ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ СПЕКТРОВ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ АЛЬТЕРНАТИВНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ, ИХ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ, КЛАССИФИКАЦИИ И МОДЕЛИРОВАНИЯ НА ЭВМ. ИДЕНТИФИКАЦИЯ МОДЕЛИ АРСС

С.В. Согомонян

Научно-исследовательский центр
ВС Украины
"Государственный океанариум"
г. Севастополь, ул. Эпроновская, 7
E-mail: sogomonyany@mail.ru

На основе метода спектрального анализа стационарных случайных процессов, предполагающего декомпозицию спектра и его аппроксимацию суммой элементарных спектров, предложена методика оптимального прогнозирования, моделирования случайных процессов, разработана альтернативная математическая модель случайных процессов, проведена их классификация, анализ периодически нестационарных случайных процессов, решена проблема идентификации модели АРСС и построения АРСС-прогноза.

Спектральный анализ широко используется при исследовании случайных процессов (СП) в различных областях естествознания и техники, в социологии, физике, экономике, биологии и т.д.

В большинстве случаев реальные СП являются результатом наложения (суперпозиции) множества независимых СП более простой структуры, их функции спектральной плотности полимодальны (многовершинны). Это относится и к отдельным СП, и к СП на выходе сложных динамических систем. Так, спектр "отдельного" СП волнения может иметь несколько максимумов вследствие наложения различных волновых систем. Спектр качки как СП на выходе системы "корабль", с учетом теоремы А.Я. Хинчина, может быть полимодальным из-за многовершинности спектра волнения, действующего на корабль, или из-за определенного соотношения частот максимумов волнения и АЧХ корабля.

Наложение составляющих компонент СП маскирует и искажает полезные закономерности, что усложняет анализ таких "составных" процессов как во временной, так и в частотной области. С другой стороны, вычленение таких составляющих в анализируемом процессе и учет структурных особенностей СП может существенно упростить задачи его анализа, например, прогнозирование СП, моделирование на ЭВМ, изменение характеристик СП "в нужную сторону" за счёт варьирования параметров системы и т.д.

В последующих рассуждениях ограничимся достаточно широким классом стационарных однородных СП (при исследовании реальных СП можно выделить участки квазистационарности и квазиоднородности, на которых процесс можно считать эргодическим). Пусть случайный процесс $x(t)$ имеет спектр $S(\omega)$, относительно которого с большой степенью общности можно предположить, что он – гладкая ограниченная строго положительная функция, стремящаяся к нулю при $\omega \to \infty$ так, что её интеграл – дисперсия процесса – конечное число ($D<\infty$). Тогда её сколь угодно точно можно аппроксимировать дробно-рациональной функцией вида $S(\omega)=P(\omega)/Q(\omega)$ с конечными порядками полиномов $P(\omega)$ и $Q(\omega)$. В силу содержательных свойств спектральной плотности $S(\omega)$ на эту функцию накладываются ограничения [1]: порядок полинома числителя кратен *2*; порядок полинома знаменателя кратен *4*; порядок полинома числителя $2m$ в самом общем случае меньше порядка полинома знаменателя $4n$ на *2*: $2m=4n-2$; знаменатель не имеет действительных корней; все коэффициенты полиномов действительны:

$$S(\omega) = P(\omega)/Q(\omega) = \sum_{i=0}^{m} p_{2i}\omega^{2i} \ / \ \sum_{j=0}^{n} q_{4j}\omega^{4j} ,$$

$$p_{2i}, q_{2j} \in R^1, \ i=\overline{1,m}, \ j=\overline{1,n}, \ 2m<4n,$$

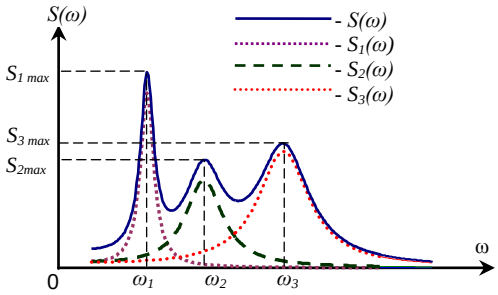
$$Q(\omega) \neq 0 \, \forall \omega \in R^1. \qquad (1)$$

Корни полинома знаменателя – попарно сопряженные комплексные числа, и каждому корню соответствует корень противоположного знака, т.е. все корни симметричны относительно действительной и мнимой осей: $\omega_{k,k+1} = \alpha_k \pm i\beta_k$, $\omega_{k+2,k+3} = -\alpha_k \pm i\beta_k$, $k=\overline{1,n}$.

Для таких СП в работе [2] предложен метод анализа СП, предполагающий декомпозицию спектра и его аппроксимацию суммой элементарных спектров (условимся для краткости называть его "метод элементарных спектров"). Операция **декомпозиции спектра** заключается в следующем: пусть спектральная плотность $S(\omega)$ исследуемого СП $x(t)$ имеет N максимумов $S_{i\,max}$ на частотах ω_i. Такой полимодальный спектр с N максимумами разбивается на N унимодальных элементарных спектров:

$$S(\omega) = \sum_{i=1}^{N} S_i(\omega) \qquad (2)$$

так, что каждая из функций $S_i(\omega)$ имеет только один экстремум – максимум на частоте ω_i, равный S_{imax}. Пример декомпозиции спектра показан на рис. 1.



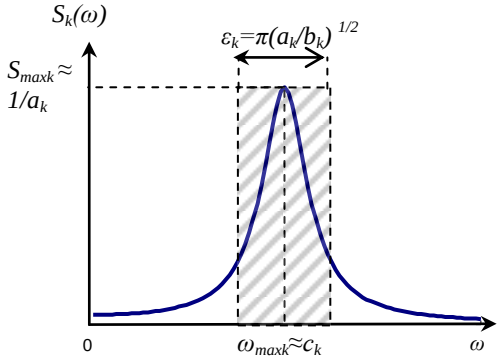
Р и с. 1. Пример декомпозиции спектра

Из фрагмента некоторого полимодального спектра $S(\omega)$, содержащего три максимума, выделены элементарные унимодальные спектры $S_1(\omega)$, $S_2(\omega)$, $S_3(\omega)$. В общем случае такая процедура может быть проведена при любом числе экстремумов. Каждому элементарному спектру $S_i(\omega)$ соответствует некоторый элементарный i-й СП $x_i(t)$, сумма которых дает искомый СП $x(t)$.

Аппроксимация спектра СП суммой элементарных спектров заключается в следующем. Каждый выделенный при декомпозиции (2) унимодальный спектр $S_k(\omega)$ предложено [2] аппроксимировать **элементарным спектром** – функцией вида

$$S_k(\omega) = f(a,b,c,\omega) = \\ = \frac{1}{a_k + b_k(c_k-\omega)^2} + \frac{1}{a_k + b_k(c_k+\omega)^2}. \qquad (3)$$

Такая функция имеет минимальные порядки полиномов из всего класса функций, ограниченного условиями (1). Эта функция – элементарный спектр – выбрана в качестве единичного элемента аппроксимации. Показано [2], что элементарный спектр (3) есть удобная форма представления слагаемых в **единственно возможном** разложении спектра (1). Удобство функции (3) заключается в том, что для встречающихся на практике спектров с небольшим (относительно максимального) значением на нулевой частоте такой элементарный спектр имеет максимум $S_{\max\ k} \approx 1/a_k$ на частоте $\omega_{\max\,k} \approx c_k$ (рис. 2), а параметр b_k "регулирует" ширину спектра (3).



Р и с. 2. Элементарный спектр

Для элементарного спектра $S_k(\omega)$ введена [2] мера **ширины спектра**

$$\varepsilon_k = \int_0^{\infty} S_k(\omega)d\omega / S_{k\max} = D_k / S_{k\max}\ , \qquad (4)$$

где D_k – дисперсия элементарного СП $x_k(t)$. Такое определение ширины спектра имеет следующий смысл: если представить элементарный спектр $S_k(\omega)$ в виде эквивалентного ему по площади прямоугольника с высотой $S_{k\ max}$, то ε_k будет его шириной.

Показано, что ε_i также является и **мерой регулярности** (в стохастическом смысле) элементарного СП $x_k(t)$. Чем меньше ε_k (т.е. чем уже спектр), тем менее регулярен процесс $x_k(t)$, тем ближе случайный процесс $x_k(t)$ к нерегулярному (сингулярному, детерминированному) процессу – гармонике с частотой ω_k. При $\varepsilon_k \to \infty$ спектр бесконечно расширяется, т.е. элементарный СП $x_k(t)$ стремится к белому шуму. Таким образом, ε_k является, с одной стороны, количественной безразмерной характеристикой ширины элементарного спектра $S_k(\omega)$, а с другой – мерой регулярности элементарного СП $x_k(t)$ (и, как следствие, мерой эффективности линейного оптимального прогноза).

Более того, если спектр СП в общем случае полимодален и проведена его декомпозиция (2), то для исходного СП $x(t)$ можно вывести меру его регулярности ε как некоторую функцию от совокупности мер составляющих ε_k.

Для элементарного спектра (3) дисперсия и ширина спектра равны:

$$D_k = \int_0^\infty \hat{S}_k(\omega)d\omega = \frac{\pi}{\sqrt{a_k b_k}} \quad ;$$

$$\varepsilon_k = \frac{\pi}{S_{\max k}\sqrt{a_k b_k}} \approx \pi\sqrt{a_k / b_k} \quad . \qquad (5)$$

Функция (3) – элементарный спектр – назван единичным элементом аппроксимаций, т.к. встречающиеся на практике сложные полимодальные спектры можно сколь угодно точно аппроксимировать конечной суммой функций вида (3) и результирующая функция при этом будет удовлетворять требованиям (1). Более того, любые совокупности сумм и произведений функций вида (3) удовлетворяют (1).

Декомпозиции спектра $S(\omega)$ на элементарные спектры, или, иначе, аппроксимации спектра $S(\omega)$ суммой элементарных спектров (3)

$$S(\omega) = \sum_{k=1}^{n} S_k(\omega) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{a_k + b_k(c_k-\omega)^2} + \frac{1}{a_k + b_k(c_k+\omega)^2}\right) \quad (6)$$

соответствует декомпозиция СП на элементарные случайные процессы $x(t) = \sum_{k=1}^{n} x_k(t)$, где каждый элементарный процесс $x_k(t)$ имеет элементарный спектр $S_k(\omega)$ и обладает дисперсией D_k (5).

Практическая методика аппроксимации реального полимодального спектра $S(\omega)$ с помощью предложенного метода элементарных спектров [2] достаточно проста. Определяются значения спектра $\{S(\omega_i)\}$ в некотором существенном для исследования множестве точек $\Omega = \{\omega_i\}$, $i = \overline{1, N_\Omega}$ (либо по набору измерений СП, либо по известным аналитическим формулам). Производится декомпозиция спектра на унимодальные функции (2). Каждый унимодальный спектр аппроксимируется элементарным спектром – функцией (3). Параметры аппроксимации k-го элементарного спектра: $a_k=1/S_{k\ max}$; $c_k=\omega\ :\ S_k(\omega)=S_{k\ max}$; $b_k=\pi^2/(a_k D_k^2)$. Тем самым при нахождении этих параметров мы избегаем решения практически плохо реализуемой задачи многопараметрической оптимизации.

Отметим, что выше предполагалась аппроксимация каждой унимодальной функции ("пика" спектра), выделенной при декомпозиции (2), одним элементарным спектром – функцией вида (3). В общем случае (например, при асимметрии пика) его можно аппроксимировать суммой двух или более таких функций, одна из которых определяет основной максимум, а другие корректируют поведение спектра в области более высоких или более низких частот. Вообще же суммой конечного числа элементарных спектров – функций вида (7) – можно сколь угодно точно аппроксимировать любой сложный гладкий (неразрывный) полимодальный спектр.

Предложенный метод (декомпозиции и аппроксимации спектров СП с помощью суммы элементарных спектров) и введенная мера регулярности СП (она же мера ширины спектра и мера эффективности линейного оптимального прогноза) весьма полезны [3, 4] для более глубоких исследований СП, а именно:

1) построение классического оптимального прогноза;

2) построение оптимального дискретного прогноза с использованием модели АРСС, идентификация АРСС-модели случайного процесса.

3) построение альтернативной математической модели СП;

4) классификация СП;

5) моделирование СП;

6) анализ периодически нестационарных СП.

1. Построение оптимального (наилучшего в среднеквадратическом) прогноза. Классический метод построения наилучшего в среднеквадратическом линейного оптимального прогноза основан на следующем. Если прогнозируемый случайный процесс $x(t)$ имеет спектральную плотность $S(\omega)=P(\omega)/Q(\omega)=|H(i\omega)/F(i\omega)|^2$, то его можно рассматривать как результат прохождения белого шума $v(t)$ с единичной спектральной плотностью через систему

с передаточной функцией (формирующий фильтр) $W(s)=H(s)/F(s)$. Такая система описывается стохастическим дифференциальным уравнением $\dot{\chi}(t)=A\chi(t)+Gv(t)$, где элементы матриц A и G определяются [1] через коэффициенты полиномов $W(s)$, а, следовательно, через коэффициенты полиномов спектра $S(\omega)$. Наилучший в среднеквадратическом линейный оптимальный прогноз в момент времени t на время τ вперед есть решение однородного дифференциального уравнения $\dot{\chi}(Q)=A\chi(Q),\ t\le Q\le t+\tau$, то есть $\hat{\chi}(t+\tau)=e^{A\tau}\cdot\chi(t)$. С учётом разложения матричного экспоненциала e^{At} по формуле Сильвестра оптимальный прогноз $\hat{\chi}(t+\tau)$ содержит сумму экспоненциально затухающих гармоник с частотами ω_j и показателями затухания ρ_j, равными соответственно мнимой и вещественной частям собственных чисел матрицы A. Основные проблемы, возникающие при применении такого метода: практически плохо реализуемая задача многопараметрической оптимизации при определении параметров аппроксимации спектра СП дробно-рациональной функцией вида $S(\omega)=P(\omega)/Q(\omega)$; плохо численно реализуемая задача нахождения собственных чисел матрицы A для реальных СП в сложных системах.

Обе проблемы решаются с помощью предложенного метода элементарных спектров. Если проведена аппроксимация спектра суммой элементарных спектров (6), ей соответствует декомпозиция самого случайного процесса $x(t)$ на независимые элементарные случайные процессы $x_k(t)$. В оптимальном прогнозе каждое слагаемое-гармоника соответствует своему элементарному спектру $S_k(\omega)$ и элементарному СП $x_k(t)$. Доказано [4], что наилучший прогноз по каждому независимому элементарному случайному процессу $x_k(t)$ содержит гармонику с частотой $\omega_k=c_k$ и показателем затухания $\rho_k=-\sqrt{a_k/b_k}$, а прогноз исходного процесса $x(t)$ есть сумма прогнозов независимых элементарных случайных процессов и содержит все такие гармоники, т.е. гармоники с частотами c_k и показателями затухания $-\sqrt{a_k/b_k}$, определяемыми параметрами аппроксимации (6) $a_k, b_k, c_k,\ k=\overline{1,n}$ спектра $S(\omega)$.

Тем самым косвенно решена задача нахождения собственных чисел матрицы A: показано [4], что они равны $\lambda_{k,k+1}=\rho_k\pm i\omega_k=-\sqrt{a_k/b_k}\pm ic_k,\ k=\overline{1,n}$. Также отметим, что показатель затухания каждой k-й гармоники с точностью до множителя π совпадает с введённой мерой (5) ширины спектра ε_k, она же мера регулярности процесса.

Остаются 2 проблемы в практическом применении этого метода. Первая – в каждый момент построения прогноза нужно оценивать вектор состояния $\chi(t)$, включающий, кроме значения процесса, его $(n-1)$ производную, что приводит к необходимости предварять экстраполятор фильтром Калмана. Вторая проблема – в практических задачах требуется спрогнозировать СП с определенными ограничениями на неточность прогноза процесса (и, если надо, его производных). При этом можно использовать две характеристики: доверительный интервал прогноза и максимальное время достоверного прогноза. Здесь подразумевается, что для прогнозируемого процесса $x(t)$ допустима максимальная ошибка прогноза $\Delta x_{\max}$ с некоторой высокой вероятностью "непревышения" этой ошибки $P=1-\varepsilon$. Тогда доверительный интервал прогноза $\hat{x}(t+\tau)$, т.е. тот интервал, в который (с доверительной вероятностью P) "попадет" значение процесса $x(t+\tau)$: $\left[\hat{x}(t+\tau)-\Delta\hat{x}(\tau,P);\hat{x}(t+\tau)+\Delta\hat{x}(\tau,P)\right]$. Условимся $\Delta\hat{x}(\tau,P)$ называть доверительной ошибкой прогноза. Её знание равносильно знанию доверительного интервала для любого времени прогноза τ. Вторая характеристика – $\tau_{\max}$ – максимальное время достоверного прогноза, т.е. то время прогноза, за которое $\Delta\hat{x}(\tau,P)$ не превысит $\Delta x_{\max}$: $\tau_{\max}=\max\limits_{\tau>0}\{\tau\,|\,\Delta\hat{x}(\tau,P)\le\Delta x_{\max}\}$. Зная $\tau_{\max}$, можно не оценивать доверительный интервал прогноза, а просто строить прогноз на время вплоть до $\tau_{\max}$, и на этом интервале времени ошибка прогноза с вероятностью P не превысит максимально допустимой $\Delta x_{\max}$. В предположении о нормальном законе распределения

процесса $x(t)$ с вероятностью $P=1-\varepsilon$ доверительная ошибка прогноза на время τ вперед $\Delta\hat{x}(\tau,P)=u_{\varepsilon/2}\sigma(\tau)$, где $u_{\varepsilon/2}$ - квантиль уровня $(1-\varepsilon/2)$ стандартного нормального распределения; $\sigma(\tau)$ 1 – с.к.о. ошибки прогноза. Доверительный интервал прогноза

$$\left[\Delta\hat{x}(t+\tau)-u_{\varepsilon/2}\sigma(\tau),\Delta\hat{x}(t+\tau)+u_{\varepsilon/2}\sigma(\tau)\right],$$

а максимальное время прогноза $\tau_{\max}=\max_{\tau>0}\{\tau|\ u_{\varepsilon/2}\sigma(\tau)<\Delta x_{\max}\}$. Для определения доверительного интервала и максимального времени прогноза требуется только знание дисперсии ошибки прогноза $\sigma^2(\tau)$ как функции времени прогноза, которая определяется сложными процедурами, связанными с перемножением матричных экспонент и матрицы ковариаций. Последняя находится интегрированием матричного уравнения Дункана.

Все эти проблемы решаются благодаря идентификации и использованию АРСС-модели СП, как будет описано ниже.

2. Построение оптимального дискретного прогноза с использованием модели авторегрессии–скользящего среднего, идентификация АРСС-модели случайного процесса. Выше использовалась наиболее общая модель стационарного случайного процесса в непрерывной области – в виде стохастического дифференциального уравнения, и для этой модели построен наилучший в среднеквадратическом оптимальный прогноз. В дискретной области аналогом этой модели является [5] наиболее общее представление дискретного стационарного случайного процесса в виде модели авторегрессии–скользящего среднего (АРСС(p,q)):

$$\Phi(B)x[n] = \theta(B)v[n]\ , \qquad (7)$$

где B – оператор сдвига назад (например, $B^m x[n]=x[n-m]$), $\Phi(B)=1-\sum_{j=1}^{p}\Phi_j B^j$ – оператор авторегрессии порядка p (он предполагается стационарным, т.е. его корни лежат вне единичного круга), $\theta(B)=1-\sum_{j=1}^{q}\theta_j B^j$ – оператор скользящего среднего порядка q (этот оператор предполагается обратимым, т.е. его корни – тоже вне единичного круга); $v[k]$ – входная последовательность – значения случайного процесса типа белого шума $v(t)$ в моменты времени $t=k\cdot\Delta t$; $x[k]$ – выходная последовательность (временной ряд) – значения исследуемого стационарного центрированного случайного процесса $x(t)$ в моменты времени $t=k\cdot\Delta t$. Представление (7) позволяет выразить значение процесса как конечную линейную совокупность предыдущих значений процесса, текущего и предыдущих значений случайного входа системы:

$$x[n]=\Phi_1 x[n-1]+...+\Phi_p x[n-p]+ \\ +v[n]-\theta_1 v[n-1]-...-\theta_q v[n-q]. \qquad (8)$$

Прогноз значения процесса $\hat{x}(\Delta t(n+k))=\hat{x}[n,k]$, вычисляемого в момент времени $t=n\cdot\Delta t$ на время $\tau=k\cdot\Delta t$ вперед,

$$\hat{x}[n,k]=\sum_{j=1}^{p}\Phi_j x[n+k-j]+\sum_{j=0}^{q}\theta_j v[n+k-j]\cdot$$

Согласно результатам теории прогнозирования, полученным Колмогоровым и Винером, прогноз с минимальной среднеквадратической ошибкой (т.е. наилучший в среднеквадратическом) для упреждения $\tau=k\cdot\Delta t$ есть условное математическое ожидание $E_n\{x[n+k]\}$. Тогда прогноз на один шаг вперед

$$\hat{x}[n,1]=\Phi_1 x[n]+...+\Phi_p x[n-p+1]- \\ -\theta_1 v[n]-...-\theta_q v[n+1-q]\ .$$

Простота этой схемы делает весьма удобной и простой общую методику прогноза на k шагов вперед как рекуррентное повторение одношаговых прогнозов, получаемых один из другого. Для изучения природы прогнозов АРСС-модели возможно записать их в других формах (неприемлемых в смысле практического применения): тогда видно, что в общем случае АРСС-прогноз включает полиномы, синусы, косинусы, экспоненты и произведения этих функций в различных сочетаниях.

Модель АРСС является дискретным аналогом общей модели процесса в виде стохастического дифференциального уравнения, а АРСС-прогноз – дискретный аналог наилучшего в среднеквадратическом прогноза (эта аналогия будет установлена ниже). При соответствующем выборе шага дискретизации по времени прогнозы этих двух моделей совпадают в моменты квантования. Вместе с тем АРСС-прогноз не требует оценки вектора состояния, содержащего произ-

водные процесса, и чрезвычайно прост в вычислительном отношении, что делает его особенно привлекательным для использования на практике.

Основная проблема, ограничивающая применение этого метода – необходимость идентификации модели АРСС, т.е. операторов АР и СС. При этом требуется определить, во-первых, порядки операторов, и, во-вторых, их коэффициенты. Методы, предлагаемые для идентификации порядков АРСС-модели, даже в наиболее глубоких работах, например [5], требуют участия человека и в общем случае не автоматизируются. Например, предлагается анализировать поведение автокорреляционной функции (АКФ) и частной АКФ процесса и их близость к сумме затухающих экспонент и синусоид, хотя признается неоднозначность такого анализа по выборочным автокорреляциям. Оценки АР-модели находятся решением уравнений Юла-Уолкера; оценки СС-модели – решением системы нелинейных уравнений, а оценки максимального правдоподобия для смешанной АРСС-модели – громоздкими итеративными операциями с ковариационными и информационными матрицами, причем рекомендуется идентифицировать, подвергать диагностической проверке и тестировать одновременно несколько пробных вариантов модели и выбирать из них наиболее подходящую. Байесовские оценки АРСС-модели также не позволяют однозначно идентифицировать ее. Один из наиболее серьезных подходов к идентификации порядков АРСС-модели основан на использовании информационного критерия Акаике (*ИКА*), согласно которому порядок модели определяется посредством минимизации теоретико-информационной функции

$ИКА(p,q) = N\ln(\hat{\rho}_{pq}) + 2(p+q)$, где $\hat{\rho}_{pq}$ – оценка дисперсии белого шума на входе принятой АРСС(p,q)-модели. Однако Кашьяп считает ИКА статистически несостоятельным. Что же касается соотношения порядков АРСС-модели, принято считать (например, [6]), что "чаще всего $p=q$, хотя какие-либо веские причины, обосновывающие такое допущение, отсутствуют". Ниже будет строго доказано, что для широкого класса случайных процессов $p=q+1$.

Рассмотрим проблему идентификации АРСС-модели с помощью спектра процесса. Предположим, что спектр аппроксимирован дробно-рациональной функцией вида (1) с порядками полинома числителя $2M$ и знаменателя $2N$. Например, эта аппроксимация может быть получена посредством декомпозиции (2) оценки спектра и использованием элементарных аппроксимирующих функций (3). Повторимся: тогда сам случайный процесс $x(t)$ можно рассматривать как результат прохождения белого шума $v(t)$ с единичной спектральной плотностью и интенсивностью 2π через систему (формирующий фильтр) с передаточной функцией $W(s) = H(s)/F(s) = \sum_{j=0}^{M} h_j s^j / \sum_{j=0}^{N} f_j s^j$, где полиномы числителя и знаменателя получаются факторизацией соответствующих полиномов спектра $S(\omega)=P(\omega)/Q(\omega)$. Уравнение системы в изображениях по Лапласу $x(s)=W(s)v(s)$.

Перейдем к эквивалентной дискретной модели. Такой переход обусловлен дискретностью обработки информации в ЭВМ: процессы измеряются с шагом дискретизации по времени Δt и все алгоритмы обработки и прогнозирования основаны на дискретных наборах измерений $x[k]=x(k\Delta t)$, k – целое. Воспользуемся результатами теории дискретных (импульсных и цифровых) систем. Представим исходный непрерывный фильтр, описываемый в изображениях по Лапласу передаточной функцией $W(s)$, в виде эквивалентного дискретного фильтра. Идеальные ключи (квантователи) на входе и выходе фильтра К1 и К2, синхронно замыкающиеся с постоянным периодом Δt (будем далее обозначать его $T=\Delta t$), "вырезают" из соответствующего процесса его значения в моменты $t=nT$. Для этой схемы вход и выход в изображениях по Лапласу связаны уравнением $x^*(s)=W^*(s)v^*(s)$, или, переходя к переменной $z=e^{sT}$, $x^*(z)=W^*(z)v^*(z)$, где используется Z-преобразование как формальное преобразование Лапласа L с последующей заменой $e^{sT}=z$. Импульсная передаточная функция (ИПФ) формаль-

но определяется через непрерывную передаточную функцию (НПФ) исходной системы выражением $W^*(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{W(r)}{1-e^{-T(s-r)}}dr$. Контур интегрирования Γ представляет собой линию от $c-i\infty$ до $c+i\infty$ (где c – абсцисса абсолютной сходимости) и полуокружность бесконечно большого радиуса, охватывающую левую или правую полуплоскости. Из двух групп полюсов подынтегрального выражения при вычислении контурного интеграла охватим полюсы $W(s)$, т.е. корни полинома знаменателя: $\{s_j\}:F(s)\big|_{s=s_j}=0,\ j=\overline{1,N}$. Это возможно, т.к. степень знаменателя $W(s)$ выше степени числителя и, следовательно, интеграл вдоль бесконечной полуокружности равен нулю. Пользуясь теоремой о вычетах, имеем

$$W^*(e^{sT})=W^*(z)=\sum_{j=1}^{N}\operatorname{Res}_{s_j}\frac{H(s)}{F(s)}\frac{1}{1-e^{T(r-s)}}.$$

С учетом свойств спектра $S(\omega)$ корни $\{s_j\}$ простые, тогда, опуская промежуточные выкладки, $W^*(z)$ можно представить

$$W^*(z)=\sum_{j=1}^{N}\frac{H(s_j)}{F'(s_j)}\frac{1}{1-e^{Ts_j}/z}=$$
$$=\frac{\sum_{j=0}^{N-1}e_j\left(z^{-1}\right)^j}{\sum_{j=0}^{N}d_j\left(z^{-1}\right)^j}=\frac{E\left(z^{-1}\right)}{D\left(z^{-1}\right)} \qquad (9)$$

(условимся, что полученная функция поделена на коэффициент при младшей степени знаменателя, т.е. $d_0=1$). Показано [4], что в любом случае, и если полюса простые, и если среди них есть кратные, ИПФ представляется отношением двух полиномов по z^{-1}, как в (9), причем коэффициенты этих полиномов однозначно определяются конечным числом операций над коэффициентами исходной НПФ $W(s)$, порядок полинома знаменателя ИПФ (9) равен порядку знаменателя НПФ $W(s)$, а порядок числителя на 1 меньше.

Подставив (9) в уравнение, связывающее вход и выход эквивалентной импульсной (дискретной) системы, получаем $x^*(z)D(z^{-1})=v^*(z)E(z^{-1})$, или $d_0x^*(z)+d_1x^*(z)/z+\ldots+d_Nx^*(z)/z^N=e_0v^*(z)+$ $+e_1v^*(z)/z+\ldots+e_{N-1}v^*(z)/z^{N-1}$. Применяя к этой формуле обратное Z-преобразование, учитывая условие $d_0=1$ и воспользовавшись теоремой сдвига (гласящей, в частности, что если $Z\{x^*[n]\}=x^*(z)$, то $Z\{x^*[n-k]\}=x^*(z)/z^k$), получаем с точностью до начальных условий

$$x[n]=-d_1x[n-1]-\ldots-d_Nx[n-N]+e_0v[n]+$$
$$+e_1v[n-1]+\ldots+e_{N-1}v[n-N+1]. \qquad (10)$$

Требование нулевых начальных условий несущественно, т.к. можно считать, что начальный момент выбран достаточно далеко и реакция (устойчивой) системы на ненулевые начальные условия в текущий момент времени равна нулю. Теперь видно, что конечно-разностное уравнение (10), описывающее поведение системы с ИПФ (9), с точностью до обозначений совпадает с уравнением АРСС(p,q)-модели (8). Повторим его, для общности введя неединичный коэффициент при $v[n]$:

$$x[n]=\Phi_1x[n-1]+\ldots+\Phi_px[n-p]+$$
$$+\theta_0v[n]-\theta_1v[n-1]-\ldots-\theta_qv[n-q].$$

Тогда порядок p оператора АР общей модели АРСС равен порядку полинома знаменателя ИПФ $W^*(z)$, т.е. порядку знаменателя НПФ $W(s)$, т.е. половине порядка знаменателя спектра $S(\omega)$, а порядок q оператора СС на единицу меньше: $p=N;\ q=N-1$. Коэффициенты оператора АР $\Phi(B)$ с точностью до знака равны коэффициентам полинома знаменателя $D(z^{-1})$ ИПФ $W^*(z)$: $\Phi_j=-d_j;\ j=\overline{1,N}$, а коэффициенты оператора СС $\theta(B)$ с точностью до знака равны коэффициентам полинома числителя $E(z^{-1})$ ИПФ $W^*(z)$: $\theta_0=e_0,\ \theta_j=-e_j;\ j=\overline{1,N-1}$. Коэффициенты же полиномов ИПФ $W^*(z)$ однозначно (9) определяются коэффициентами полиномов НПФ $W(s)$, а, следовательно, коэффициентами полиномов спектральной плотности $S(\omega)$.

Вообще, оказывается, что вся теория АРСС-процессов с точностью до обозначения оператора сдвига назад ($z^{-1}=e^{-sT}$ или B) может быть описана с помощью классической теории дискретных систем, и методы последней применимы к исследованиям АРСС-моделей.

Установление этой общности позволяет сформулировать два полезных утверждения, доказанных вышеприведенными выкладками:

во-первых, если спектр некоторого

стационарного случайного процесса аппроксимирован дробно-рациональной функцией с порядком полинома знаменателя $2N$, то этому процессу соответствует единственная АРСС-модель с оператором АР порядка $p=N$ и оператором СС порядка $q=N-1$;

во-вторых, коэффициенты АРСС-модели однозначно и просто определяются [4] полиномами числителя и знаменателя формирующего фильтра $W(s)$, которые, в свою очередь, определяются факторизацией полиномов спектра процесса $S(\omega)$.

Приведенные выше рассуждения позволяют сделать и еще более общий вывод: даже если спектр процесса неизвестен, но можно предположить, что он гладкий (и, следовательно, его можно аппроксимировать дробно-рациональной функцией), то в описывающей этот процесс АРСС-модели порядок оператора АР на 1 больше порядка оператора СС. Отметим, что класс процессов, для которого справедливо последнее утверждение, весьма широк, т.к. любую гладкую ограниченную функцию (спектральной плотности) можно сколь угодно точно аппроксимировать отношением двух полиномов конечных порядков.

Таким образом, знание спектра процесса в виде дробно-рациональной функции позволяет однозначно идентифицировать АРСС-модель, и именно её целесообразно использовать для решения практических задач оптимального прогнозирования стационарных СП.

Замечание 1. АРСС-модель определена из уравнения дискретной системы $x^*(s)=W^*(s)v^*(s)$, а последнее получено Z-преобразованием уравнения непрерывной системы $x(s)=W(s)v(s)$. На входе НПФ $W(s)$ по определению белый шум с единичной спектральной плотностью и интенсивностью 2π; значит, на входе ИПФ – тот же белый шум, но квантованный с шагом T. Отсюда следует, что дисперсия случайной последовательности на входе ИПФ $\sigma_v^2=2\pi/T$ и для построения дисперсии ошибки прогноза на k шагов вперёд $\sigma^2[k]$ как функции времени не требуется оценивать σ_v^2 из наблюденных временных рядов. Это существенно упрощает определение доверительного интервала $\left[\hat{x}[n,k]-u_{\varepsilon/2}\sigma[k];\hat{x}[n,k]+u_{\varepsilon/2}\sigma[k]\right]$ и максимального времени достоверного прогноза

$$\tau_{\max}=k_{\max}\Delta t;\ k_{\max}=\max_{k>0}\left\{k\middle|u_{\varepsilon/2}\sigma[k]<\Delta x_{\max}\right\},$$

где $k_{\max}$ – максимальное число шагов достоверного прогноза – дискретный аналог $\tau_{\max}$, а $u_{\varepsilon/2}$ и $\Delta x_{\max}$ – те же, что и в предыдущем пункте.

Замечание 2. Отметим, что и для этого метода построения прогноза в очередной раз может оказаться весьма удобным метод элементарных спектров. Предположим, что спектр прогнозируемого процесса подвергнут декомпозиции (1) и затем аппроксимирован суммой N_s функций вида (3) с параметрами (a_j,b_j,c_j), $j=\overline{1,N_s}$. Кроме того, что эти функции сами по себе удобны при аппроксимации, они существенно упрощают расчетную часть прогноза. В сделанных предположениях полином знаменателя $F(s)$ непрерывного фильтра $W(s)$ имеет порядок $N=2N_s$ и имеет вид

$$F(s)=\prod_{j=1}^{N_s}\sqrt{b_j}\prod_{j=1}^{N_s}(s-(-\frac{a_j}{b_j}-ic_j))(s-(-\frac{a_j}{b_j}+ic_j))$$

, и тогда сразу известны нули этого полинома, т.е. полюсы НПФ $W(s)$: $s_{2j-1,\,2j}=-\sqrt{a_j/b_j}\pm ic_j$, $j=\overline{1,N_s}$, в которых вычисляются вычеты, образующие ИПФ $W^*(e^{sT})$). Очевидно, что если спектр процесса аппроксимирован суммой N_s функций вида (3), то АРСС-модель этого процесса имеет порядки ($2N_s$, $2N_s$–1).

Теперь, когда проблема идентификации АРСС-модели решена, можно предложить использовать в качестве основного метода экстраполяции не классический (наилучший в среднеквадратическом) прогноз, а его дискретный аналог – АРСС-прогноз, отличающийся простотой, удобством реализации и не требующий оценки производных процесса.

3. Альтернативная математическая модель СП в виде множества взвешенных комплексно-сопряжённых полюсов формирующего фильтра. С учётом декомпозиции спектра (2) и его аппроксимации суммой элементарных спектров (6) построены [4] две альтернативные математические модели СП. Первая представлена в виде множества $G=\{\{\Omega_k,D_k\},\ k=\overline{1,n}\}$, где

$\Omega_k=\{\omega_{k1},\omega_{k2},\omega_{k3},\omega_{k4}\}$ – четверка полюсов k-го элементарного спектра ($\omega_{k1}=-\omega_{k3}=c_k+i\sqrt{a_k/b_k}$; $\omega_{k2}=-\omega_{k4}=c_k-i\sqrt{a_k/b_k}$), D_k – дисперсия соответствующего элементарного процесса $x_k(t)$, a_k, b_k, c_k – параметры элементарного спектра. Пара $G_k=\{\Omega_k,D_k\}$ однозначно определяет спектр $S_k(\omega)$ процесса $x_k(t)$, т.е. его математическую модель, а совокупность таких пар $G=\{\{\Omega_k,D_k\},\ k=\overline{1,n}\}$ однозначно определяет исходный спектр (1), (6), т.е. математическую модель случайного процесса $x(t)$. В зависимости от величины дисперсии D_k из всех полюсов спектра Ω можно выделить существенные четверки полюсов Ω_c (с большими D_k), а из множества G – подмножество существенных пар $G_c=\{\{\Omega_j,D_j\},\ j=\overline{1,N}\}$, таких, что $D_j>>D_k,\ D_j\in G_j\in G_c,\ D_k\in G_k\in\{G\setminus G_c\}$. Условимся называть эти четверки полюсов существенными полюсами спектра. Они существенны в том смысле, что, во-первых, дисперсия (энергия) соответствующих этим полюсам элементарных процессов велика по сравнению с остальными, и, во-вторых, соответствующие им элементарные спектры являются доминирующими (иначе можно представить, что при изображении полюсов на комплексной плоскости каждая четверка полюсов Ω_k имеет "вес" D_k и существенные полюса – наиболее "весомые").

Перейдем ко второй – основной альтернативной математической модели. Случайный процесс $x(t)$ с дробно-рациональным спектром (1), (6) можно рассматривать как результат прохождения белого шума $v(t)$ через систему (формирующий фильтр) с передаточной функцией $W(s)=H(s)/F(s)$. Полиномы $W(s)$ получаются факторизацией полиномов $S(\omega)$. С учетом разложения (6) и вида полюсов спектра $S(\omega)$ полюса $W(s)$ есть совокупность выделенных из четверок полюсов Ω_k спектра пар полюсов, лежащих в верхней полуплоскости, и повернутых относительно начала координат на 90° против часовой стрелки. Обозначим все полюса $W(s)$ через Λ: тогда $\Lambda=\{\Lambda_k,\ k=\overline{1,n}\}$ состоит из комплексно-сопряженных пар полюсов $\Lambda_k=\{\lambda_{k1},\lambda_{k2}\}=\left\{-\sqrt{a_k/b_k}+ic_k;-\sqrt{a_k/b_k}-ic_k\right\}$, лежащих в левой полуплоскости (каждая такая пара Λ_k соответствует своему элементарному спектру $S_k(\omega)$ и процессу $x_k(t)$ с дисперсией D_k). Если образовать пары $E_k=\{\Lambda_k,\ D_k\}$, то каждая такая пара E_k определяет модель элементарного процесса $x_k(t)$, а все множество таких пар $E=\{E_k,\ k=\overline{1,n}\}$ однозначно определяет модель исходного процесса $x(t)$ и его спектр.

Из всего множества Λ выделим множество существенных пар полюсов Λ_c, каждый элемент которого Λ_j соответствует своей существенной четверке полюсов $\Omega_j\in\Omega_c$ спектра $S(\omega)$ и каждому $\Lambda_j\in\Lambda_c$ соответствует своя дисперсия D_j. Тогда пары $E_j=\{\Lambda_j,\ D_j\}$, образуют множество существенных пар $E_c=\{\{\Lambda_j,D_j\},\ j=\overline{1,N}\}$, $\Lambda_j\in\Lambda_c$, такое, что $D_j>>D_k$, $D_j\in E_j\in E_c$, $D_k\in E_k\in\{E\setminus E_c\}$. Именно расположение существенных пар полюсов определяет структурные особенности случайного процесса и его спектра, влияющие на эффективность прогнозирования.

Такая альтернативная математическая модель СП в совокупности с выделением существенных полюсов спектра и формирующего фильтра оказались полезны для анализа и классификации СП.

4. Классификация случайных процессов. Проведена [4] классификация СП, основанная на взаимосвязи особенностей в структурах процессов и их спектров, их составляющих, с расположением полюсов формирующего фильтра. Уточним характер этой взаимосвязи. Пусть процесс $x(t)$ требуется спрогнозировать так, чтобы ошибка прогноза с вероятностью $P=1-\varepsilon$ не превышала $\Delta x_{\max}$. Но процесс $x(t)$ есть сумма элементарных процессов: $x(t)=\sum_{k=1}^{n}x_k(t)$, тогда и прогноз $\hat{x}(t+\tau)=\sum_{k=1}^{n}\hat{x}_k(t+\tau)$. С вероятностью P ошибка прогноза k-го элементарного процесса на время τ вперед $\Delta x_k\le u_{\varepsilon/2}\sigma_k(\tau)$ (где $u_{\varepsilon/2}$ – квантиль уров-

ня *(1-ε/2)* стандартного нормального распределения, а $\sigma_k(\tau)$ – с.к.о. ошибки прогноза *k*-го процесса). Тогда (с вероятностью *P*) ошибка прогноза процесса *x(t)* на время τ вперед

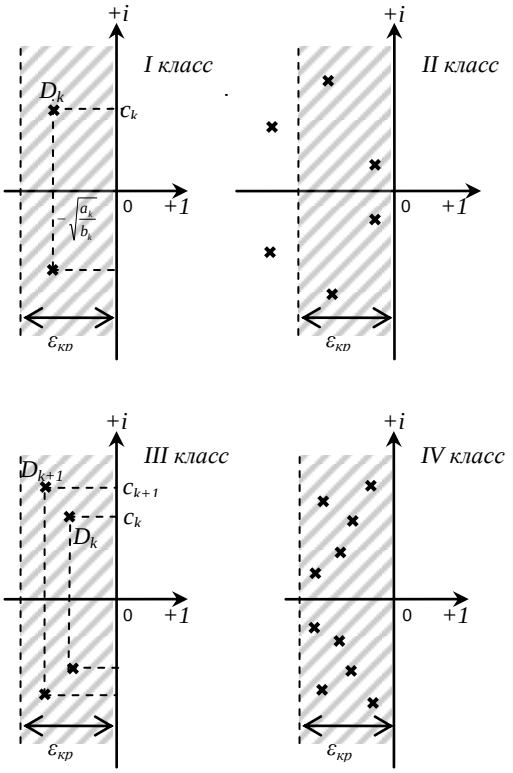
$\Delta x(\tau) \le u_{\varepsilon/2} \sum_{k=1}^{n} \sigma_k(\tau)$, а максимальное время достоверного прогноза процесса *x(t),* т.е. то время, за которое с вероятностью $P=1-\varepsilon$ ошибка прогноза не превысит максимально допустимую $\Delta x_{\max}$, равно

$\tau_{\max} = \max_{\tau>0}\{\tau \left| u_{\varepsilon/2} \sum_{k=1}^{n} \sigma_k(\tau) \le \Delta x_{\max} \right.\}$. Каждая $\sigma_k(\tau)$ есть монотонно возрастающая функция с пределом (при $\tau \to \infty$), равным с.к.о. процесса. Тогда $\tau_{\max}$ зависит от того, насколько быстро $u_{\varepsilon/2} \sum_{k=1}^{n} \sigma_k(\tau)$ достигнет уровня $\Delta x_{\max}$, т.е. от скорости возрастания суммы с.к.о. ошибок прогноза элементарных процессов. Понятно, что чем больше ширина ε_k элементарного спектра $S_k(\omega)$, тем менее регулярен (в стохастическом смысле) элементарный случайный процесс $x_k(t)$, тем больше $\sigma_k(\tau)$ (при фиксированном τ). Напомним: ε_k – мера и ширины спектра $S_k(\omega)$, и регулярности СП $x_k(t)$, и эффективности оптимального прогноза. Учитывая вклад меры ε_k каждого элементарного процесса, можно записать, что максимальное время достоверного прогноза $\tau_{\max}$ (при фиксированных *P* и $\Delta x_{\max}$) есть функция от набора мер $\{\varepsilon_k, k=\overline{1,n}\}$. Но мера ε_k элементарного *k*-го процесса $x_k(t)$ в точности равна расстоянию между соответствующей парой полюсов Λ_k и мнимой осью. Тогда $\tau_{\max}$ искомого процесса *x(t)* определяется удаленностью его полюсов Λ от мнимой оси, а с учетом существенности полюсов (отражающей энергетический вклад каждого элементарного процесса) время $\tau_{\max}$ определяется удаленностью существенных полюсов Λ_c от мнимой оси. Можно было бы вывести аналитическую функцию зависимости $\sigma_k(\tau)$ от меры ε_k для *k*-го элементарного процесса и с её помощью получить в общем виде выражение для $\tau_{\max}$ как функции мер $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n$, но это потребовало бы громоздких выкладок и не имело бы практической ценности, поскольку в вышеприведённом методе идентификации АРСС-модели проблема определения $\tau_{\max}$ решена. Здесь же достаточно установления характера связи $\tau_{\max}$ и Λ_c.

Кроме ограничений, накладываемых на ошибку прогноза, в практических задачах экстраполяции требуется, чтобы $\tau_{\max}$ не было меньше некоторого $\tau_{\min}$ (минимально необходимого времени прогноза). Пусть для некоторого конкретного случайного процесса с математической моделью $\{\{\Lambda_k, D_k\}, k=\overline{1,n}\}$ мы вольны удалять существенные полюса $\Lambda_j \in \Lambda_c$ от мнимой оси или приближать к ней. На комплексной плоскости *S* можно выбрать такую полосу $\varepsilon_{кр}<S<0$, что $\tau_{\max} \ge \tau_{\min}$, если все существенные полюса Λ_c модели процесса находятся в этой полосе, т.е. удалены от мнимой оси не больше, чем на $\varepsilon_{кр}$. Тогда соответствующие им доминирующие случайные процессы будут в достаточной мере сингулярны, доминирующие пики спектра достаточно узки (ширина $\varepsilon_к$ каждого такого пика не больше $\varepsilon_{кр}$), а максимальное время достоверного прогноза достаточно велико – больше $\tau_{\min}$.

Характерные особенности в структурах спектров и СП с точки зрения их прогнозирования позволили выделить в СП четыре класса, отличающиеся взаимным расположением экстремумов и ширины элементарных спектров, получающихся в результате декомпозиции (6), или, иначе, расположением существенных полюсов формирующего фильтра. Особенности расположения существенных полюсов Λ_c на комплексной плоскости для разных классов процессов наглядно представлены на рис. 3.

Если соответствующая процессу *x(t)* передаточная функция формирующего фильтра *W(s)* имеет одну существенную пару полюсов $\Lambda_k = \left\{-\sqrt{a_k/b_k} \pm ic_k\right\}$, находящуюся в полосе $\varepsilon_{кр}<S<0$, то процесс *x(t)* – I класса, близкий к гармонике с частотой c_k, а спектр процесса имеет один доминирующий пик, достаточно узкий (в том смысле, что $\tau_{\max}>\tau_{\min}$). Этот класс имеет узкие унимодальные спектры, а СП характеризуются постоянством периода колебаний, медленно меняющимися амплитудами и отсутствием вторичных экстремумов. Прогнозирование на время $\tau_{\max}>\tau_{\min}$ возможно.



Р и с. 3. Расположение существенных полюсов передаточной функции формирующего фильтра для процессов разных классов

Если за пределами полосы $\varepsilon_{кр}<S<0$ есть хотя бы одна существенная пара полюсов, то процесс $x(t)$ – II класса, с ярко выраженными случайными свойствами (в смысле $\tau_{\max}<\tau_{\min}$). У этого класса число максимумов спектра произвольно, по крайней мере один пик спектра широкий, а СП носят ярко выраженный случайный характер: они имеют непостоянный период колебаний, вторичные экстремумы и скачки изменений амплитуды. Прогнозирование на время $\tau_{\max}>\tau_{\min}$ невозможно.

Моделированием СП первых двух классов выявлены спонтанно появляющиеся пакеты (или группы пакетов) колебаний, когда амплитуда колебаний плавно нарастает и убывает. Эти два класса названы процессами с несистематической пакетной структурой.

Если $W(s)$ имеет две существенные пары полюсов $\Lambda_k=\left\{-\sqrt{a_k/b_k}\pm ic_k\right\}$, $\Lambda_{k+1}=\left\{-\sqrt{a_{k+1}/b_{k+1}}\pm ic_{k+1}\right\}$, лежащих в полосе $\varepsilon_{кр}<S<0$, и мнимые части этих пар близки друг к другу, то процесс $x(t)$ - III класса, с систематической пакетной структурой; он близок к процессу биений с частотой несущей $(c_k+c_{k+1})/2$ и частотой огибающей $(c_{k+1}-c_k)/2$. Спектры таких процессов имеют два доминирующих пика ("сгустка энергии"), хорошо разнесенных между собой, но на близких частотах. Этот класс СП объединяет процессы с систематической пакетной структурой, в них группы (пакеты) колебаний повторяются со вполне определенной периодичностью (имеется в виду периодическая нестационарность СП, типичный пример которой – групповое волнение и пакетная качка судна, когда амплитуды колебаний плавно нарастают до максимального значения и затем убывают с некоторой периодичностью). Сформулированы [4] условия относительно расположения существенных полюсов формирующего фильтра на комплексной плоскости, при которых СП относится к 3 классу (они приведены в 6 пункте). Прогнозирование на время $\tau_{\max}>\tau_{\min}$ возможно. Для таких процессов в дополнение к классическому оптимальному прогнозу возможно строить долгосрочный прогноз огибающей пакетов колебаний.

И, наконец, если $W(s)$ имеет две или более пары существенных полюсов $\Lambda_c=\left\{\left\{-\sqrt{a_k/b_k}\pm ic_k\right\},\ k=\overline{1,N}\right\}$, лежащие в полосе $\varepsilon_{кр}<S<0$, то процесс – IV класса, близкий к сумме гармоник с частотами $\{c_k,\ k=\overline{1,N}\}$, а спектр на этих частотах имеет узкие доминирующие пики. Этот класс включает в себя процессы, являющиеся результатом наложения конечного числа сингулярных – почти гармонических – процессов, таких, как процессы 1 класса, но, в отличие от III класса, доминирующих гармоник не обязательно две и они не близки по частотам, т.е. в процессе невозможно выделить периодически повторяющиеся структуры, напоминающие пакеты. Процессы этого класса не напоминают гармонические колебания, не имеют пакетную структуру и, вместе с тем, не являются процессами с ярко выраженными случайными свойствами, хотя внешне напоминают их, т.к. могут иметь вторичные экстремумы, скачки амплитуды и непостоянные интервалы времени между пересечениями уровня нуля. Прогнозирование на время $\tau_{\max}>\tau_{\min}$ возможно.

С учетом полученных результатов разработана [4] идеология системы прогноза, адаптивной к классу (т.е. к структурным особенностям) процесса, к скачкообразным изменениям характеристик процесса, вызванным внешними воздействиями или изменениями в режиме функционирования системы, и к плавным изменениям характеристик, обусловленным "слабой" стационарностью СП. Система основана на АРСС-прогнозе.

Такой подход использован, в частности, для анализа процессов простого и смешанного волнения и вызванной им качки корабля. Выявлены закономерности в формировании структуры спектров и процессов качки в зависимости от структур спектра волнения и квадрата АЧХ корабля. Подтверждена достоверность классификации СП с помощью математического моделирования на ЭВМ.

5. Моделирование СП. Аппроксимация спектра случайного процесса суммой элементарных спектров весьма удобна для моделирования этих процессов на ЭВМ. Повторимся ещё раз: стационарный случайный процесс $\psi(t)$ с рациональной спектральной плотностью $S(\omega)$ можно рассматривать как результат прохождения белого шума с единичной спектральной плотностью через устойчивую стационарную линейную систему с передаточной функцией $W(s)=H(s)/F(s)$. Полиномы формирующего фильтра $W(s)$ получаются факторизацией полиномов $S(\omega)$. Такая система описывается линейным стохастическим дифференциальным уравнением $\sum_{k=0}^{n} f_k \psi^{(k)} = \sum_{k=0}^{m} h_k V^{(k)}$, где $V(t)$ – входной сигнал формирующего фильтра – белый шум с единичной спектральной плотностью и интенсивностью 2π. Параметры формирующего фильтра выражаются через параметры аппроксимирующих элементарных спектров a_i, b_i, c_i. Подавая на вход формирующего фильтра белый шум, получаем реализации интересующего нас случайного процесса.

На практике такой подход, например, использовался для исследования качки корабля при различных параметрах движения и условиях волнения, (ветрового зыби, смешанного). С использованием теоремы А.Я. Хинчина спектральная плотность качки определялась произведением квадрата модуля АЧХ корабля на спектральную плотность волнения. С учетом скорости движения корабля и курсового угла анализ осуществлен в области кажущихся частот для сохранения реальных частотно-временных соотношений процессов качки. Аппроксимировав с помощью элементарных спектров квадрат АЧХ корабля, спектр волнения, и, окончательно, спектр качки корабля, можно, во-первых, задаваясь различными условиями простого и смешанного волнения и параметрами движения корабля, строить и анализировать спектры качки корабля на выбранном волнении, и, во-вторых, для каждого полученного спектра качки строить формирующий фильтр и моделировать на ЭВМ динамику корабля.

6. Анализ периодически нестационарных СП. На основании проведенной классификации и анализа результатов моделирования СП выделен подкласс и проведен анализ периодически нестационарных СП, в т.ч. СП с пакетной структурой. В рамках разбиения случайных процессов на 4 класса можно охарактеризовать первые два класса как процессы с несистематическими пакетными свойствами, а третий класс – как процессы с систематическими пакетными свойствами, или с систематической пакетной структурой. Сформулированы условия, основанные на расположении существенных полюсов формирующего фильтра, при выполнении которых процесс обладает периодической нестационарностью. Случайный процесс $x(t) = \sum_{i=1}^{N} x_i(t)$ будет иметь групповой характер, если из всех $S_i(\omega), i = \overline{1, N}$, можно выделить два таких $S_k(\omega)$, $S_{k+1}(\omega)$, что выполняется:

а) эти элементарные спектры и соответствующие им элементарные случайные процессы обладают энергией одного порядка: $D_k \sim D_{k+1}$;

б) их "энергонасыщенность" больше, чем у остальных элементарных случайных процессов: D_k, $D_{k+1} \gg D_i$, $i=1,\ldots, k-1, k+2,\ldots, N$;

в) эти два спектра достаточно узки (т.е. соответствующие им элементарные случайные процессы $x_k(t)$, $x_{k+1}(t)$ в некоторой степени сингулярны): ε_k , $\varepsilon_{k+1} < \varepsilon_0$, где ε_0 – некоторая условная критическая степень регулярности случайного процесса;

г) частоты, соответствующие максимумам этих спектров, ω_k и ω_{k+1} удовлетворяют условию $\omega_k+\omega_{k+1}=2m(\omega_{k+1} - \omega_k)$, где $m>3$ – некоторое (не обязательно целое) число, характеризующее количество колебаний в пакете (группе);

д) в интервале между частотами максимумов $\omega_к$, $\omega_{к+1}$ доминирующих пиков спектра $S(\omega)$ должна быть некоторая область частот $[\omega_1, \omega_2]$, где спектр весьма мал по сравнению с пиками, т.е. $S(\omega) << S(\omega_k), S(\omega) << S(\omega_{k+1}), \forall \omega \in [\omega_1, \omega_2]$, $\omega_k<\omega_1<\omega_2<\omega_{k+1}$. Иначе говоря, доминирующие пики спектра, кроме близости по частотам, должны быть хорошо разделены, так, чтобы между ними спектр был близок к нулю. Если они разделены "плохо", то минимальное значение амплитуды в пакетах не очень сильно отличается от максимального, и пакетная структура менее ярко выражена. Если же они хорошо разделены, структура процесса становится строго пакетной.

Проведен [4] асимптотический анализ бимодальных спектров и установлена общность случайных процессов с пакетными свойствами и детерминированных процессов биений, получены оценки средних частотно-временных характеристик таких СП.

На практике разработанные методы оказались полезны [7, 8] для построения систем безопасности плавания морских судов, разработки экспертных систем анализа процессов взаимодействия ветра и волнения, контроля и прогноза параметров морского волнения и вызванной им качки судна, оценки параметров морского волнения по измерениям качки судна, выбора оптимального курса и скорости судна для исключения его опрокидывания или слеминга.

В целом разработанные методы применимы для анализа и прогнозирования случайных процессов в природе, технике и социуме. Использование этих методов при исследовании случайных процессов на выходе сложных систем с варьируемыми параметрами позволяет добиваться требуемых характеристик процессов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Пугачев В.С., Синицын И.Н.* Стохастические дифференциальные системы. – М: Наука, 1985. – 560 с.
2. *Согомонян С.В.* Об одном методе спектрального анализа случайных процессов и его применении к исследованию динамики сложных систем // Системы контроля окружающей среды: Сб. науч. тр. – Севастополь, МГИ НАН Украины, 2012. Вып. 17. – С. 61 – 67.
3. *Согомонян С.В.* Об одном спектральном методе анализа качки корабля // Сб. тез. докл. 19 всесоюз. конф. Совета по управлению движением судов и кораблей. – М.: ИПУ, 1992. – С. 57 – 59.
4. *Согомонян С.В.* Разработка методов экстраполяции качки и управления корабельными летательными аппаратами: дис. ... канд. техн. наук: 20.02.14: защищена 06.05.93 : утв. 12.08.93 / Согомонян Сергей Вартанович. – Севастополь, 1993. – 245 с.
5. *Бокс Дж., Дженкинс Г.* Анализ временных рядов: Прогноз и управление. В 2 кн. – М.: Мир, 1974. Кн.1. – 406 с.
6. *Марпл-мл.С.Л.* Цифровой спектральный анализ и его приложения. – М.: Мир, 1990. – 584 с.
7. *Нечаев Ю.И., Согомонян С.В.* Экспертная система контроля и прогноза параметров морского волнения // Океанологические информационные системы, базы и банки данных и знаний: Сб. науч. тр. – Севастополь, МГИ АН Украины, 1993. – С. 93 – 95.
8. *Нечаев Ю.И., Согомонян С.В.* Анализ измерительной информации при контроле и прогнозировании динамики аварийного судна в штормовых условиях // Сб. тр. междунар. науч.-техн. семинара "Морское и экологическое приборостроение". – Севастополь, МГИ АН Украины, 1994. – С. 71.