omega)\dot{X}(\omega), \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \dot{P}_{v\tau}(\omega) &= \dot{H}_v(\omega)\dot{G}_\tau(\omega) = H_{vc}(\omega)G_{\tau c}(\omega) - H_{vs}(\omega)G_{\tau s}(\omega) + \\ &+ j[H_{vs}(\omega)G_{\tau c}(\omega) + H_{vc}(\omega)G_{\tau s}(\omega)] = P_{v\tau c}(\omega) + jP_{v\tau s}(\omega), \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} P_{v\tau c}(\omega) &= H_{vc}(\omega)G_{\tau c}(\omega) - H_{vs}(\omega)G_{\tau s}(\omega) \\ P_{v\tau s}(\omega) &= H_{vs}(\omega)G_{\tau c}(\omega) + H_{vc}(\omega)G_{\tau s}(\omega) \end{aligned} \quad (13)$$

По аналогии с выражением (9) после дискретизации получим

$$\begin{aligned} (2\omega_0)^{-1}Z_{v\tau c}^*(\omega) &= \sum_{i=0}^k P_{v\tau c}(i\omega_0 \pm \omega)X_c(i\omega_0 \pm \omega) - \sum_{i=0}^k P_{v\tau s}(i\omega_0 \pm \omega)X_s(i\omega_0 \pm \omega) \\ (2\omega_0)^{-1}Z_{v\tau s}^*(\omega) &= \sum_{i=0}^k P_{v\tau s}(i\omega_0 \pm \omega)X_c(i\omega_0 \pm \omega) + \sum_{i=0}^k P_{v\tau c}(i\omega_0 \pm \omega)X_s(i\omega_0 \pm \omega) \end{aligned} \quad (14)$$

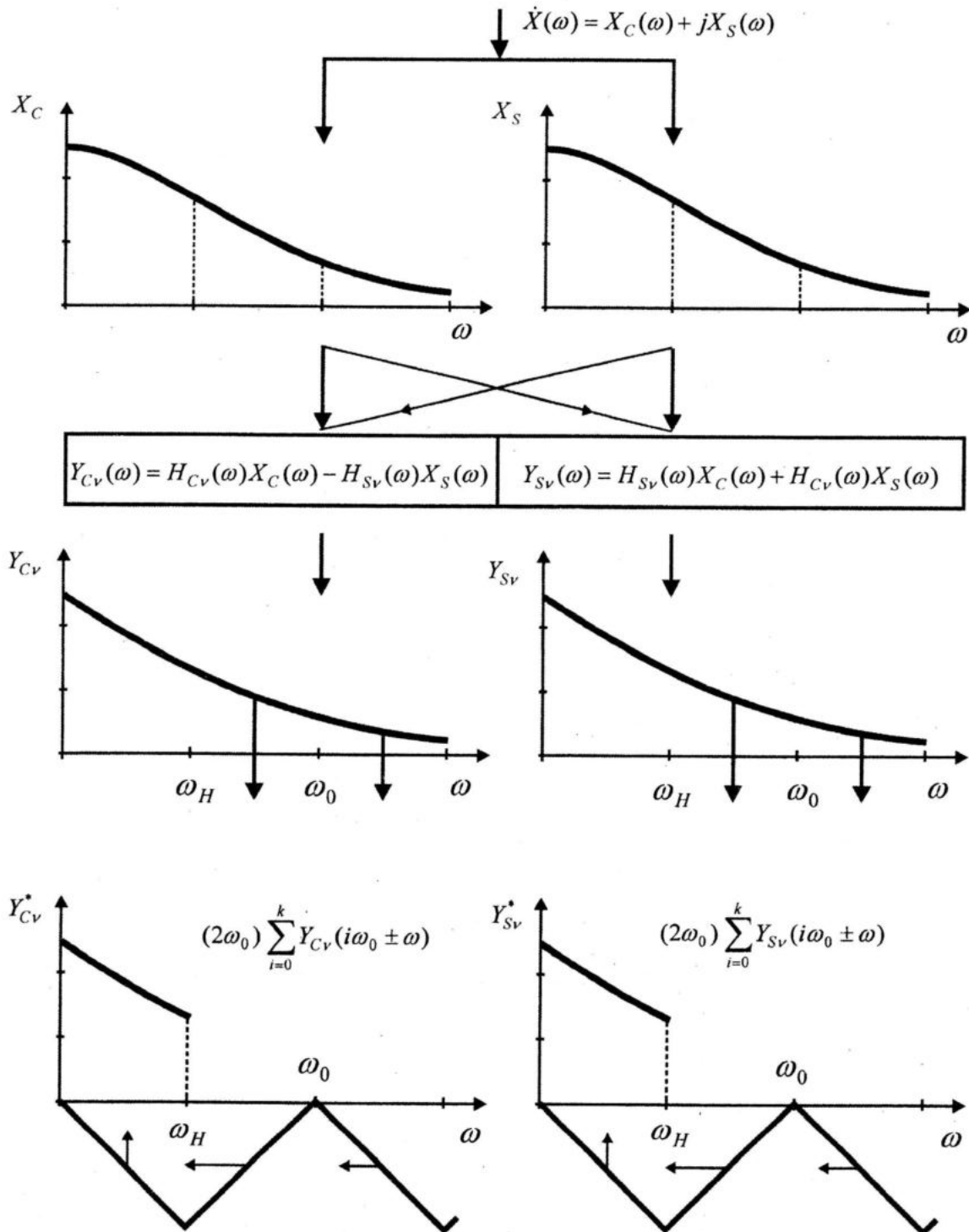
Комплексный коэффициент передачи  $\dot{P}_{v\tau}(\omega)$  формируется последовательным включением физического  $v$ -го аналогового преобразователя с  $\dot{H}_v(\omega)$  и  $\tau$ -го программного фильтра с ККП  $\dot{G}_\tau(\omega)$ . Следовательно, если имеется  $k$  аналоговых преобразователей и  $m$  программных фильтров, то можно формировать  $km$  комбинированных физически виртуальных каналов.

Для того, чтобы эти каналы можно было использовать для антиэлайзинга необходимо, чтобы, хотя бы один из пары  $v\tau$ -фильтров, имел затухающие амплитудные частотные характеристики.

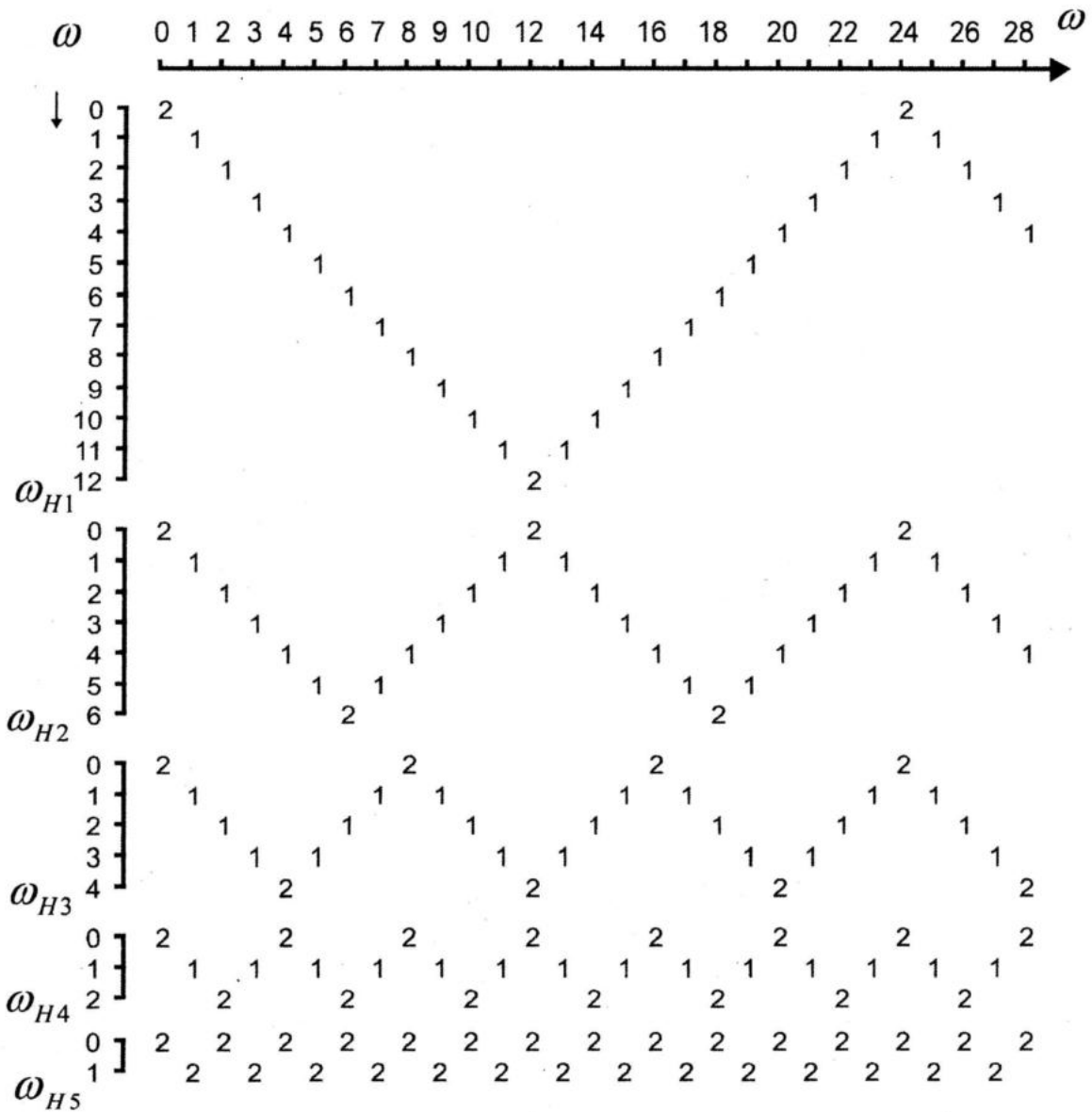
Первичные и вторичные измерительные преобразователи обычно имеют спадающие амплитудно-частотные характеристики в области выше частот Найквиста и дискретизации. Вопрос о возможности построения ЦФ с подоб-

ными характеристиками при использовании отсчетов с заданной частотой дискретизации  $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$  остается открытым.

Рассмотрим возможности использования для антиэлиазинга интерполяторов, которые служат для восстановления значений сигнала в интервалах между отсчетами.



Р и с. 4. Схема элиазинга сигнала в одном канале преобразования



Р и с. 5. Схема элиайзинга и формирования дополнительных каналов для антиэлиайзинга прореживанием

Практически все известные интерполяторы используют для вычисления значения интерполируемой величины  $z_r(t)$  в точку  $\tau$  сумму взвешенных с весом  $a_\mu(\tau)$  прошлых отсчетов сигнала  $y(t_\mu)$

$$Z_r(t) = \sum_{\mu=0}^n a_\mu(\tau) y(t_\mu) = \sum_{\mu=0}^n a_\mu(\tau) y(t - \mu\tau_0). \quad (15)$$

Известно [6], что спектры сигналов  $z_r(t)$  в различных точках  $\tau$  различны и зависят от способа интерполяции, определяющего веса  $a_\mu(\tau)$ . Следовательно, использование интерполятора для одной точки  $\tau$  эквивалентно использованию

в дискретные моменты времени  $t_\mu$ , т.е. являются нерекурсивными цифровыми фильтрами

одного канала фильтрации (модуляции, "окраски") сигнала.

Количество возможных точек интерполяции в фиксированном пакете  $\{t_\mu\}$  (соответственно дополнительных каналов преобразования) ограничивается

уровнем шумов отсчетов и погрешностью временной привязки  $\{t_\mu\}$ .

Очевидно, что число таких точек может быть очень большим, по крайней мере для современных технических средств – десятки тысяч. Следовательно,

$$G_r(p) = \sum_{\mu=0}^n a_\mu(\tau) e^{-pt_\mu}. \quad (16)$$

Для составляющих комплексной передаточной функции получим

$$\begin{aligned} G_{rc}(\omega) &= \sum_{\mu=0}^n a_\mu(\tau) \cos \omega t_\mu, \\ G_{rs}(\omega) &= -\sum_{\mu=0}^n a_\mu(\tau) \sin \omega t_\mu, \end{aligned} \quad (17)$$

Подставляя последние выражения в выражение (13) получим для составляющих комплексной передаточной функции всего канала преобразования входного сигнала  $x(t)$

$$\begin{aligned} P_{vrc}(\omega) &= H_{vc} \sum_{\mu=0}^n a_\mu(\tau) \cos \omega t_\mu + H_{vs} \sum_{\mu=0}^n a_\mu(\tau) \sin \omega t_\mu, \\ P_{vrs}(\omega) &= H_{vs} \sum_{\mu=0}^n a_\mu(\tau) \cos \omega t_\mu - H_{vc} \sum_{\mu=0}^n a_\mu(\tau) \sin \omega t_\mu. \end{aligned} \quad (18)$$

Различные выражения для  $G_r(p)$  могут формироваться изменением  $\tau$ , коэффициентов  $a_\mu(\tau)$  и расположением отсчетов во времени  $t_\mu$ .

$$H_{1c} = \frac{1}{1 + b_1^2 \omega^2}, \quad H_{1s} = \frac{b_1 \omega}{1 + b_1^2 \omega^2}, \quad (19)$$

и выполняется линейная интерполяция по двум точкам из равномерной через интервал  $\tau_0$

Рассмотрим пример, когда АП описывается моделью инерционного звена 1-го порядка с составляющими коэффициента передачи

$$\text{последовательности отсчетов, для которой } a_0(\tau) = \left(1 - \frac{\tau}{\tau_0}\right), \quad a_1(\tau) = \frac{\tau}{\tau_0}$$

$$G_{rc} = \sum_{\mu=0}^1 a_\mu(\tau) \cos \omega \mu \tau_0 = \left(1 - \frac{\tau}{\tau_0}\right) + \frac{\tau}{\tau_0} \cos \omega \tau_0, \quad (20)$$

$$G_{rs} = \sum_{\mu=0}^1 a_\mu(\tau) \sin \omega \mu \tau_0 = \frac{\tau}{\tau_0} \sin \omega \tau_0.$$

Подставляя выражения (19) и (20) в выражения (18) получим

$$\begin{aligned} P_{1rc}(\omega) &= \frac{(\tau_0 - \tau) + \tau(\cos \omega \tau_0 + b_1 \omega \sin \omega \tau_0)}{(1 + b_1^2 \omega^2) \tau_0}, \\ P_{1rs}(\omega) &= \frac{b_1 \omega [(\tau_0 - \tau) + \tau \cos \omega \tau_0] - \tau \sin \omega \tau_0}{(1 + b_1^2 \omega^2) \tau_0}. \end{aligned} \quad (21)$$



После дискретизации для составляющих спектра с элиайзингом для одного канала из выражений (14) получим

$$Z_{1rc}^*(\omega) = \sum_{i=0}^k \frac{(\tau_0 - \tau) + \tau[\cos(i\omega_0 \pm \omega)\tau_0 + b_1(i\omega_0 \pm \omega)\sin(i\omega_0 \pm \omega)\tau_0]}{[1 + b_1^2(i\omega_0 \pm \omega)^2]\tau_0} X_c(i\omega_0 \pm \omega) -$$

$$- \sum_{i=0}^k \frac{b_1(i\omega_0 \pm \omega)[(\tau_0 - \tau) + \tau \cos(i\omega_0 \pm \omega)] - \tau \sin(i\omega_0 \pm \omega)\tau_0}{[1 + b_1^2(i\omega_0 \pm \omega)^2]\tau_0} X_s(i\omega_0 \pm \omega). \quad (22a)$$

$$Z_{1rs}^*(\omega) = \sum_{i=0}^k \frac{b_1(i\omega_0 \pm \omega)[(\tau_0 - \tau) + \tau \cos \tau_0(i\omega_0 \pm \omega)] - \tau \sin(i\omega_0 \pm \omega)\tau_0}{[1 + b_1^2(i\omega_0 \pm \omega)^2]\tau_0} X_c(i\omega_0 \pm \omega) +$$

$$+ \sum_{i=0}^k \frac{(\tau_0 - \tau) + \tau[\cos(i\omega_0 \pm \omega)\tau_0 + b_1(i\omega_0 \pm \omega)\sin(i\omega_0 \pm \omega)\tau_0]}{[1 + b_1^2(i\omega_0 \pm \omega)^2]\tau_0} X_s(i\omega_0 \pm \omega). \quad (22b)$$

Аналогичным образом формируются выражения для других физически-виртуальных каналов преобразования при разных  $b_v$  и  $\tau$ . Всего необходимо  $k+1$  каналов, которые дадут  $2(k+1)$  уравнений системы вида (14) для нахождения квадратурных составляющих входного сигнала  $X_C(\omega)$  и  $X_S(\omega)$  в диапазоне частот от 0 до  $(k\omega_0 + \omega)$ .

**Заключение.** Предложены методы антиэлиайзинга по восстановлению параметров гармоник спектра непрерывного сигнала после его дискретизации и аналого-цифрового преобразования в измерительных каналах с использованием нескольких каналов аналоговой и цифровой фильтрации, позволяющие исключить искажения, вызванные элиайзингом.

Показано, что для реализации антиэлиайзинга достаточно двух разных физических каналов, роль которых выполняют аналоговые измерительные преобразователи, а число формируемых цифровых фильтров определяется требуемой шириной полосы частот восстанавливаемых гармоник.

Дальнейшие исследования могут быть направлены на комбинирование методов "параллельных каналов" и "прореживания" и их оптимизацию.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Маркос Ж. Дискретизация и квантование. – М.: Энергия, 1969. – 144 с.
2. Ефимов В.М. Квантование по времени при измерении и контроле. – М.: Энергия, 1969. – 87 с.
3. Мокин .Б.И., Ткачук Б.Л. Алгоритм обработки измерительной информации / Тезисы докладов IV Всесоюзного симпозиума «Проблемы создания преобразователей формы информации». Часть I. – Киев, 18 – 20 ноября, 1980.
4. Гайский В.А., Гайский П.В. Частотный анализ и синтез измерительных параметрически инвариантных систем // Системы контроля окружающей среды. – Севастополь: МГИ НАН Украины, 2012. – Вып. 17. – С. 47 – 55.
5. Гайский В.А., Гайский П.В. Антиэлиайзинг: Коррекция наложения частот в спектре равномерно дискретизированного процесса // Системы контроля окружающей среды. – Севастополь: МГИ НАН Украины, 2001. – С. 99 – 107.
6. Гайский В.А., Гайский П.В. Погрешности интерполяции процессов с известным спектром // Системы контроля окружающей среды. – Севастополь: МГИ НАН Украины, 1999. – С. 105 – 117.