ЭЛИАЙЗИНГ В СИСТЕМАХ КОНТРОЛЯ ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДЫ И ПУТИ БОРЬБЫ С НИМ

В.А. Гайский, П.В. Гайский

Морской гидрофизический институт
НАН Украины
г. Севастополь, ул. Капитанская, 2
E-mail: gaysky@inbox.ru

Дается сводка формул для расчета погрешностей дискретизации процессов и полей окружающей среды, вызванных элиайзингом. Рассматриваются вопросы контроля элиайзинга и пути борьбы с ним.

Непрерывные поля параметров и процессы в окружающей среде в результате наблюдений (измерений) или численного моделирования обычно представляются значениями параметров в узлах пространственно-временной решетки (ПВР). При восстановлении непрерывных полей и процессов по дискретным данным имеет место погрешность дискретизации, включающая две составляющие: погрешность, вызванная элиайзингом и погрешность интерполяции (экстраполяции).

Известно [1], что при непосредственной дискретизации непрерывных процессов возникает явление элиайзинга, если не выдерживается условие теоремы отсчетов Котельникова: максимальная частота f_m в спектре аналогового сигнала не должна превышать половины частоты дискретизации f_o. Элиайзинг приводит к погрешностям при восстановлении аналогового сигнала по дискретным отсчетам при любом методе интерполяции.

Процессы в окружающей среде обычно имеют бесконечные затухающие спектры. При их непосредственной дискретизации без специальных мер полное исключение элиайзинга невозможно, но возможно частичное исключение до некоторого заданного уровня.

Сигналы с ограниченным спектром обычно формируются в технических системах путем низкочастотной фильтрации и их непосредственная дискретизация возможна без элиайзинга за счет правильного выбора частоты дискретизации f_0 .

Однако на локальных отрезках времени даже сигнал с ограниченным спектром не всегда содержит максимальную частоту, из значения которой устанавливается частота дискретизации. Следовательно, в такой последовательности отсчетов будет избыточность. Известны способы адаптивной дискретизации сигналов с обнаружением существенных отсчетов по погрешности экстраполяции или интерполяции на основе нескольких отсчетов [2]. Эти способы учитывают суммарную погрешность дискретизации, включающую погрешность от элиайзинга и восстанавливающего фильтра (интерполятора). Однако, при непосредственной дискретизации многих непрерывных процессов (например, от окружающей среды), последовательность отсчетов поступает в канал передачи или регистрации данных, и восстановление непрерывного сигнала из нее выполняется разными потребителями, в разном масштабе времени, с разными требованиями по точности и, следовательно, разными восстанавливающими фильтрами (интерполяторами).

Если в последовательности отсчетов нет погрешности элиайзинга, то (согласно теореме отсчетов) непрерывный процесс теоретически при бесконечном времени может быть восстановлен точно по интерполяционному ряду Котельникова.

Следовательно, при непосредственной дискретизации многих непрерывных процессов, для максимального исключения избыточности отсчетов целесообразно избавиться от элиайзинга, а дальнейшее уменьшение погрешности дискретизации осуществлять при восстановлении за счет совершенствования интерполятора.

При существующих методах съемки полей окружающей среды реализацией пространственно-временной решетки современными инструментальными средствами возможности временной или пространственной фильтрации перед дискретизацией весьма ограничены и почти всегда имеет место явление элиайзинга и вызванная им погрешность дискретизации.

Оценка погрешности дискретизации ПВР проводилась ранее для различных случаев [3]. Количественные значения этих оценок для типовых съемов океанологических полей и срочных наблюдений на существующей сети метеостанций свидетельствуют о неудовлетворительной точности восстановления процессов и полей в малых пространственно-временных масштабах.

Однако этот факт практически игнорируется в существующих стандартных методах метеонаблюдений и съемке океанологических станций.

Многократное увеличение измерительной информации об атмосфере и поверхности земли и океана за счет дистанционного зондирования с ИСЗ не решает проблему повышения точности, поскольку данные дистанционных измерений калибруются по данным непосредственных контактных измерений. Эти же данные усваиваются в гидротермодинамических моделях, используемых для прогноза погоды и климата. Данные, содержащие существенную не устраненную погрешность дискретизации от элиайзинга не способны правильно настроить динамическую модель и обеспечить высокую точность прогноза. Поэтому есть смысл оценивать погрешность от элиайзинга, использую априорную информацию о спектрах измеряемых параметров в сечениях поля и интервалах дискретизации, контролировать наличие и уровень элиайзинга в процессе измерений, использовать возможности устранения элиайзинга при и после дискретизации. Эти вопросы рассматриваются в данной работе, включая обзор ранее опубликованных результатов.

<u>Оценка погрешности дискретизации из-за элиайзинга.</u> Для детерминированного непрерывного процесса со спектром $\dot{X}(\omega)$ спектр дискретизированного с интервалом τ_0 (циклической частотой ω_0) имеет вид

$$\dot{X}^*(\omega) = \frac{1}{\tau_0}\sum_{i=-\infty}^{\infty}\dot{X}(\omega - i\omega_0) \qquad (1)$$

Для случайного непрерывного процесса с функцией спектральной плотности (ФСП) $S_x(\omega)$ ФСП дискретизированного с интервалом τ_0 процесса имеет вид

$$S_x(\omega) = \frac{1}{\tau_0^2}\sum_{i=-\infty}^{\infty}S_x(\omega - i\omega_0) \qquad (2)$$

Далее рассматриваем случайные сигналы.

В выражении (2) спектр непрерывного сигнала $S_x(\omega)$ равен только одному слагаемому при $i = 0$, остальные слагаемые составляют функцию спектральной плотности ошибки

$$S_\varepsilon(\omega) = \frac{1}{\tau_0^2}\sum_{\substack{i=-\infty \\ i\neq 0}}^{\infty}S_x(\omega - i\omega_0) \qquad (3)$$

Для нижней оценки дисперсии ошибки при любом алгоритме интерполяции сигнала в полосе $[\omega_1\omega_2]$ можем записать

$$\begin{aligned}\varepsilon^2 &\geq 2\int_{\omega_1}^{\varpi_2} S_\varepsilon(\omega)d\omega = \frac{2}{\tau_0^2}\sum_{\substack{i=-\infty \\ i\neq 0}}^{\infty}\int_{\omega_1}^{\varpi_2} S_x(\omega - i\omega_0)d\omega = \\ &= 2\tau_0^{-2}\sum_{i=1}^{\infty}\left[\int_{\omega_1+i\omega_0}^{\varpi_2+i\omega_0} S_x(\omega)d\omega + \int_{i\omega_0-\omega_2}^{i\omega_0-\varpi_1} S_x(\omega)d\omega\right]\end{aligned} \qquad (4)$$

Для нижней оценки дисперсии относительной погрешности получим

$$\delta^2 \geq \left[\sum_{\substack{i=-\infty \\ i\neq 0}}^{\infty} \int_{\omega_1}^{\varpi_2} S_x(\omega - i\omega_0) d\omega \right] \cdot \left[\int_{\omega_1}^{\varpi_2} S_x(\omega) d\omega \right]^{-1} \tag{5}$$

<u>Погрешности дискретизации случайных процессов со степенными спектрами</u> [3]. Временные и пространственные одномерные спектры многих гидрометеорологических параметров в спадающей части характеризуются функцией вида

$$S(\omega) = c|f|^{-m}, \tag{6}$$

где $c = \text{const}$; $m = \{1; 2; 3; 4; 5\}$.

Для относительной погрешности δ_m в полосе $[f_1 f_2]$ получены следующие оценки

$$\delta_1^2 \geq \left[\sum_{i=1}^{\infty} \ln \frac{(i + f_2\tau_0)(i - f_1\tau_0)}{(i + f_1\tau_0)(i - f_2\tau_0)} \right] \left[\ln f_2 f_1^{-1} \right]^{-1}, \tag{7}$$

$$\delta_2^2 \geq \frac{\tau_0 f_2 f_1}{f_2 - f_1} \ln \frac{(1 - f_1\tau_0)(1 + f_2\tau_0)}{(1 - f_1\tau_0)(1 - f_2\tau_0)}, \tag{8}$$

$$\delta_3^2 \geq \frac{2\tau_0^3 f_2^2 f_1^2}{f_2^2 - f_1} \left(\frac{f_2}{1 - f_2^2\tau_0^2} - \frac{f_1}{1 - f_1^2\tau_0^2} \right), \tag{9}$$

$$\delta_4^2 \geq \frac{2\tau_0^4 f_1^3 f_2^3}{f_2^3 - f_1^3} \left[\frac{f_2}{(f_2^2\tau_0^2 - 1)^2} - \frac{f_1}{(f_1^2\tau_0^2 - 1)^2} \right], \tag{10}$$

$$\delta_5^2 \geq \frac{2\tau_0^5 f_1^4 f_2^4}{3(f_2^4 - f_1^4)} \left[\frac{f_2(3 + f_2^2\tau_0^2)}{(1 - f_2^2\tau_0^2)^3} - \frac{f_1(3 + f_1^2\tau_0^2)}{(1 - f_1^2\tau_0^2)^3} \right]. \tag{11}$$

Для ряда гидрофизических процессов и полей характерна степенная функция спектральной плотности с $m = \frac{5}{3}$, при этом из (5) запишем

$$\delta_{5/3}^2 \geq \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \left[\left| f_2 - i\tau_0^{-1} \right|^{-\frac{2}{3}} - \left| f_1 - i\tau_0^{-1} \right|^{-\frac{2}{3}} + \left| f_2 + i\tau_0^{-1} \right|^{-\frac{2}{3}} - \left| f_1 + i\tau_0^{-1} \right|^{-\frac{2}{3}} \right]}{\left| f_2^{-\frac{2}{3}} - f_1^{-\frac{2}{3}} \right|}. \tag{12}$$

Как показано в [3] при стандартных интервалах наблюдений (5; 10; 20; 30 минут и 1; 1,5; 2; 4; 6; 8; 12; 24 часа) минимальные относительные погрешности наблюдений в диапазоне мелкомасштабных процессов ($2{,}78 \cdot 10^{-4}$ – 1) Гц имеют погрешность более 100 %, в диапазоне мезомасштабов ($1{,}16 \cdot 10^{-5}$ – $0{,}56 \cdot 10^{-3}$) Гц менее 100 % погрешности дают наблюдение с интервалами менее 30 мин. Получается, что информация стандартных наблюдений пригодна в основном для изучения синоптической и более долговременной изменчивости.

Погрешности дискретизации многомерных случайных полей. Распространение аналогичного подхода для оценок погрешностей дискретизации n-мерных случайных полей с m-степенными спектрами по сечениям при $n=\overline{1,4}$ и $1 \le m \le 5$ выполнено в [4].

Приняты следующие ограничения.

Спектры реализаций по всем пространственным и временным сечениям идентичны и постоянны на время измерений T. Число шагов равномерной дискретизации по всем осям одинаково и равно $N^{1/n}$, где N – общее число отсчетов.

Формулы погрешности дискретизации выведены для полезного сигнала, восстанавливаемого в максимально возможном спектрально-волновом окне с нижними $f_1 = T^{-1} = (\tau_0 N_0)^{-1}$, $k_{1i} = (l_{0i} N_i)^{-1}$ и верхними $f_2 = 0{,}5\tau_0^{-1}$, $k_{2i} = 0{,}5 l_{0i}^{-1} (i=\overline{1,3})$ границами, где τ_0 и l_{0i} – интервалы соответственно временной и пространственной дискретизации по i-ой оси.

При указанных ограничениях погрешность дискретизации от элиайзинга $\delta_{m,n}(N)$ однозначно зависит от показателя степени спадания спектра m, размерности поля n и числа отсчетов $N = N_0 N_1 N_2 N_3$ (длины рядов, объема базы данных).

Оценки $\delta_{m,n}(N)$ имеют вид

$$\delta_{1,n} \approx \tau \left(\frac{\ln N}{n} \right)^{-\frac{1}{2}} , \qquad (13)$$

$$\delta_{2,n} = \left(\frac{4}{N^{1/n} - 2} \ln \frac{2(N^{1/n} - 1)}{N^{1/n} + 1} \right)^{\frac{1}{2}}, \qquad (14)$$

$$\delta_{3,n} = \left\{ \frac{4}{N^{2/n} - 4} \left[\frac{1}{3} - \frac{N^{1/n}}{2(N^{2/n} - 1)} \right] \right\}^{\frac{1}{2}}, \qquad (15)$$

$$\delta_{4,n} = \left\{ \frac{16}{N^{3/n} - 8} \left[\frac{1}{9} - \frac{N^{3/n}}{8(1 - N^{3/n})^2} \right] \right\}^{\frac{1}{2}}, \qquad (16)$$

$$\delta_{4,n} = \left\{ \frac{16}{3(N^{4/n} - 16)} \left[\frac{13}{27} - \frac{(3N^{2/n} - 1)N^{3/n}}{8(N^{2/n} - 1)^3} \right] \right\}. \qquad (17)$$

При $N > 100$ можно воспользоваться приближенными формулами

$$\delta_{2,n} \approx 1{,}04 N^{-1/2n} , \qquad (18)$$

$$\delta_{3,n} \approx 1{,}15 N^{-1/n} , \qquad (19)$$

$$\delta_{4,n} \approx 1{,}33 N^{-3/2n} , \qquad (20)$$

$$\delta_{5,n} \approx 1{,}60 N^{-1/n} . \qquad (21)$$

Для произвольных m в диапазоне $1 \le m \le 5$ приближенные оценки $\delta_{m,n}(N)$ могут быть вычислены по формуле

$$\delta_{m,n}(N) \approx \frac{10^{(0{,}0005m^4 - 0{,}006m^3 + 0{,}355m^2 - 0{,}054m + 0{,}024)}}{10^{[0{,}5(m-1)/n] \lg N}} . \qquad (22)$$

Для погрешности пространственно-временной дискретизации $\delta_{m,4}$ оценка умножается на $\sqrt{2} = 1{,}41$.

По приведенным выше формулам, прошедшим количественный контроль, оцениваются минимальные погрешности

представления полей окружающей среды (обусловленные элиайзингом) конечными базами данных или, наоборот, определяется требуемое число измерений или объем базы данных при заданной погрешности дискретного представления поля в заданном спектрально-волновом окне.

Элиайзинг в каналах с фильтрацией перед дискретизацией. В реальных измерительных каналах почти всегда имеет место фильтрация сигналов датчиком, вторичным измерительным преобразователем и в процессе аналого-цифрового преобразования. Обозначим комплексные коэффициенты передачи этих звеньев, соответственно

$$\dot{H}_1(\omega) = H_{C1}(\omega) + jH_{S_1}(\omega),$$

$$\dot{H}_2(\omega) = H_{C2}(\omega) + jH_{S_2}(\omega), \qquad (23)$$

$$\dot{H}_3(\omega) = H_{C3}(\omega) + jH_{S_3}(\omega).$$

Для последовательного соединения датчика и вторичного измерительного преобразователя получим

$$\dot{H}_{12}(\omega) = \left[H_{C1}(\omega)H_{C2}(\omega) - H_{S1}(\omega)H_{S2}(\omega)\right] + j\left[H_{S1}(\omega)H_{C2}(\omega) + H_{C1}(\omega)H_{S2}(\omega)\right]. \qquad (24)$$

$$\left|H_{12}(\omega)\right|^2 = \left|H_1(\omega)H_2(\omega)\right|^2 = \left|H_{C1}^2(\omega) + H_{S1}^2(\omega)\right|\left|H_{C2}^2(\omega) + H_{S2}^2(\omega)\right|. \qquad (25)$$

С учетом преобразований в АЦП

$$\dot{H}_{123}(\omega) = \left[H_{C1}(\omega)H_{C2}(\omega)H_{C3}(\omega) - H_{S1}(\omega)H_{S1}(\omega)H_{C3}(\omega) - H_{S1}(\omega)H_{C2}(\omega)H_{S3}(\omega) -\right.$$

$$\left. - H_{C1}(\omega)H_{S2}(\omega)H_{S3}(\omega)\ \right] + j\left[H_{S1}(\omega)H_{C2}(\omega)H_{C3}(\omega) + H_{C1}(\omega)H_{S2}(\omega)H_{C3}(\omega) + \right. \qquad (26)$$

$$\left. + H_{C1}(\omega)H_{C2}(\omega)H_{S3}(\omega) - H_{S1}(\omega)H_{S2}(\omega)H_{S3}(\omega)\ \right],$$

$$\left|H_{123}(\omega)\right|^2 = \left|H_1(\omega)H_2(\omega)H_3(\omega)\right|^2 = \left[H_{C1}^2(\omega) + H_{S1}^2(\omega)\right]\times$$

$$\times\left[H_{C2}^2(\omega) + H_{S2}^2(\omega)\right]\left[H_{C3}^2(\omega) + H_{S3}^2(\omega)\right]. \qquad (27)$$

Для детерминированных входных сигналов $x(t)$ со спектром $\dot{X}(\omega) = X_C(\omega) + jX(\omega)$, дискретизированный сигнал $y(t)$, прошедший последовательную цепочку фильтрации, будет иметь вид

$$Y_C(\omega) = H_C(\omega)X_C(\omega) - H_S(\omega)X_S(\omega),$$

$$Y_S(\omega) = H_S(\omega)X_C(\omega) + H_C(\omega)X_S(\omega), \qquad (28)$$

где $H_C(\omega)$ и $H_S(\omega)$ – составляющие комплексного коэффициента передачи цепочки звеньев.

После дискретизации этого сигнала спектр его будет

$$Y_C^*(\omega)=\omega_0\sum_{i=-\infty}^{\infty}Y_C(i\omega_0-\omega)=\omega_0\left[\sum_{i=-\infty}^{\infty}H_C(i\omega_0-\omega)X_C(i\omega_0-\omega)-\right.$$

$$\left.-\sum_{i=-\infty}^{\infty}H_S(i\omega_0-\omega)X_S(i\omega_0-\omega)\right]. \qquad (29)$$

$$Y_S^*(\omega)=\omega_0\sum_{i=-\infty}^{\infty}Y_S(i\omega_0-\omega)=\omega_0\left[\sum_{i=-\infty}^{\infty}H_S(i\omega_0-\omega)X_C(i\omega_0-\omega)+\sum_{i=-\infty}^{\infty}H_C(i\omega_0-\omega)X_S(i\omega_0-\omega)\right]. \qquad (30)$$

Для случайного сигнала *x(t)* с функцией спектральной плотности $S_x(\omega)$ сигнал *y(t)* до дискретной формы представления будет иметь функцию спектральной плотности вида

$$S_y(\omega)=\left|H(\omega)\right|^2 S_x(\omega), \qquad (31)$$

где $H(\omega)$ – модуль коэффициента передачи цепочки звеньев.

После дискретизации

$$S_y^*(\omega)=\omega_0^2\sum_{i=-\infty}^{\infty}S_y(i\omega_0-\omega)=\omega_0^2\sum_{i=-\infty}^{\infty}\left|H(i\omega_0-\omega)\right|^2 S_y(i\omega_0-\omega). \qquad (32)$$

Обычно датчики и вторичные измерительные преобразователи являются инерционными или колебательными звеньями 1-го или 2-го порядка.

Фильтрация, выполняемая в процессе аналого-цифрового преобразования, обычно является сверткой «дискретизирующего» импульса некоторой известной формы с сигналом *y(t)*.

Если это прямоугольный импульс длительностью τ_u, то берется отсчет интегрального значения сигнала *y(t)* за время τ_u. При этом передаточная функция фильтра среднего равна [1].

$$\dot{H}_3(\omega)=H(\omega)e^{-j\omega\tau_u}=\left|\frac{\sin(\pi\omega\tau_u)}{\pi\omega\tau_u}\right|e^{-j\omega\tau_u}, \qquad (33)$$

$$H_{C3}(\omega)=\frac{\sin(\pi\omega\tau_u)}{\pi\omega\tau_u}\cos(\pi\omega\tau_u), \qquad (34)$$

$$H_{S3}(\omega)=\frac{\sin(\pi\omega\tau_u)}{\pi\omega\tau_u}\sin(\pi\omega\tau_u). \qquad (35)$$

Интегрирование в процессе аналого-цифрового преобразования играет роль низкочастотной фильтрации преобразуемого сигнала, подавляет верхние частоты и уменьшает погрешность от элиайзинга. В многоканальных системах с групповыми АЦП и АЦП с устройствами «выборки и запоминания» сигнала, $\tau_u << \tau_0$ и функция низкочастотной фильтрации незначительна. В одноканальных системах $\tau_u=\tau_0$ и уже имеет место первый нуль модуля $\left|H_з(\omega)\right|$ на частоте отсчетов f_0. Для перемещения этого нуля на частоту Найквиста достаточно провести цифровое осреднение по двум последовательным отсчетам. Дальнейшее скользящее цифровое осреднение отсчетов будет эквивалентно низкочастотной фильтрации перед дискретизацией. Если в процессе аналого-цифрового преобразования на интервале между отсчетами осуществлять свертку сигнала с функцией из некоторого ортогонального базиса, то получим цифровой отсчет со значением коэффициента для этой функции (орты) при разложении сигнала по этому базису. При выполне-

нии операции свертки в других каналах с другими функциями из этого ортогонального базиса получаем случай «обобщенной дискретизации». Чем больше интервал представления сигнала ортогональным рядом, тем сильнее подавление верхних частот в сигнале и, следовательно, уменьшение элиайзинга.

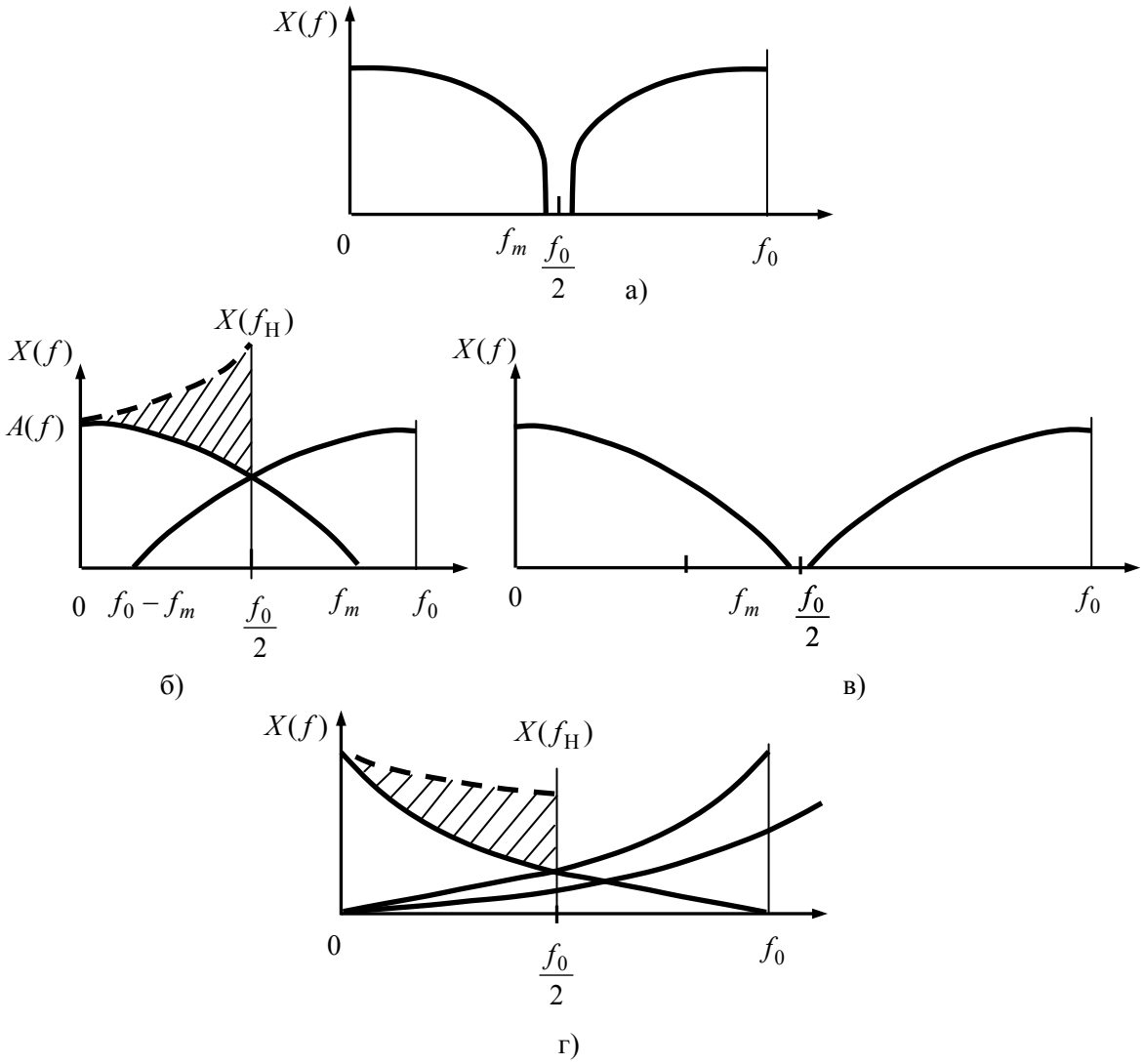
Адаптивная дискретизация сигналов. При аналого-цифровом преобразовании входной аналоговый сигнал $x(t)$ переходит в последовательность цифровых отсчетов $\{x(k)\}$ с временным интервалом τ_0 на выходе. При этом для спектра $\dot{X}_\partial(f)$ дискретизированного сигнала имеет место равенство

$$\dot{X}_\partial(f) = f_0 \sum_{i=-\infty}^{\infty} \dot{X}(f - if_0), \qquad (36)$$

где $\dot{X}(f)$ – спектр аналогового сигнала;

$f_0 = \dfrac{1}{\tau_0}$ – частота дискретизации.

Если максимальная частота f_m в спектре аналогового сигнала не превышает частоты Найквиста f_H, т.е. половины частоты дискретизации f_0 $\left(f_m \le f_0/2 = f_{\text{Н}}\right)$, то удовлетворяются требования теоремы отсчетов и элиайзинг отсутствует. Этот случай иллюстрируется на рис. 1а.



Р и с. 1. График амплитудных спектров дискретизированных сигналов для аналоговых сигналов с ограниченным частотой f_m спектром (а), с отсутствием элиайзинга (а) и (в) и наличием элиайзинга для аналоговых сигналов с ограниченным (б) и неограниченным (г) спектром

Если $f_{\text{Н}} < f_m < f_0$, то имеет место элиайзинг (рис. 1б), который можно устранить повышением частоты дискретизации (рис. 1в). Если аналоговый сигнал имеет бесконечный затухающий спектр ($f_m \to \infty$), то имеет место элиайзинг, погрешность от которого можно уменьшить, увеличив частоту дискретизации до максимально возможной или целесообразной (рис. 1г).

При этом во всех случаях наличие гармоники на частоте Найквиста $f_{\text{Н}} = f_0/2$ в спектре дискретизированного сигнала свидетельствует о присутствии элиайзинга.

Амплитуда этой гармоники свидетельствует об уровне элиайзинга и связанной с ним погрешности восстановления аналогового сигнала по дискретным отсчетам при любом методе интерполяции.

Для вычисления амплитуды гармоники на частоте Найквиста воспользуемся дискретным преобразованием Фурье последовательности $\{x(k)\}$ из N отсчетов.

Для комплексных амплитуд гармоник ряда Фурье справедливо

$$\dot{X}(n) = \frac{1}{N\tau_0}\sum_{k=0}^{N-1} x(k)\exp\left(-j\frac{2\pi nk}{N}\right), \tag{37}$$

для амплитуды гармоники с частотой Найквиста $\frac{N}{2}$ получим при четном N

$$\dot{X}\left(\frac{N}{2}\right) = \frac{1}{N\tau_0}\sum_{k=0}^{N-1} x(k)\exp(-j\pi k) = \frac{1}{N\tau_0}\sum_{k=0}^{N-1} x(k)(-1)^k . \tag{38}$$

Значение N устанавливается из требований точности представления отрезка $x(t)$ длиной рядом Фурье из N членов при использовании априорно принятой или/и экспериментально установленной модели спектра сигнала.

Управление частотой дискретизации f_0 состоит в ее понижении (для сокращения избыточных отсчетов) или повышении (для уменьшения погрешности от элиайзинга) так, чтобы вычисленное значение амплитуды гармоники на частоте Найквиста $X(f_{\text{Н}})$ равнялось априорно заданному значению, близкому к нулю для сигналов с ограниченным спектром или определенной величине $X(f_{\text{Н}})_{доп}$, которая характеризует допустимый уровень элиайзинга при установленной частоте дискретизации f_0.

Таким образом, при осуществлении адаптивного способа аналого-цифрового преобразования сигнала с неизвестным спектром сначала устанавливается максимально достижимая или целесообразная частота дискретизации $f_{0\max}$ и необходимое число N отсчетов для фильтрации гармоники с частотой Найквиста $f_{\text{Н}}$, вычисляется оценка амплитуды $X\left(\frac{f_{0\max}}{2}\right)$ этой гармоники, далее действия зависят от значения этой оценки.

Если $X\left(\frac{f_{0\max}}{2}\right) \approx 0$, то частота дискретизации f_0 снижается до такого значения f_{0m}, при котором $X\left(\frac{f_{0m}}{2}\right) > 0$, которое имеет место на частоте $f_m = \frac{f_{0m}}{2}$ аналогового сигнала с ограниченным спектром. Поиск этой частоты можно осуществлять по-разному: равномерным ступенчатым понижением f_0

или ступенчатым формированием значений f_0 по принципу дихотомии: последовательному двоичному делению полосы частот, в которой находится частота f_m.

После определения f_m частота дискретизации f_{0m}^{+} устанавливается несколько больше $2f_m$, т.е.

$$2f_m < f_{0m}^{+}. \qquad (39)$$

Для каналов преобразования сигналов со встроенными фильтрами низкой частоты (ФНЧ) до $f_{\text{Н}}$ значение f_{0m}^{+} одновременно будет безизбыточным и $f_{0\max}$.

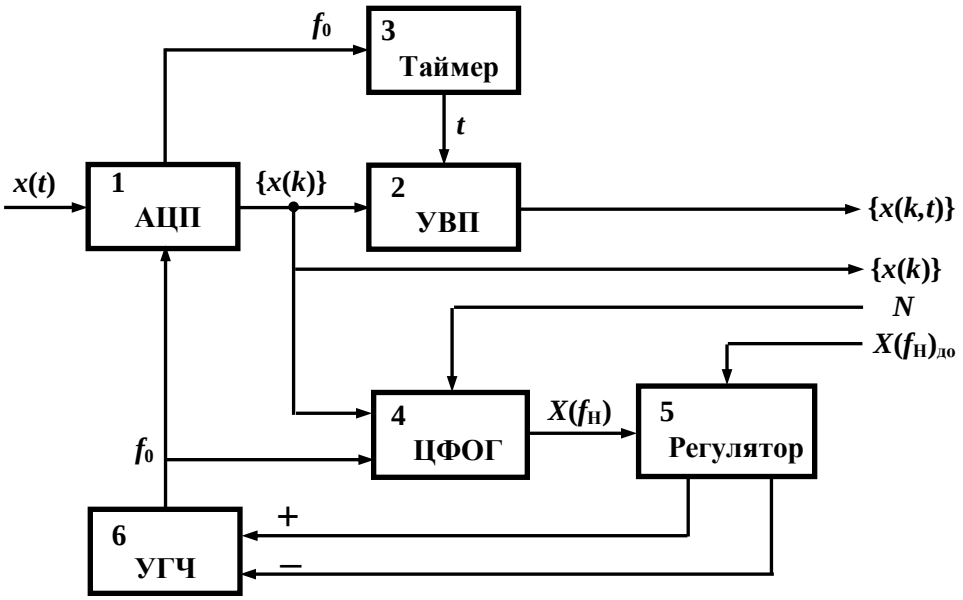
В рабочем режиме реальные сигналы могут иметь ограниченный спектр с частотами f_m, меньшими граничной частоты $f_{\text{в}}$ встроенного ФНЧ, поэтому отслеживание частоты f_m в реальном масштабе времени целесообразно в диапазоне ниже $f_{\text{в}}$.

Если $X\left(\frac{f_{0\max}}{2}, N\right) = X(f_H)_{доп}$, то имеет место неустраненный элиайзинг и его уровень характеризуется значением $X(f_H)_{доп}$. Это значение качественно свидетельствует о погрешности дискретизации от элиайзинга и может служить для получения количественных оценок при известной модели спектра сигнала.

Если допустимо повышение уровня элиайзинга до $X(f_H)_{доп}$, то возможно понижение частоты дискретизации до значения, при котором этот уровень будет достигнут. Текущее мгновенное значение частоты дискретизации f_0 устанавливается последующим интервалом τ_0 после вычисления $X(f_{\text{Н}})$ по N последним отсчетам, поэтому последовательности отсчетов на выходе аналого-цифрового преобразователя будут с неравномерными временными интервалами составлять поток существенных отсчетов.

При реализации адаптивного способа преобразования отсчеты выходной последовательности для каналов передачи данных не в реальном масштабе времени или для регистрации необходимо привязывать по времени, что может выполняться присоединением к коду отсчета кода ширины последующего временного интервала.

Устройство для осуществления способа адаптивного аналого-цифрового преобразования, представлено на рис. 2.



Р и с. 2. Структурная схема устройства аналого-цифрового преобразования с управляемой частотой дискретизации

В состав устройства входят аналого-цифровой преобразователь 1 (АЦП) непосредственной дискретизации, узел временной привязки отсчетов 2 (УВП), таймер 3 (Т), цифровой фильтр одной гармоники 4 (ЦФОГ), регулятор 5 (Р), управляемый генератор частоты дискретизации 6 (УГЧ).

АЦП 1 непосредственной дискретизации может быть любого типа с входом внешней синхронизации отсчетов. УВП 2 служит для присоединения к кодам отсчета кода текущего времени или ширины временного интервала дискретизации.

Таймер 3 предназначен для выработки и считывания кодов времени для привязки отсчетов, УГЧ 6 предназначен для выработки сигнала частоты дискретизации f_0 под внешним управлением на понижение или повышение, цифровой фильтр 4 служит для получения оценки амплитуды гармоники на частоте Найквиста по N отсчетам при текущей частоте дискретизации f_0. Регулятор 5 предназначен для выработки сигналов управления на понижение (–) или повышение (+) частоты дискретизации f_0 по результатам сравнения оценки амплитуды гармоники на частоте Найквиста с заданным извне допустимым значением $X(f_{\text{Н}})_{доп}$. Внешними входами-выходами устройства являются: вход аналогового сигнала $x(t)$, соединенный с входом АЦП 1, вход кода числа N отсчетов фильтрации, поданный на соответствующий вход ЦФОГ 4, вход допустимого значения оценки амплитуды $X(f_{\text{Н}})_{доп}$ на частоте Найквиста, поданный на соответствующий вход регулятора 6, выход $\{x(k)\}$ нерегулярного потока существенных отсчетов, выход $\{x(k,t)\}$ отсчетов дискретизированного сигнала с временной привязкой, соединенный с выходом УВП 2. Кроме того, выход $x(k)$ АЦП 1 соединен с входом ЦФОГ 4, выход которого подан на вход регулятора 5, выходы которого на повышение (+) и понижение (–) соединены с соответствующими входами генератора частоты дискретизации 6, выход частоты дискретизации f_0 которого подан на одноименный вход АЦП 1 и далее на вход таймера 3.

Устройство работает следующим образом. На вход ЦФОГ 4 поступает извне значение N числа отсчетов для фильтра одной гармоники, а на вход регулятора 5 поступает извне значение $X(f_H)_{доп}$ допустимой амплитуды гармоники на частоте Найквиста. С выхода управляемого генератора частоты УГЧ 6 импульсы частоты дискретизации f_0 поступают на вход синхронизации АЦП 1, который выполняет преобразование значения аналогового сигнала $x(t)$ в цифровой отсчет $x(k)$, поступающий на вход ЦФОГ 4, выход $\{x(k)\}$ и вход УВП 2 для временной привязки отсчетов и формирования последовательности $\{x(k,t)\}$, поступающей на внешний выход устройства. В ЦФОГ4 по N текущим отсчетам $\{x(k)\}$ вычисляется по формуле (3) амплитуда гармоники на частоте Найквиста $X(f_{\text{Н}})$, значение которой поступает на вход регулятора 5, где сравнивается с величиной $X(f_{\text{Н}})_{\text{доп}}$. Если $X(f_{\text{Н}}) > X(f_{\text{Н}})_{\text{доп}}$, то регулятор 5 вырабатывает сигнал (+) на повышение частоты дискретизации f_0, если $X(f_{\text{Н}}) < X(f_{\text{Н}})_{\text{доп}}$, то регулятор 5 вырабатывает сигнал (–) на понижение частоты дискретизации f_0. Эти сигналы поступают на УГЧ 6, на выходе которого устанавливается новое значение частоты дискретизации f_0, поступающее далее на синхронизирующий вход АЦП 1, таймер 3 и ЦФОГ 4. Таким образом под-

держивается нерегулярный поток цифровых отсчетов $\{x(k)\}$ сигнала, содержащих только существенные отсчеты без избыточности и с гарантированной погрешностью от элиайзинга. Одновременно формируется асинхронный поток отсчетов $\{x(k,t)\}$ с временной привязкой.

Заключение. Пути борьбы с элиайзингом. Основным методом исключения элиайзинга или снижения погрешности из-за него является увеличение частоты дискретизации f_0. Этот метод используется как «передискретизация» в АЦП с сигма-дельта модуляцией. Однако всегда есть ограничения на $f_{0\max}$ и на объем избыточной информации. Поэтому целесообразно контролировать наличие и уровень элиайзинга и управлять частотой дискретизации так, как это показано выше.

Другим реальным методом борьбы с элиайзингом является фильтрация сигналов перед аналого-цифровым преобразованием в датчике, вторичном измерительном преобразователе и непосредственно в АЦП в процессе аналого-цифрового преобразования. К этой же группе методов относится и многоканальная фильтрация, приводящая к «обобщенной дискретизации» с представлением преобразуемого на заданном отрезке сигнала цифровыми отсчетами коэффициентов разложения по функциям ряда Фурье. При этом подавляются высокочастотные составляющие сигнала.

Этот метод используется в распределенных профилемерах физических полей, в частности, в распределенных термопрофилемерах на базисе функций Уолша-Адамара [5, 6].

Представляется целесообразным исследование методов антиэлиайзинга – апостериорного восстановления спектра сигнала по дискретным отсчетам с использованием известного механизма элиайзинга и внесением избыточности модуляцией при предфильтрации, многоканальности физической и виртуальной [7].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Макс Ж.* Методы и техника обработки сигналов при физических измерениях / В 2-х томах. Пер. с франц. – М.: Мир, 1983. – Т. 1. – 312 с.
2. *Картман С.М.* Сокращение избыточности как практический метод сжатия данных. Пер. с англ.: ТИИЭР, 1967, – Т. 55, – № 3. – С. 8 – 20.
3. *Автоматизированные* системы с буксируемыми приборами в океанологических исследованиях / Гайский В.А., Артемов Ю.Г., Блинков В.А. и др. – Киев: Наук. думка, 1987. – 176 с.
4. *Гайский В.А.,* Гайский П.В. Погрешности дискретизации многомерных случайных гидрофизических полей со степенными спектрами. Морской гидрофизический журнал, 1994. – № 6. – С. 61 – 66.
5. *Авторское* свидетельство СССР № 808872. Кл. G 01 K 7/00. Устройство для измерения температуры. Гайский В.А. Опубл. в Бюл. № 8, 28.02.1981.
6. *Применение* функций Уолша в системах автоматизации научных исследований / Гайский В.А., Егупов Н.Д., Корнюшин Ю.П. – Киев: Наук. думка, 1993. – 207 с.
7. *Гайский В.*А., *Гайский П.В.* Антиэлиайзинг в многоканальных системах аналого-цифрового преобразования сигнала // Системы контроля окружающей среды. – Севастополь: МГИ НАНУ. 2008. – Вып. 18. – С. 75 – 83.