АНАЛИЗ ИЗМЕРИТЕЛЕЙ ТЕМПЕРАТУРЫ С ТРЕМЯ ПАССИВНЫМИ ИНЕРЦИОННЫМИ ДАТЧИКАМИ

В.А. Гайский, П.В. Гайский

Морской гидрофизический институт
г. Севастополь, ул. Капитанская, 2
E-mail: oaoimhi@inbox.ru

Приводятся алгоритмы определения текущей температуры среды и показателей термической инерции оболочек многослойных датчиков в измерителе с тремя пассивными датчиками.

Постановка задачи. Известны методы измерения нестационарной температуры и потока теплообмена датчиков со средой в рабочем режиме с использованием нескольких датчиков [1 – 3] и определения их динамических характеристик с использованием подогреваемых датчиков [4]. Ставится задача определения динамических характеристик пассивных датчиков в рабочем режиме с использованием трех датчиков.

Модели инерционных датчиков температуры. Известны различные модели датчиков температуры [1]. Мы используем модели сосредоточенных датчиков из последовательного включения инерционных звеньев.

Так для датчика из чувствительного элемента (ЧЭ) без существенной оболочки обычно используют уравнение инерционного звена первого порядка [1, 2] вида

$$\theta_{t2} = \theta_{tc} = \theta_{t1} + \varepsilon_{t1}\theta_{t1}^{(1)}, \qquad (1)$$

где θ_{tc} – текущая температура внешней среды, которая является первой оболочкой ЧЭ; θ_{t1} – наблюдаемая текущая среднеобъемная температура ЧЭ и $\theta_{t1}^{(1)}$ – её первая производная; ε_{t1} – показатель термической инерции ЧЭ, причем

$$\varepsilon_{t1} = \left(\frac{\delta_1}{\lambda_1 S_c} + \frac{1}{\alpha_1 S_1}\right) m_1 c_1, \qquad (2)$$

где m_1 – масса ЧЭ; c_1 – удельная теплоемкость материала ЧЭ; δ_1 – эквивалентная толщина тела ЧЭ; λ_1 – теплопроводность материала ЧЭ; S_c – средняя площадь поверхности сечения; S_1 – площадь внешней поверхности теплообмена ЧЭ со средой; α_1 – коэффициент теплообмена ЧЭ с внешней средой или оболочкой. Для жидкой, газообразной или сыпучей внешних сред α_1 зависит от физических параметров среды, положения относительно потока обтекания и его скорости. В этом случае α_1 является неизвестной величиной, зависящей от времени как α_{t1} и подлежащей измерению.

При помещении ЧЭ в первую оболочку с показателем термической инерции ε_{t2}, которая занимает место внешней среды по температуре θ_{t2} вместо θ_{tc} в выражении (1), а температура внешней среды θ_{t3} отсчитывается от температуры θ_{t2} и вместо формулы (1) можем записать

$$\theta_{t3} = \theta_{tc} = \theta_{t2} + \varepsilon_{t2}\theta_{t2}^{(1)}, \qquad (3)$$

из формулы для θ_{t2} и $\theta_{t1}^{(1)}$ запишем

$$\theta_{t2} = \theta_{t1} + \varepsilon_{t1}\theta_{t1}^{(1)}, \; \theta_{t2}^{(1)} = \theta_{t1}^{(1)} + \varepsilon_{t1}\theta_{t1}^{(2)}. \qquad (4)$$

Поскольку теплообмен между ЧЭ и первой оболочкой стал консервативным, то вместо ε_{t1} можно записать не зависящий от времени показатель термической инерции ε_1.

Подставляем выражение для θ_{t2} и $\theta_{t2}^{(1)}$ в выражение (3) и получим выражение для инерционного звена второго порядка

$$\theta_{t3} = \theta_{tc} = \theta_{t1} + \varepsilon_1\theta_{t1}^{(1)} + \varepsilon_{t2}\left(\theta_{t1}^{(1)} + \varepsilon_1\theta_{t1}^{(2)}\right) =$$

$$= \theta_{t1} + \left(\varepsilon_1 + \varepsilon_{t2}\right)\theta_{t1}^{(1)} + \varepsilon_t\varepsilon_{t2}\theta_{t1}^{(2)} = \qquad (5)$$

$$= \theta_{t1} + \varepsilon_1\theta_{t1}^{(1)} + \varepsilon_{t2}\left(\theta_{t1}^{(1)} + \varepsilon_1\theta_{t1}^{(2)}\right). \qquad (6)$$

Обычно роль первой оболочки датчика играет наполнитель, который занимает пространство между ЧЭ и второй защитной оболочкой, например, в виде трубки с показателем ε_{t3}, от температуры которой отсчитывается температура внешней среды

$$\varepsilon_{t4}\ \theta_{t4} = \theta_{tc} = \theta_{t3} + \varepsilon_{t3}\theta_{t3}^{(1)}, \tag{7}$$

$$\theta_{tc}^{(1)} = \theta_{t1}^{(1)} + \varepsilon_1\theta_{t1}^{(2)} + \varepsilon_2\theta_{t1}^{(2)} + \varepsilon_1\varepsilon_2\theta_{t1}^{(3)}. \tag{8}$$

Получим выражение для инерционного звена третьего порядка

$$\theta_{tc} = \theta_{t1} + \varepsilon_1\theta_{t1}^{(1)} + \varepsilon_1\theta_{t1}^{(1)} + \varepsilon_1\varepsilon_2\theta_{t1}^{(2)} + \varepsilon_{t3}\theta_{t1}^{(1)} + \varepsilon_{t3}\varepsilon_2\theta_{t1}^{(2)} + \varepsilon_{t3}\varepsilon_2\theta_{t1}^{(2)} + \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_{t3}\theta_{t1}^{(3)} =$$

$$= \theta_{t1} + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_{t3})\theta_{t1}^{(1)} + (\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_{t3} + \varepsilon_2\varepsilon_{t3})\theta_{t1}^{(2)} + \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_{t3}\theta_{t1}^{(3)} = \tag{9}$$

$$= \theta_{t1} + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\theta_{t1}^{(1)} + \varepsilon_1\varepsilon_2\theta_{t1}^{(2)} + \varepsilon_{t3}\left[(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\theta_{t1}^{(2)} + \varepsilon_1\varepsilon_2\theta_{t1}^{(3)}\right]. \tag{10}$$

Далее по аналогии с выражением (5) для инерционного звена второго порядка и выражением (9) для инерционного звена третьего порядка можем записать реккурентное выражение для инерционного звена n-го порядка (датчика температуры в $(n\text{–}1)$) оболочках в виде

$$\theta_{tc} = \theta_{t1} + \sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i\theta_{t1}^{(1)} + \sum_{\substack{i,j\in i,n \\ i\neq j}}^{C_n^2}\varepsilon_i\varepsilon_j\theta_{t1}^{(2)} + \sum_{\substack{i,j,S\in i,n \\ i\neq j\neq S}}^{C_n^3}\varepsilon_i\varepsilon_j\varepsilon_S\theta_{t1}^{(3)} + \ldots + \prod_{i=1}^{n}\varepsilon_i\theta_{t1}^{(n)}. \tag{11}$$

Уравнение преобразования датчика температуры, моделью которого является инерционное звено n-го порядка, соответствует электрической n-ёмкостной модели [1].

В выражении (11) показатель термической инерции внешней $(n\text{–}1)$-ой оболочки зависит от параметров внешней среды и, следовательно, от времени ε_m. Выделим ε_m как текущее неизвестное наравне с θ_{tc}, получим

$$\begin{gathered}\theta_{tc} - \varepsilon_m\left(\theta_{t1}^{(1)} + \theta_{t1}^{(2)}\sum_{i=1}^{n-1}\varepsilon_i + \theta_{t1}^{(3)}\sum_{i,j\in i,n-1}^{C_{n-1}^2}\varepsilon_i\varepsilon_j + \ldots + \theta_{t1}^{(n)}\prod_{i=1}^{n-1}\varepsilon_i\right) = \\ = \theta_{t1} + \theta_{t1}^{(1)}\sum_{i=1}^{n-1}\varepsilon_i + \theta_{t1}^{(2)}\sum_{i,j\in 1,n-1}^{C_{n-1}^2}\varepsilon_i\varepsilon_j + \ldots + \theta_{t1}^{(n-1)}\prod_{i=1}^{n-1}\varepsilon_i\ .\end{gathered} \tag{12}$$

Для упрощения записи введем обозначения

$$\begin{gathered}\sum_{i=1}^{n-1}\varepsilon_i = d_1, \\ \sum_{i,j\in 1,n}^{C_{n-1}^2}\varepsilon_i\varepsilon_j = d_2, \\ \vdots \\ \sum_{i,j,S}^{C_{n-1}^m}\varepsilon_i\varepsilon_j\varepsilon_n = d_m, \\ \prod_{i=1}^{n-1}\varepsilon_i = d_{n-1}.\end{gathered} \tag{13}$$

Введем обозначения

$$A_t = \sum_{i=0}^{n} d_i\theta_{t1}^{(t)},$$

$$A_t^{(t)} = \sum_{i=0}^{n} d_i\theta_{t1}^{(t+1)}. \tag{14}$$

В сокращенной записи для уравнения преобразования одного канала получим

$$\theta_{tc} - \varepsilon_m A_t^{(1)} = A_t, \tag{15}$$

где наблюдаемая величина θ_{t1} – температура чувствительного элемента; измеряемые величины: θ_{tc} – текущая температура внешней среды и ε_m – текущий показатель термической инерции внешней оболочки датчика, для которого справедливо выражение

$$\varepsilon_m = \left(\frac{\delta_n}{\lambda_n} + \frac{\lambda}{\alpha_m}\right)\frac{m_n c_n}{S_n}, \tag{16}$$

где первое слагаемое δ_n/λ_n содержит толщину δ_n и теплопроводность λ_n оболочки и является консервативным. Второе слагаемое содержит коэффициент α_m теплообмена внешней оболочки со средой, который зависит от физических параметров среды, скорости и условий обтекания датчика потоком, является нестационарным и обеспечивает текущую изменчивость ε_m в целом.

Измерители температуры с тремя датчиками. Измерители температуры с двумя датчиками используются для коррекции динамической погрешности и измерения кроме температуры также и текущего коэффициента теплообмена со средой (методы Пфрима). В рассматриваемом в данной работе случае измерители температуры с тремя датчиками используются дополнительно для идентификации текущих динамических параметров датчиков.

Рассмотрим, как это выполняется.

Для трех датчиков с разными динамическими характеристиками в общем случае можем записать три уравнения вида (15).

$$\begin{aligned} &\theta_{tc} - \varepsilon_{m1} A_{t1}^{(1)} = A_{t1}, \\ &\theta_{tc} - \varepsilon_{m2} A_{t2}^{(1)} = A_{t2}, \\ &\theta_{tc} - \varepsilon_{m3} A_{t3}^{(1)} = A_{t3}. \end{aligned} \tag{17}$$

Для решения системы (16) необходимо ввести ограничения вида:

$$\begin{aligned} &\varepsilon_{m2} = \gamma_2 \varepsilon_{m1} \\ &\varepsilon_{m3} = \gamma_3 \varepsilon_{m1}, \end{aligned} \tag{18}$$

где γ_2 и γ_3 – консервативные коэффициенты, независимые от текущих коэффициентов теплообмена датчиков со средой и обусловленные конструктивными параметрами внешней оболочки датчиков (см. выражение (16)).

В частном случае может быть $\gamma_2 = 1$, $\gamma_3 = 1$, но тогда различие динамических характеристик датчиков должно обеспечиваться различием показателей термической инерции внутренних оболочек.

С учетом (18) получим:

$$\begin{aligned} &\theta_{tc} - \varepsilon_{m1} A_{t1}^{(1)} = A_{t1}, \\ &\theta_{tc} - \gamma_2 \varepsilon_{m1} A_{t2}^{(1)} = A_{t2}, \\ &\theta_{tc} - \gamma_3 \varepsilon_{m1} A_{t3}^{(1)} = A_{t3}. \end{aligned} \tag{19}$$

Текущими неизвестными являются θ_{tc} и ε_{m1}.

Для первой пары уравнений из (19) запишем расширенную матрицу

$$\left| \begin{array}{c|c} 1 - A_{t1}^{(1)} & A_{t1} \\ 1 - \gamma_2 A_{t2}^{(1)} & A_{t2} \end{array} \right|. \tag{20}$$

И первые значения неизвестных

$$\theta_{tc}^{*} = \frac{A_{t1}^{(1)} A_{t2} - \gamma_2 A_{t1} A_{t2}^{(1)}}{A_{t1}^{(1)} - \gamma_2 A_{t2}^{(1)}}, \tag{21}$$

$$\varepsilon_{m1}^{*} = \frac{A_{t1} - A_{t2}}{A_{t1}^{(1)} - \gamma_2 A_{t2}^{(1)}}. \tag{22}$$

Расширенная матрица для второй пары уравнений (19) будет иметь вид

$$\left| \begin{array}{c|c} 1 - A_{t1}^{(1)} & A_{t1} \\ 1 - \gamma_3 A_{t3}^{(1)} & A_{t3} \end{array} \right|, \tag{23}$$

и вторые значения неизвестных будут

$$\theta_{tc}^{*} = \frac{A_{t1}^{(1)} A_{t3} - \gamma_3 A_{t1} A_{t2}^{(1)}}{A_{t1}^{(1)} - \gamma_3 A_{t3}^{(1)}}, \tag{24}$$

$$\varepsilon_{m1}^{*} = \frac{A_{t1} - A_{t2}}{A_{t1}^{(1)} - \gamma_3 A_{t3}^{(1)}}. \tag{25}$$

Имеем по два текущих значения температуры θ_{tc} и показателя термической инерции внешней оболочки первого датчика ε_{m1}, полученных параллельно из результатов измерения температуры чувствительных элементов разных каналов.

Эти результаты должны совпадать с точностью измерительных каналов и их можно приравнять с целью определения значений консервативных динамических параметров (показателей термической инерции) датчиков.

В принципе одинаковые результаты должны дать решение уравнений

$$\theta_{tc}^{*} = \theta_{tc}^{**} \text{ или } \varepsilon_{m1}^{*} = \varepsilon_{m2}^{**}. \tag{26}$$

Поскольку последнее представляется менее громоздким для преобразований, то используем его и запишем

$$\frac{A_{t1}-A_{t2}}{A_{t1}^{(1)}-\gamma_2 A_{t2}^{(1)}}=\frac{A_{t1}-A_{t3}}{A_{t1}^{(1)}-\gamma_3 A_{t3}^{(1)}}, \tag{27}$$

$$(A_{t1}-A_{t2})(A_{t1}^{(1)}-\gamma_3 A_{t3}^{(1)})=(A_{t1}-A_{t3})(A_{t1}^{(1)}-\gamma_2 A_{t2}^{(1)});$$

$$A_{t1}A_{t1}^{(1)}-A_{t2}A_{t1}^{(1)}-A_{t1}\gamma_3 A_{t3}^{(1)}+\gamma_3 A_{t2}A_{t3}^{(1)}=A_{t1}A_{t1}^{(1)}-A_{t3}A_{t1}^{(1)}-\gamma_2 A_{t1}A_{t2}^{(1)}+\gamma_2 A_{t3}A_{t2}^{(1)};$$

$$\gamma_3 A_{t2}A_{t3}^{(1)}-\gamma_2 A_{t3}A_{t2}^{(1)}+A_{t3}A_{t1}^{(1)}-A_{t2}A_{t1}^{(1)}+\gamma_2 A_{t1}A_{t2}^{(1)}-\gamma_3 A_{t1}A_{t3}^{(1)}=0;$$

$$\begin{gathered}\gamma_3\Big(\sum_{i=0}^{n} d_{2i}\theta_{t2}^{(i)}\cdot\sum_{i=0}^{n} d_{3i}\theta_{t3}^{(i+1)}\Big)-\gamma_2\Big(\sum_{i=0}^{n} d_{3i}\theta_{t3}^{(i)}\cdot\sum_{i=0}^{n} d_{2i}\theta_{t2}^{(i+1)}\Big)+\sum_{i=0}^{n} d_{3i}\theta_{t3}^{(i)}\cdot\sum_{i=0}^{n} d_{1i}\theta_{t1}^{(i+1)}\Big)-\\-\sum_{i=0}^{n} d_{2i}\theta_{t2}^{(i)}\cdot\sum_{i=0}^{n} d_{1i}\theta_{t1}^{(i+1)}+\gamma_2\Big(\sum_{i=0}^{n} d_{1i}\theta_{t1}^{(i)}\cdot\sum_{i=0}^{n} d_{2i}\theta_{t2}^{(i+1)}\Big)-\gamma_3\Big(\sum_{i=0}^{n} d_{1i}\theta_{t1}^{(i)}\cdot\sum_{i=0}^{n} d_{3i}\theta_{t3}^{(i+1)}\Big)=0,\end{gathered} \tag{28}$$

при $d_{j0}=1,\ j=\overline{1,3}$.

Выражение (28) при конкретном моменте времени является одним из уравнений системы, которая формируется из отсчетов для различных моментов времени t до необходимого количества и служит для идентификации консервативных динамических параметров датчиков d_{ji}.

Далее рассмотрим решения для конкретных примеров. Если для описания одного канала можно использовать датчик с моделью инерционного звена от первого до n-ого порядка, то для трехканального измерителя можно построить 3^n моделей.

Рассмотрим измерители с однородными каналами, датчики в которых описываются моделями одного порядка от первого до третьего.

Измеритель с датчиками, моделями которых являются инерционные звенья первого порядка (чувствительный элемент без оболочки). Система уравнений (19) для преобразования в каналах принимает вид

$$\begin{aligned}&\theta_{tc}-\varepsilon_{t1}\theta_{t1}^{(1)}=\theta_{t1},\\&\theta_{tc}-\gamma_2\varepsilon_{t1}\theta_{t2}^{(1)}=\theta_{t2},\\&\theta_{tc}-\gamma_3\varepsilon_{t1}\theta_{t3}^{(1)}=\theta_{t3},\end{aligned} \tag{29}$$

где θ_{tc} – текущая температура среды; θ_{tj} – температура чувствительного элемента j-ого датчика; $\theta_{tj}^{(1)}$ – ее первая производная; ε_{t1} – показатель термической инерции первого датчика; γ_2, γ_3 – коэффициенты пропорциональности.

Из пары первого и второго уравнений получим первое решение

$$\theta_{tc}^{*}=\frac{\theta_{t2}\theta_{t1}^{(1)}-\gamma_2\theta_{t1}\theta_{t2}^{(1)}}{\theta_{t1}^{(1)}-\gamma_2\theta_{t2}^{(1)}}, \tag{30}$$

$$\varepsilon_{tc}^{*}=\frac{\theta_{t2}-\theta_{t1}}{\theta_{t1}^{(1)}-\gamma_2\theta_{t2}^{(1)}}. \tag{31}$$

Из пары первого и третьего уравнений получим второе решение

$$\theta_{tc}^{**}=\frac{\theta_{t3}\theta_{t1}^{(1)}-\gamma_3\theta_{t1}\theta_{t3}^{(1)}}{\theta_{t1}^{(1)}-\gamma_3\theta_{t3}^{(1)}}, \tag{32}$$

$$\varepsilon_{tc}^{**}=\frac{\theta_{t3}-\theta_{t1}}{\theta_{t1}^{(1)}-\gamma_3\theta_{t3}^{(1)}}. \tag{33}$$

Найдем среднее

$$\theta_{tc}=\frac{1}{2}\left(\theta_{tc}^{*}+\theta_{tc}^{**}\right),\quad \varepsilon_{t1}=\frac{1}{2}\left(\varepsilon_{t1}^{*}+\varepsilon_{t1}^{**}\right). \tag{34}$$

Для определения коэффициентов γ_2 и γ_3 приравняем уравнения (31) и (33).

Получим

$$\frac{\theta_{t2}-\theta_{t1}}{\theta_{t1}^{(1)}-\gamma_2\theta_{t2}^{(1)}}\approx\frac{\theta_{t3}-\theta_{t1}}{\theta_{t1}^{(1)}-\gamma_3\theta_{t3}^{(1)}}. \tag{35}$$

После преобразований получим относительно неизвестных γ_2 и γ_3 систему линейных алгебраических уравнений вида

$$(\theta_{t3}-\theta_{t1})\theta_{t2}^{(1)}\gamma_2-\theta_{t3}^{(1)}(\theta_{t2}-\theta_{t1})\gamma_3\approx(\theta_{t3}-\theta_{t2})\theta_{t1}^{(1)} \tag{36}$$

при $t=\overline{1,N}$.

При $N=2$ система имеет решение

$$\gamma_2=\frac{\theta_{13}^{(1)}(\theta_{12}-\theta_{11})(\theta_{23}-\theta_{22})\theta_{21}^{(1)}-\theta_{23}^{(1)}(\theta_{22}-\theta_{21})(\theta_{13}-\theta_{12})\theta_{11}^{(1)}}{\theta_{13}^{(1)}(\theta_{12}-\theta_{11})(\theta_{23}-\theta_{21})\theta_{22}^{(1)}-(\theta_{13}-\theta_{11})\theta_{12}^{(1)}\theta_{23}^{(1)}(\theta_{22}-\theta_{21})}, \tag{37}$$

$$\gamma_3=\frac{(\theta_{13}-\theta_{11})\theta_{12}^{(1)}\theta_{21}^{(1)}(\theta_{23}-\theta_{22})-(\theta_{23}-\theta_{21})\theta_{22}^{(1)}\theta_{11}^{(1)}(\theta_{13}-\theta_{12})}{\theta_{13}^{(1)}(\theta_{12}-\theta_{11})(\theta_{23}-\theta_{21})\theta_{22}^{(1)}-(\theta_{13}-\theta_{11})\theta_{12}^{(1)}\theta_{23}^{(1)}(\theta_{22}-\theta_{21})}. \tag{38}$$

Следовательно, текущие показатели термической инерции второго и третьего датчиков равны $\varepsilon_{t2}=\gamma_2\varepsilon_{t1}$ и $\varepsilon_{t3}=\gamma_3\varepsilon_{t1}$.

Измеритель с датчиками, моделями которых являются инерционные звенья второго порядка (чувствительный элемент в оболочке). Система уравнений (19) для преобразования в каналах имеет вид

$$\begin{cases}\theta_{tc}-\varepsilon_{t21}(\theta_{t11}^{(1)}+\varepsilon_{11}\theta_{t11}^{(2)})=\theta_{t11}+\varepsilon_{11}\theta_{t11}^{(1)},\\ \theta_{tc}-\gamma_2\varepsilon_{t21}(\theta_{t12}^{(1)}+\varepsilon_{12}\theta_{t12}^{(2)})=\theta_{t12}+\varepsilon_{12}\theta_{t12}^{(1)},\\ \theta_{tc}-\gamma_3\varepsilon_{t21}(\theta_{t13}^{(1)}+\varepsilon_{13}\theta_{t13}^{(2)})=\theta_{t13}+\varepsilon_{13}\theta_{t13}^{(1)},\end{cases} \tag{39}$$

где новые обозначения: ε_{t2j} – показатель термической инерции оболочки j-ого датчика; θ_{t1j} – температура чувствительного элемента j-ого датчика и $\theta_{tij}^{(k)}$ – ее k-ая производная; ε_{1j} – показатель термической инерции чувствительного элемента j-ого датчика; $j=\overline{1,3}$.

В сокращенных обозначениях

$$A_{tj}=\theta_{t1j}+\varepsilon_{1j}\theta_{1j}^{(1)}, \tag{40}$$

$$A_{tj}^{(1)}=\theta_{t1j}^{(1)}+\varepsilon_{1j}\theta_{1j}^{(2)},\quad j=\overline{1,3}. \tag{41}$$

Первое значение текущей температуры среды $\theta_{tc}^{\bullet}$ и показателя термической инерции ε_{t21}

$$\theta_{tc}^{\bullet}=\frac{A_{t1}^{(1)}A_{t2}-\gamma_2A_{t1}A_{t2}^{(1)}}{A_{t1}^{(1)}-\gamma_2A_{t2}^{(1)}}, \tag{42}$$

$$\varepsilon_{t21}^{\bullet}=\frac{A_{t2}-A_{t1}}{A_{t1}^{(1)}-\gamma_2A_{t2}^{(1)}}. \tag{43}$$

Второе значение текущих температуры среды θ_{tc} и показателя термической инерции $\varepsilon_{t21}^{\bullet\bullet}$

$$\theta_{tc}^{\bullet\bullet}=\frac{A_{t1}^{(1)}A_{t3}-\gamma_3A_{t1}A_{t3}^{(1)}}{A_{t1}^{(1)}-\gamma_3A_{t3}^{(1)}}, \tag{44}$$

$$\varepsilon_{t21}^{\bullet\bullet}=\frac{A_{t3}-A_{t1}}{A_{t1}^{(1)}-\gamma_3A_{t3}^{(1)}}. \tag{45}$$

Для средних значений получим

$$\theta_{tc}=\frac{1}{2}(\theta_{tc}^{\bullet}+\theta_{tc}^{\bullet\bullet}), \tag{46}$$

$$\varepsilon_{t21}=\frac{1}{2}(\varepsilon_{t21}^{\bullet}+\varepsilon_{t21}^{\bullet\bullet}). \tag{47}$$

Далее необходимо определить коэффициенты γ_2 и γ_3 и консервативные показатели термической инерции чувствительных элементов ε_{11}, ε_{12}, ε_{13}. Для этого, как и ранее, приравняем выражения (43) и (45) для $\varepsilon_{t21}^{\bullet}$ и $\varepsilon_{t21}^{\bullet\bullet}$.

В сокращенных обозначениях получим

$$A_{t2}A_{t1}^{(1)}-\gamma_3A_{t2}A_{t3}^{(1)}+\gamma_3A_{t1}A_{t3}^{(1)}-A_{t3}A_{t1}^{(1)}+\gamma_2A_{t3}A_{t2}^{(1)}-\gamma_2A_{t1}A_{t2}^{(1)}=0. \tag{48}$$

После раскрытия значений A_{tj} и $A_{tj}^{(1)}$ получим уравнение

$$(\theta_{t2}-\theta_{t3})\theta_{t1}^{(2)}\varepsilon_{11}+\theta_{t1}^{(1)}\theta_{t2}^{(1)}\varepsilon_{12}-\theta_{t1}^{(1)}\theta_{t3}^{(1)}\varepsilon_{13}+(\theta_{t3}-\theta_{t1})\theta_{t2}^{(1)}\gamma_2+(\theta_{t1}-\theta_{t2})\theta_{t3}^{(1)}\gamma_3+$$

$$+\theta_{t2}^{(1)}\theta_{t1}^{(2)}\varepsilon_{11}\varepsilon_{12}-\theta_{t3}^{(1)}\theta_{t1}^{(2)}\varepsilon_{11}\varepsilon_{13}+\theta_{t1}^{(1)}\theta_{t2}^{(1)}\gamma_2\varepsilon_{11}+(\theta_{t3}-\theta_{t1})\theta_{t2}^{(2)}\gamma_2\varepsilon_{12}+\theta_{t2}^{(1)}\theta_{t3}^{(1)}(\gamma_2\varepsilon_{13}-\gamma_3\varepsilon_{12})+$$

$$+\theta_{t1}^{(1)}\theta_{t3}^{(1)}\gamma_3\varepsilon_{11}+(\theta_{t1}-\theta_{t2})\theta_{t3}^{(2)}\gamma_3\varepsilon_{13}-\theta_{t1}^{(1)}\theta_{t2}^{(2)}\gamma_2\varepsilon_{11}\varepsilon_{12}+ \qquad (49)$$

$$+\theta_{t3}^{(1)}\theta_{t2}^{(2)}\gamma_2\varepsilon_{12}\varepsilon_{13}+\theta_{t1}^{(1)}\theta_{t3}^{(2)}\gamma_3\varepsilon_{11}\varepsilon_{13}-\theta_{t2}^{(1)}\theta_{t3}^{(2)}\gamma_3\varepsilon_{12}\varepsilon_{13}=(\theta_{t3}-\theta_{t2})\theta_{t1}^{(1)}.$$

Введем обозначения неизвестных x_i и текущих коэффициентов d_{ti} при них

$$\begin{gathered}
x_1=\varepsilon_{11},\ \ a_{t1}=(\theta_{t2}-\theta_{t3})\,\theta_{t1}^{(2)};\\
x_2=\varepsilon_{12},\ \ a_{t2}=\theta_{t1}^{(1)}\theta_{t2}^{(1)};\\
x_3=\varepsilon_{13},\ \ a_{t3}=-\theta_{t1}^{(1)}\theta_{t3}^{(1)};\\
x_4=\gamma_2,\ \ a_{t4}=(\theta_{t3}-\theta_{t1})\,\theta_{t2}^{(1)};\\
x_5=\gamma_3,\ \ a_{t5}=(\theta_{t1}-\theta_{t2})\,\theta_{t3}^{(1)};\\
x_6=\varepsilon_{11}\varepsilon_{12},\ \ a_{t6}=\theta_{t2}^{(1)}\,\theta_{t1}^{(2)};\\
x_7=\varepsilon_{11}\varepsilon_{13},\ \ a_{t7}=-\theta_{t3}^{(1)}\theta_{t1}^{(2)};\\
x_8=\gamma_2\varepsilon_{11},\ \ a_{t8}=\theta_{t1}^{(1)}\theta_{t2}^{(1)};\\
x_9=\gamma_2\varepsilon_{12},\ \ a_{t9}=(\theta_{t3}-\theta_{t1})\,\theta_{t2}^{(2)};\\
x_{10}=(\gamma_2\varepsilon_{13}-\gamma_3\varepsilon_{12}),\ \ a_{t10}=\theta_{t2}^{(1)}\,\theta_{t3}^{(1)};\\
x_{11}=\gamma_3\varepsilon_{11},\ \ a_{t11}=\theta_{t1}^{(1)}\theta_{t3}^{(1)};\\
x_{12}=\gamma_3\varepsilon_{13},\ \ a_{t12}=(\theta_{t1}-\theta_{t2})\,\theta_{t3}^{(2)};\\
x_{13}=\gamma_2\varepsilon_{11}\varepsilon_{12},\ \ a_{t13}=-\theta_{t1}^{(1)}\,\theta_{t2}^{(2)};\\
x_{14}=\gamma_2\varepsilon_{12}\varepsilon_{13},\ \ a_{t14}=\theta_{t3}^{(1)}\,\theta_{t2}^{(2)};\\
x_{15}=\gamma_3\varepsilon_{11}\varepsilon_{13},\ \ a_{t15}=\theta_{t1}^{(1)}\,\theta_{t3}^{(2)};\\
x_{16}=\gamma_3\varepsilon_{12}\varepsilon_{13},\ \ a_{t16}=-\theta_{t2}^{(1)}\,\theta_{t3}^{(2)};\\
c_t=(\theta_{t3}-\theta_{t2})\,\theta_{t1}'.
\end{gathered} \qquad (50)$$

Запишем систему уравнений

$$\sum_{j=1}^{16}x_j a_{tj}=c_t,\ \ t=\overline{1,N},\ N\ge 16, \qquad (51)$$

которая решается относительно неизвестных $x_1\div x_5$, т.е. $\varepsilon_{11},\varepsilon_{12},\varepsilon_{13},\gamma_2$ и γ_3.

Частный случай при $\gamma_2=1,\ \gamma_3=1$.

В этом случае различие в каналах обеспечивается различием показателей термической инерции чувствительных элементов датчиков $\varepsilon_{11},\varepsilon_{12},\varepsilon_{13}$, а показатели термической инерции оболочек совпадают и равны ε_{t2}.

Значения $\varepsilon_{11}=x_1$, $\varepsilon_{12}=x_2$, $\varepsilon_{13}=x_3$ находятся из решения системы уравнений

$$\sum_{j=1}^{6}a_{tj}x_j=c_t,\ \ t=\overline{1,N},\ N\ge 6, \qquad (52)$$

где $x_1=\varepsilon_{11},\ \ a_{t1}=(\theta_{t2}-\theta_{t3})\,\theta_{t1}^{(2)}+(\theta_{t3}^{(1)}-\theta_{t2}^{(1)})\,\theta_{t1}^{(1)}$;

$x_2=\varepsilon_{12},\ \ a_{t2}=(\theta_{t1}^{(1)}-\theta_{t3}^{(1)})\,\theta_{t2}^{(1)}+(\theta_{t3}-\theta_{t1})\,\theta_{t2}^{(2)}$;

$x_3=\varepsilon_{13},\ \ a_{t3}=(\theta_{t2}-\theta_{t1})\,\theta_{t1}^{(1)}+(\theta_{t1}^{(1)}-\theta_{t2}^{(1)})\,\theta_{t3}^{(1)}$;

$x_4=\varepsilon_{11}\varepsilon_{12},\ \ a_{t4}=\theta_{t2}^{(1)}\theta_{t1}^{(2)}-\theta_{t1}^{(1)}\theta_{t2}^{(2)}$;

$x_5=\varepsilon_{12}\varepsilon_{13},\ \ a_{t5}=\theta_{t3}^{(1)}\theta_{t2}^{(2)}-\theta_{t2}^{(1)}\theta_{t3}^{(2)}$;

$x_6 = \varepsilon_{11}\varepsilon_{13}$, $a_{t6} = \theta_{t1}^{(1)}\theta_{t3}^{(2)} - \theta_{t3}^{(1)}\theta_{t1}^{(2)}$;

$c_t = \theta_{t3}(\theta_{t1}^{(1)} - \theta_{t2}^{(1)}) + \theta_{t2}(\theta_{t3}^{(1)} - \theta_{t1}^{(1)}) + \theta_{t1}(\theta_{t2}^{(1)} - \theta_{t3}^{(1)})$.

Измеритель с датчиками, моделями которых являются инерционные звенья третьего порядка. Измерительные каналы температуры с датчиками, чувствительный элемент которых помещен в защитную оболочку с наполнителем, занимающем пространство между чувствительным элементом и внешней оболочкой.

Уравнение этого звена согласно выражению (9) имеет вид

$$\theta_{tc} = \theta_t + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_{t3})\theta_t^{(1)} + (\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_{t3} + \varepsilon_2\varepsilon_{t3})\theta_t^{(2)} + \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_{t3}\theta_t^{(3)}, \tag{53}$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_{t3}$ – показатели инерции чувствительного элемента, наполнителя и внешней оболочки. Текущие неизвестные: температура внешней среды θ_{tc} и ε_{t3}. Для наглядности повторим некоторые выкладки. Выделим неизвестные в выражении (53)

$$\theta_{tc} - \varepsilon_{t3}\left[\theta_t^{(1)} + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\theta_t^{(2)} + \varepsilon_1\varepsilon_2\theta_t^{(3)}\right] = \theta_{t1} + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\theta_t^{(1)} + \varepsilon_1\varepsilon_2\theta_t^{(2)}. \tag{54}$$

Используем три датчика.

Введем обозначения для j-го датчика

$$\varepsilon_{1j} + \varepsilon_{2j} = d_{1j};\ \varepsilon_{1j}\varepsilon_{2j} = d_{2j}; \tag{55}$$

$$A_{tj} = \theta_{tj} + d_{1j}\theta_{tj}^{(1)} + d_{2j}\theta_{tj}^{(2)}; \tag{56}$$

$$A_{tj}^{(1)} = \theta_{tj}^{(1)} + d_{1j}\theta_{tj}^{(2)} + d_{2j}\theta_{tj}^{(3)}. \tag{57}$$

Тогда для вычисления θ_{tc} и ε_{t31} используются приведенные выше формулы (46) и (47). Для определения коэффициентов инерции d_{1j} и d_{2j} и через них показателей термической инерции чувствительного элемента ε_{1j} и наполнителя ε_{2j} и коэффициентов γ_1 и γ_2 воспользуемся выражением (48).

В датчиках с двумя оболочками различие в инерционности проще обеспечить за счет ε_1 и (или) ε_2, а не за счет внешней оболочки ε_{t3j}. Поэтому принимаем $\gamma_2 = 1$ и $\gamma_3 = 1$. После раскрытия выражения (48) с учетом выражений (55) – (57) получим:

$$\begin{gathered}(\theta_{t1} + d_{11}\theta_{t1}^{(1)} + d_{21}\theta_{t1}^{(2)})(\theta_{t3}^{(1)} + d_{13}\theta_{t3}^{(2)} + d_{23}\theta_{t3}^{(3)}) - (\theta_{t2} + d_{12}\theta_{t2}^{(1)} + d_{22}\theta_{t2}^{(2)})(\theta_{t3}^{(1)} + d_{13}\theta_{t3}^{(2)} + d_{23}\theta_{t3}^{(3)}) + \\ + (\theta_{t2} + d_{12}\theta_{t2}^{(1)} + d_{22}\theta_{t2}^{(2)})(\theta_{t1}^{(1)} + d_{11}\theta_{t1}^{(2)} + d_{21}\theta_{t1}^{(3)}) = (\theta_{t1} + d_{11}\theta_{t1}^{(1)} + d_{21}\theta_{t1}^{(2)})(\theta_{t2}^{(1)} + d_{12}\theta_{t2}^{(2)} + d_{22}\theta_{t2}^{(3)}) - \\ - (\theta_{t3} + d_{13}\theta_{t3}^{(1)} + d_{23}\theta_{t3}^{(2)})(\theta_{t2}^{(1)} + d_{12}\theta_{t2}^{(2)} + d_{22}\theta_{t2}^{(3)}) + (\theta_{t3} + d_{13}\theta_{t3}^{(1)} + d_{23}\theta_{t3}^{(2)})(\theta_{t1}^{(1)} + d_{11}\theta_{t1}^{(2)} + d_{21}\theta_{t1}^{(3)}).\end{gathered} \tag{58}$$

Раскрываем скобки, приводим подобные, группируем неизвестные и коэффициенты при них. За счет отсчетов θ_{tj} $(j = \overline{1,3})$ сформируем систему линейных алгебраических уравнений вида

$$\sum_{i=1}^{18} a_{ti}x_i = c_t,\ \ t = \overline{1,N},\ N \geq 18, \tag{59}$$

где $x_1 = d_{11}$, $a_{t1} = (\theta_{t1}^{(1)}\theta_{t3}^{(1)} + \theta_{t1}\theta_{t1}^{(1)} + \theta_{t2}\theta_{t1}^{(2)} - \theta_{t1}^{(1)}\theta_{t2}^{(1)} - \theta_{t3}\theta_{t1}^{(2)}$;

$x_2 = d_{21}$, $a_{t2} = \theta_{t1}^{(2)}\theta_{t3}^{(2)} + \theta_{t2}\theta_{t1}^{(3)} - \theta_{t1}^{(2)}\theta_{t2}^{(1)} - \theta_{t3}\theta_{t1}^{(3)}$;

$x_3 = d_{12}$, $a_{t3} = -(\theta_{t2}^{(1)}\theta_{t3}^{(1)} + \theta_{t2}^{(1)}\theta_{t1}^{(1)} + \theta_{t2}^{(2)}\theta_{t3} - \theta_{t2}^{(2)}\theta_{t1})$;

$x_4 = d_{22}$, $a_{t4} = -(\theta_{t2}^{(2)}\theta_{t3}^{(1)} + \theta_{t2}^{(2)}\theta_{t1}^{(1)} + \theta_{t3}\theta_{t2}^{(3)})$;

$x_5 = d_{13}$, $a_{t5} = -(\theta_{t2}\theta_{t3}^{(2)} + \theta_{t1}\theta_{t3}^{(2)} + \theta_{t3}^{(1)}\theta_{t2}^{(1)} - \theta_{t3}^{(1)}\theta_{t1}^{(1)})$;

$x_6 = d_{23}$, $a_{t6} = -(\theta_{t2}\theta_{t3}^{(3)} + \theta_{t1}\theta_{t3}^{(3)} + \theta_{t3}^{(2)}\theta_{t2}^{(1)} - \theta_{t3}^{(2)}\theta_{t1}^{(1)})$;

$$x_7 = d_{12}d_{13},\ a_{t7} = -(\theta_{t2}^{(1)}\theta_{t3}^{(2)} + \theta_{t3}^{(1)}\theta_{t2}^{(2)});$$
$$x_8 = d_{22}d_{13},\ a_{t8} = -(\theta_{t2}^{(2)}\theta_{t3}^{(2)} + \theta_{t3}^{(1)}\theta_{t2}^{(3)} - \theta_{t1}\theta_{t2}^{(2)} - \theta_{t1}\theta_{t2}^{(3)});$$
$$x_9 = d_{12}d_{23},\ a_{t9} = -(\theta_{t2}^{(1)}\theta_{t3}^{(3)} + \theta_{t3}^{(2)}\theta_{t2}^{(2)});$$
$$x_{10} = d_{12}d_{23},\ a_{t10} = \theta_{t2}^{(2)}\theta_{t3}^{(3)} + \theta_{t3}^{(1)}\theta_{t2}^{(3)};$$
$$x_{11} = d_{11}d_{13},\ a_{t11} = \theta_{t1}^{(1)}\theta_{t3}^{(2)} - \theta_{t3}^{(1)}\theta_{t1}^{(2)};$$
$$x_{12} = d_{21}d_{13},\ a_{t12} = \theta_{t1}^{(2)}\theta_{t3}^{(2)} - \theta_{t3}^{(1)}\theta_{t1}^{(3)};$$
$$x_{13} = d_{11}d_{23},\ a_{t13} = \theta_{t1}^{(1)}\theta_{t3}^{(3)} - \theta_{t3}^{(2)}\theta_{t1}^{(2)};$$
$$x_{14} = d_{21}d_{23},\ a_{t14} = \theta_{t1}^{(2)}\theta_{t3}^{(3)} - \theta_{t3}^{(2)}\theta_{t1}^{(3)};$$
$$x_{15} = d_{11}d_{12},\ a_{t15} = \theta_{t2}^{(1)}\theta_{t1}^{(2)} - \theta_{t1}^{(1)}\theta_{t2}^{(2)};$$
$$x_{16} = d_{11}d_{22},\ a_{t16} = \theta_{t2}^{(2)}\theta_{t1}^{(1)} - \theta_{t1}^{(1)}\theta_{t2}^{(3)};$$
$$x_{17} = d_{21}d_{12},\ a_{t17} = \theta_{t2}^{(1)}\theta_{t1}^{(3)} - \theta_{t1}^{(2)}\theta_{t2}^{(2)};$$
$$x_{18} = d_{21}d_{22},\ a_{t18} = \theta_{t2}^{(2)}\theta_{t1}^{(3)} - \theta_{t1}^{(2)}\theta_{t2}^{(3)};$$
$$c_t = \theta_{t1}(\theta_{t2}^{(1)} - \theta_{t3}^{(1)}) + \theta_{t2}(\theta_{t3}^{(1)} - \theta_{t2}^{(1)}) + \theta_{t3}(\theta_{t1}^{(1)} - \theta_{t2}^{(1)}).$$

Представляют интерес первые шесть неизвестных $x_j = \overline{1,6}$. Остальные неизвестные являются избыточными, но могут вычисляться для контроля правильности решений.

После нахождения $x_j\ (j = \overline{1,6})$ получим

$$x_1 = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{21},\quad x_2 = \varepsilon_{11}\varepsilon_{21}. \tag{60}$$

Во второе выражение подставляем

$$\varepsilon_{21} = x_1 - \varepsilon_{11} \tag{61}$$

и получаем

$$\varepsilon_{11}(x_1 - \varepsilon_{11}) = x_2,\quad \varepsilon_{11}^2 - x_1\varepsilon_{11} + x_2 = 0,$$

$$\varepsilon_{11} = \frac{x_1 + \sqrt{x_1^2 - 4x_2}}{2}. \tag{62}$$

По аналогии

$$x_3 = \varepsilon_{12} + \varepsilon_{22},\quad \varepsilon_{22} = x_3 - \varepsilon_{12}, \tag{63}$$

$$x_4 = \varepsilon_{12}\varepsilon_{22},$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{x_3 + \sqrt{x_3^2 - 4x_4}}{2}, \tag{64}$$

$$x_5 = \varepsilon_{13} + \varepsilon_{23},\quad \varepsilon_{23} = x_3 - \varepsilon_{13}, \tag{65}$$

$$x_6 = \varepsilon_{13}\varepsilon_{23},$$

$$\varepsilon_{13} = \frac{x_5 + \sqrt{x_5^2 - 4x_6}}{2}, \tag{66}$$

Таким образом определяются показатели термической инерции чувствительных элементов $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{13}$ и наполнителей $\varepsilon_{21}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{23}$ всех датчиков.

Заключение. Проведенный анализ измерителей температуры с тремя датчиками показал возможность корректировать динамическую погрешность при измерении текущей нестационарной температуры и определять показатели термической инерции как текущего для внешней оболочки, так и консервативных для чувствительных элементов и внутренних оболочек в рабочем режиме. Это позволяет строить высокоточные измерители с метрологической долговечностью.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ярышев Н.А.* Теоретические основы измерения нестационарной температуры. – 2-е изд., перераб. – Л.: Энергоатомиздат. Ленингр. Отд-ние, 1990. – 256 с.: ISBN 5-283-04474-2.
2. *Азизов А.М., Гордов А.Н.* Точность измерительных преобразователей. – Л.: Энергия, 1975. – 256 с.
3. *Коротков П.А., Лондон Т.Е.* Динамические контактные измерения тепловых величин. – Л.: Машиностроение. (Ленингр. отд.). – 1974. – 224 с.
4. *Гайский В.А., Гайский П.В.* Методы измерения температуры и потока теплообмена датчиков со средой, инвариантные к теплоемкостям датчиков // Системы контроля окружающей среды. – Севастополь: МГИ НАН Украины, 2010. – Вып. 13. – С. 60 – 64.