ЧАСТОТНЫЙ АНАЛИЗ И СИНТЕЗ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ ИНВАРИАНТНЫХ СИСТЕМ

В.А. Гайский, П.В. Гайский

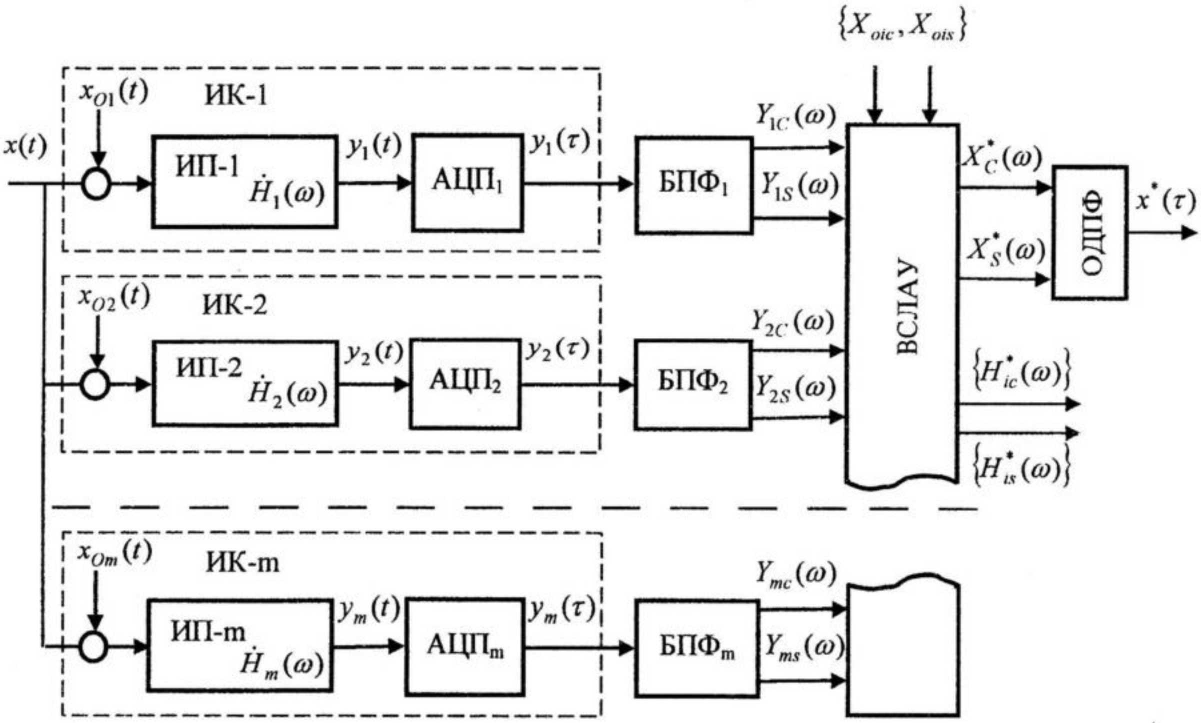
Морской гидрофизический институт
НАН Украины
г. Севастополь, ул. Капитанская, 2
E-mail: oaoi@alpha.mhi.iuf.net

Рассматриваются спектральные методы обработки сигналов в параметрически инвариантных системах с измерительными линейными динамическими преобразователями.

Постановка задачи. В параметрически инвариантных системах (ПИС), содержащих несколько разных параллельных каналов преобразования сигнала и использующих модели каналов в форме дифференциальных уравнений, цифровая обработка сигналов с целью восстановления входного сигнала и идентификации параметров моделей каналов проводится во временной области с определением производных дискретезированных сигналов [1]. При достаточном быстродействии и разрешении по уровню аналого-цифрового преобразования и при отсутствии аддитивных шумов эта задача удовлетворительно решается, например, при машинном моделировании [2].

Однако в реальных системах эти условия обычно не выполняются и определение производных с удовлетворительной точностью затруднено. Поэтому целесообразно рассмотреть возможности цифровой обработки сигналов в спектральной форме, как более помехоустойчивой.

Описание ПИС в частотной области. Обобщенная структурно-функциональная схема ПИС со спектральной обработкой сигналов представлена на рис. 1.



Р и с. 1. Структурно-функциональная схема ПИС

В состав ПИС входят: измерительные каналы ИК$_i$ $(i=\overline{1,m})$; блоки быстрого преобразования Фурье БПФ$_i$; вычислитель системы линейных алгебраических уравнений ВСЛАУ; блок обратного дискретного преобразования Фурье ОДПФ. Каждый измерительный канал ИК содержит последовательно включенные измерительный преобразователь ИП из первичного (датчика) и вторичного (схемы включения) измерительных преобразователей с неизвестной комплексной передаточной функцией $\dot{H}_i(\omega)$ и линейный аналого-цифровой преобразователь АЦП$_i$. Выходы АЦП$_i$ поданы на входы блоков БПФ$_i$, выходы которых поданы на ВСЛАУ, к выходам которого подключен блок ОДПФ.

Использованы следующие обозначения сигналов. Сигналы во временной области с непрерывным t или дискретным временем τ обозначены строчными буквами x, y. Изображения сигналов и функций в частотной области обозначены прописными буквами $X(\omega)$, $Y(\omega)$, $H(\omega)$. Звездочкой обозначены вычисленные значения $X^*(\omega)$, $x^*(t)$, $H^*(\omega)$.

Система работает следующим образом. Измеряемый сигнал $x(t)$ суммируется с образцовым сигналом $x_{oi}(t)$ и поступает на входы всех измерительных каналов, проходит с искажениями измерительные преобразователи ИП$_i$, и в виде сигналов $y_i(t)$ преобразуется АЦП$_i$ в цифровую форму $y_i(\tau)$ и далее с помощью БПФ$_i$ за некоторый скользящий интервал времени T параллельно вычисляются вещественные $Y_{ic}(\omega)$ и мнимые $Y_{is}(\omega)$ составляющие спектров $\dot{Y}(\omega)$. Составляющие спектров X_{oic} и X_{ois} образцовых сигналов предполагаются известными. На основе $X_{ic}(\omega)$, $X_{is}(\omega)$, $X_{oic}(\omega)$, $X_{ois}(\omega)$ решением системы линейных алгебраических уравнений определяются составляющие вещественных $H^*_{ic}(\omega)$ и мнимых $H^*_{is}(\omega)$ составляющих комплексных передаточных функций $\dot{H}_i(\omega)$ измерительных преобразователей и входного измеряемого сигнала $X^*_c(\omega)$ и $X^*_s(\omega)$. Далее с помощью обратного дискретного преобразования Фурье ОДПФ из $\dot{X}(\omega)$ формируется временной ряд $x^*(\tau)$ отсчетов восстановленного без динамических искажений входного измеряемого сигнала $x(t)$ с начальной задержкой на время T и текущей задержкой от интервала дискретизации до T.

Реализация ПИС может быть разной: полностью аппаратная, аппаратная – до выходов АЦП и программно – вся обработка.

Уравнение преобразования сигнала в частотной форме для измерительного преобразователя с произвольной комплексной передаточной функцией имеет вид [3]:

$$\begin{aligned}\dot{Y}(\omega) &= [H_c(\omega)+jH_s(\omega)]\{[X_c(\omega)+X_{oc}(\omega)]+j[X_s(\omega)+X_{os}(\omega)]\} = \\ &= H_c(\omega)[X_c(\omega)+X_{oc}(\omega)]-H_s(\omega)[X_s(\omega)+X_{os}(\omega)]+ \\ &+ j\{H_s(\omega)[X_c(\omega)+X_{oc}(\omega)]+H_c(\omega)[X_s(\omega)+X_{os}(\omega)]\}.\end{aligned} \tag{1}$$

Для вещественной $Y_c(\omega)$ и мнимой $Y_s(\omega)$ составляющих сигнала $\dot{Y}(\omega)$ можем записать

$$\begin{aligned}Y_c(\omega) &= H_c(\omega)[X_c(\omega)+X_{oc}(\omega)]-H_s(\omega)[X_s(\omega)+X_{os}(\omega)], \\ Y_s(\omega) &= H_s(\omega)[X_c(\omega)+X_{oc}(\omega)]-H_c(\omega)[X_s(\omega)+X_{os}(\omega)].\end{aligned} \tag{2}$$

Решение системы (2) для входных сигналов имеет вид [4]

$$X_c(\omega)+X_{oc}(\omega) = \frac{Y_c(\omega)H_c(\omega)+Y_s(\omega)H_s(\omega)}{|H(\omega)|^2}, \tag{3}$$

$$X_s(\omega)+X_{os}(\omega)=\frac{Y_s(\omega)H_c(\omega)-Y_c(\omega)H_s(\omega)}{|H(\omega)|^2},$$

где $|H(\omega)|^2=H_c^2(\omega)+H_s^2(\omega)$.

Выражения (3) позволяют восстановить входной сигнал $\dot{X}(\omega)+\dot{X}_o(\omega)$, если частотная область определения $\dot{H}(\omega)$ включает область определения $\dot{X}(\omega)+\dot{X}_o(\omega)$, когда это условие не выполняется – сигнал $\dot{X}(\omega)+\dot{X}_o(\omega)$ не может быть восстановлен точно.

В реальных измерительных системах очень трудно выполнить приведенное выше условие, но сигнал $\dot{X}(\omega)$ будет восстанавливаться там, где $\dot{H}(\omega)\neq 0$. Однако предположим далее, что условие выполняется. Обозначим

$$H_c'(\omega)=\frac{H_c(\omega)}{|H(\omega)|^2},\ H_s'(\omega)=\frac{H_s(\omega)}{|H(\omega)|^2}.$$

Для двух параллельных измерительных каналов для момента времени t можем записать СЛАУ

$$\begin{aligned}
&X_c(\omega,t)-Y_{1c}(\omega,t)H_{1c}'(\omega)-Y_{1s}(\omega,t)H_{1s}'(\omega)=-X_{o1c}(\omega,t),\\
&X_s(\omega,t)-Y_{1c}(\omega,t)H_{1c}'(\omega)-Y_{1c}(\omega,t)H_{1s}'(\omega)=-X_{o1s}(\omega,t),\\
&X_c(\omega,t)-Y_{2c}(\omega,t)H_{2c}'(\omega)-Y_{2s}(\omega,t)H_{2s}'(\omega)=-X_{o2c}(\omega,t),\\
&X_s(\omega,t)-Y_{2s}(\omega,t)H_{2c}'(\omega)-Y_{2c}(\omega,t)H_{2s}'(\omega)=-X_{o2s}(\omega,t).
\end{aligned}\tag{4}$$

В системе (4) неизвестными являются $X_c(\omega,t)$, $X_s(\omega,t)$, $H_{1c}'(\omega)$, $H_{1s}'(\omega)$, $H_{2c}'(\omega)$, $H_{2s}'(\omega)$, наблюдаемыми и известными – $Y_{1c}(\omega,t)$, $Y_{1s}(\omega,t)$, $Y_{2c}(\omega,t)$, $Y_{2s}(\omega,t)$. На шесть неизвестных имеется четыре уравнения. Расширение системы уравнений получим за счет времени.

Для второго момента времени получим новую четверку уравнений вида (4), в который добавятся новые неизвестные $X_c(\omega,2)$ и $X_s(\omega,2)$.

На восемь неизвестных будет восемь уравнений. Далее неизвестные могут быть определены непосредственно решением системы из 8-ми уравнений или последовательным уменьшением порядка системы до четырех исключением неизвестных $X_c(\omega)$ и $X_s(\omega)$, используя их равенство путем вычитания для двух каналов и определения $H_{1c}'(\omega)$, $H_{1s}'(\omega)$, $H_{2c}'(\omega)$, $H_{2s}'(\omega)$ из системы уравнений вида:

$$-Y_{1c}(\omega,t)H_{1c}'(\omega)-Y_{1s}(\omega,t)H_{1s}'(\omega)+Y_{2c}(\omega,t)H_{2c}'(\omega)+Y_{2s}(\omega,t)H_{2s}'(\omega)=-X_{o1c}(\omega,t)+X_{o2c}(\omega,t),$$

$$-Y_{1s}(\omega,t)H_{1c}'(\omega)-Y_{1c}(\omega,t)H_{1s}'(\omega)+Y_{2s}(\omega,t)H_{2c}'(\omega)+Y_{2c}(\omega,t)H_{2s}'(\omega)=-X_{o1s}(\omega,t)+X_{o2s}(\omega,t),$$

где $t=1,2$.

Далее спектральное представление входного сигнала $X_{1c}^{*}(\omega,t)$, $X_{1s}^{*}(\omega,t)$ восстанавливается по выражениям (4) для каждого канала, т.е. по два спектральных представления для каждого момента времени, которые можно усреднить.

Накопление данных за два такта снижает быстродействие. Рассмотрим возможности повышения быстродействия за счет увеличения числа каналов. Передаточная функция может быть n-параметрической. Если один канал имеет n неизвестных, m каналов дают $n\cdot m$ неизвестных, один такт дает одно новое неизвестное $\dot{X}(\omega,t)$, τ тактов дают $n\cdot m+\tau$ неизвестных и $m\tau$ уравнений. Должно быть $m\tau\geq n\cdot m+\tau$ или

$$\frac{n\cdot m}{m-1}\leq\tau.\tag{6}$$

Значения τ для реальных параметров m и n неравенства (6) представлены в табл. 1.

Таблица 1

Значения числа тактов τ при n неизвестных параметрах канала и m каналов

m \ n	1	2	3	4	5
2	2	4	6	8	10
3	2	3	5	6	8
4	2	3	4	6	7
5	2	3	4	5	7

Из выражения (6) и табл. 1 видно, что при двух каналах ($m=2$) требуется $2n$ тактов и с возрастанием числа каналов m число тактов стремится к n, т.е. выигрыш в быстродействии при малых n от увеличения числа каналов отсутствует или незначительный и целесообразно ограничиться двумя каналами.

Особенностью динамических моделей измерительных каналов является отсутствие производных входного сигнала в описании в форме дифференциальных уравнений, соответственно операторов и нулей числителя в передаточной функции. Другая особенность состоит в том, что за счет вынесения в числитель коэффициента усиления на нулевой частоте свободный член знаменателя принимает значение единицы. Это позволяет строить систему без образцовых сигналов, но градуировка по коэффициенту усиления нужна.

Известно [5, 6], что многие измерительные преобразователи удовлетворительно описываются дифференциальными уравнениями для выходного сигнала (соответственно динамическими звеньями) 1-го и 2-го порядка.

Измерительные каналы с динамическими звеньями 1-го порядка. Передаточная функция звена 1-го порядка записывается в виде

$$\dot{H}(j\omega)=\frac{1}{1+ja_1}=\frac{1}{1+\omega^2 a_1^2}-j\frac{\omega a_1}{H\omega^2 a_1^2}=H_c(\omega)+jH_s(\omega). \tag{7}$$

Можем записать

$$|H(\omega)|^2=\frac{1}{1+\omega^2 a_1^2}, \quad H_c'(\omega)=1, \quad H_{1c}'(\omega)=-\omega a_1. \tag{8}$$

Для ПИС из двух каналов в соответствии с выражением (4) получим:

$$\begin{aligned} X_c(\omega)&=Y_{1c}(\omega)-Y_{1s}(\omega)\omega a_{11},\\ X_s(\omega)&=Y_{1s}(\omega)+Y_{1c}(\omega)\omega a_{11},\\ X_c(\omega)&=Y_{2c}(\omega)-Y_{2s}(\omega)\omega a_{21},\\ X_s(\omega)&=Y_{2s}(\omega)+Y_{2c}(\omega)\omega a_{21}. \end{aligned} \tag{9}$$

Переформатируем систему (9) к стандартной форме СЛАУ:

$$\begin{aligned} X_c(\omega)+Y_{1s}(\omega)\omega a_{11}&=Y_{1c}(\omega),\\ X_c(\omega)+Y_{2s}(\omega)\omega a_{21}&=Y_{2c}(\omega),\\ X_s(\omega)-Y_{1c}(\omega)\omega a_{11}&=Y_{1s}(\omega),\\ X_s(\omega)-Y_{2c}(\omega)\omega a_{21}&=Y_{2s}(\omega). \end{aligned} \tag{10}$$

Неизвестные $X_c(\omega)$, $X_s(\omega)$, a_{11}, a_{21}.

Расширенная матрица системы имеет вид:

$$\left|\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \omega Y_{1s}(\omega) & 0 & Y_{1c}(\omega)\\ 1 & 0 & 0 & \omega Y_{2s}(\omega) & Y_{2c}(\omega)\\ 0 & 1 & -\omega Y_{1c}(\omega) & 0 & Y_{1s}(\omega)\\ 0 & 1 & 0 & -\omega Y_{2c}(\omega) & Y_{2s}(\omega) \end{array}\right|. \tag{11}$$

Легко написать выражения для всех неизвестных, которые мы не будем приводить из-за громоздкости. Для определения отдельно параметров звеньев a_{11} и a_{21} из системы уравнений меньшего (2-го) порядка достаточно из первого уравнения вычесть второе, а из третьего – четвертое. Получим:

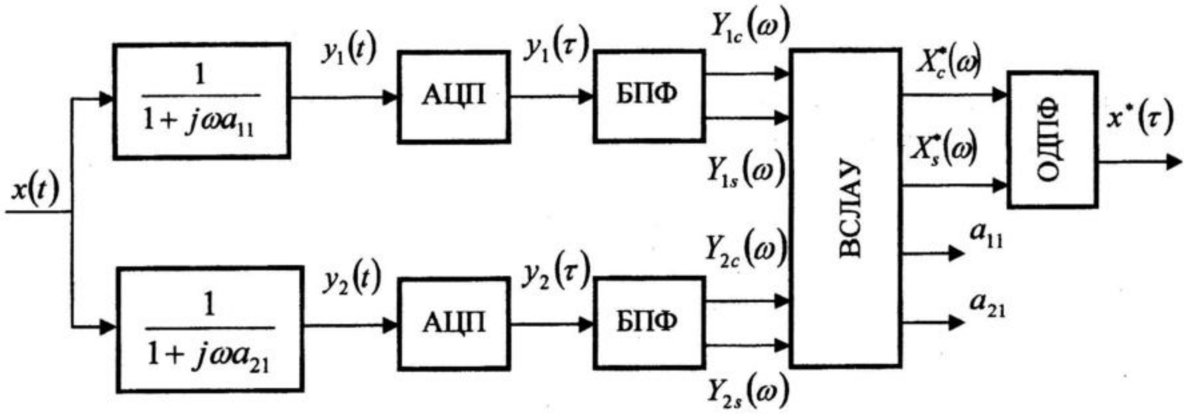
$$\begin{aligned} &\omega Y_{1s}(\omega)a_{11} - \omega Y_{2s}(\omega)a_{21} = Y_{1c}(\omega) - Y_{2c}(\omega), \\ &-\omega Y_{1c}(\omega)a_{11} + \omega Y_{2c}(\omega)a_{21} = Y_{1s}(\omega) - Y_{2s}(\omega). \end{aligned} \tag{12}$$

Для параметров звеньев получим

$$a_{11} = \frac{[Y_{1c}(\omega) - Y_{2c}(\omega)]Y_{2c}(\omega) + Y_{2s}(\omega)[Y_{1s}(\omega) - Y_{2s}(\omega)]}{\omega Y_{1c}(\omega)Y_{2c}(\omega) - \omega Y_{2s}(\omega)Y_{1c}(\omega)}, \tag{13}$$

$$a_{21} = \frac{[Y_{1s}(\omega) - Y_{2s}(\omega)]Y_{1s}(\omega) - Y_{1c}(\omega)[Y_{1c}(\omega) - Y_{2c}(\omega)]}{\omega Y_{1c}(\omega)Y_{2c}(\omega) - \omega Y_{2s}(\omega)Y_{1c}(\omega)}. \tag{14}$$

Структурно-функциональная схема ПИС с двумя измерительными каналами, эквивалентными инерционным звеньям 1-го порядка и спектральной обработкой сигнала представлена на рис. 2. Обозначения на рис. 2 аналогичны обозначениям на рис. 1.



Р и с. 2. Двухканальная измерительная ПИС с динамическими звеньями 1-го порядка и спектральной обработкой сигналов

Измерительные каналы с динамическими звеньями 2-го порядка. Передаточная функция звена 2-го порядка имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{H}(j\omega) &= \frac{1}{1 + j\omega a_1 + (j\omega)^2 a_2} = \frac{1}{(1 - \omega^2 a_2) + j\omega a_1} = \\ &= \frac{1 - a_2\omega^2}{(1 - a_2\omega^2)^2 - a_1^2\omega^2} - j\frac{a_1\omega}{(1 - a_2\omega^2)^2 - a_1^2\omega^2}. \end{aligned} \tag{15}$$

После преобразований, аналогичных проведенным выше, получим для двух каналов:

$$
\begin{aligned}
&X_c(\omega)+a_{12}\omega^2 Y_{1c}(\omega)+a_{11}\omega Y_{1s}(\omega)=Y_{1c}(\omega),\\
&X_c(\omega)+a_{22}\omega^2 Y_{2c}(\omega)+a_{21}\omega Y_{2s}(\omega)=Y_{2c}(\omega),\\
&X_s(\omega)+a_{12}\omega^2 Y_{1s}(\omega)-a_{11}\omega Y_{1c}(\omega)=Y_{1s}(\omega),\\
&X_s(\omega)+a_{22}\omega^2 Y_{2s}(\omega)-a_{21}\omega Y_{2c}(\omega)=Y_{2s}(\omega).
\end{aligned}
\qquad (16)
$$

Неизвестные $X_c(\omega)$, $X_s(\omega)$, a_{11}, a_{21}, a_{12}, a_{22}.

Необходимое расширение каналов получим, взяв значения на двух частотах ω_1 и ω_2. Получим восемь уравнений и восемь неизвестных $X_c(\omega_1)$, $X_s(\omega_1)$, $X_c(\omega_2)$, $X_s(\omega_2)$, a_{11}, a_{21}, a_{12}, a_{22}. Расширенная матрица такой СЛАУ будет иметь вид

$$
\left|\begin{array}{cccccccc|c}
1 & 0 & 0 & 0 & \omega_1^2 Y_{1c}(\omega_1) & 0 & \omega_1 Y_{1s}(\omega_1) & 0 & Y_{1c}(\omega_1)\\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_1^2 Y_{2c}(\omega_1) & 0 & \omega_1 Y_{2s}(\omega_1) & Y_{2c}(\omega_1)\\
0 & 1 & 0 & 0 & \omega_1^2 Y_{1s}(\omega_1) & 0 & -\omega_1 Y_{1c}(\omega_1) & 0 & Y_{1s}(\omega_1)\\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \omega_1^2 Y_{1s}(\omega_1) & 0 & -\omega_1 Y_{2c}(\omega_1) & Y_{2s}(\omega)\\
0 & 0 & 1 & 0 & \omega_2^2 Y_{1c}(\omega_2) & 0 & \omega_2 Y_{1s}(\omega_2) & 0 & Y_{1c}(\omega_2)\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \omega_2^2 Y_{2c}(\omega_2) & 0 & \omega_2 Y_{2s}(\omega_2) & Y_{2c}(\omega_2)\\
0 & 0 & 0 & 1 & \omega_2^2 Y_{1s}(\omega_2) & 0 & -\omega_2 Y_{2c}(\omega_2) & 0 & Y_{1s}(\omega_2)\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \omega_2^2 Y_{2s}(\omega_2) & 0 & -\omega_2 Y_{2c}(\omega_2) & Y_{2s}(\omega_2)
\end{array}\right|
\qquad (17)
$$

Определение только параметров передаточных функций каналов можно выполнить по четырем уравнениям на двух частотах ω_1 и ω_2 вида:

$$
\begin{aligned}
&-a_{12}\omega_i^2 Y_{1c}(\omega_i)+a_{22}\omega_i^2 Y_{2c}(\omega_i)-a_{11}\omega_i Y_{1s}(\omega_i)+a_{21}\omega_i Y_{2s}(\omega_i)=Y_{1c}(\omega_i)-Y_{2c}(\omega_i),\\
&-a_{12}\omega_i^2 Y_{1s}(\omega_i)+a_{22}\omega_i^2 Y_{2s}(\omega_i)+a_{11}\omega_i Y_{1c}(\omega_i)-a_{21}\omega_i Y_{2c}(\omega_i)=Y_{1s}(\omega_i)-Y_{2s}(\omega_i),
\end{aligned}
\qquad (18)
$$

где $i=\overline{1,2}$.

Измерительные каналы с динамическими звеньями *n*-го порядка. Передаточная функция звена *n*-го порядка имеет вид

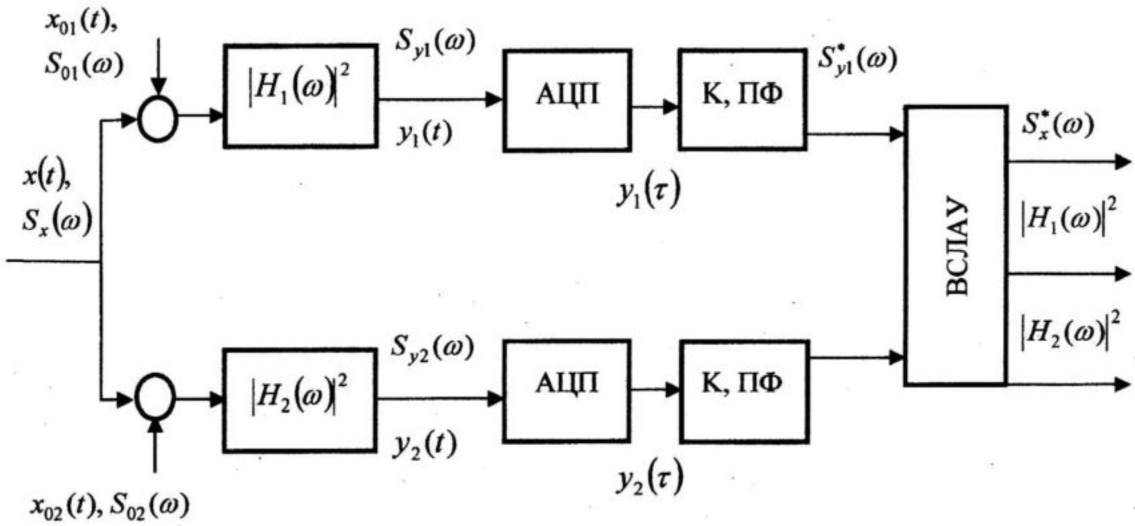
$$
\dot H(\omega)=\frac{1}{1+a_1 j\omega+a_2(j\omega)^2+\ldots+a_n(j\omega)^n}=\frac{1}{1+\sum\limits_{i_ч=2}^{n_ч}(-1)^{\frac{i_ч}{2}}a_{i_ч}\omega^{i_ч}+j\sum\limits_{i_{нч}=1}^{n_{нч}}(-1)^{\left(\frac{i-1}{2}\right)}a_{i_{нч}}\omega^{i_{нч}}}. \qquad (19)
$$

Проводя преобразования, аналогичные выше приведенным, получим для *k*-го канала $k=\overline{1,2}$

$$
\begin{aligned}
&X_c(\omega)-Y_{kc}(\omega)\sum_{i_ч=2}^{n_ч}(-1)^{\frac{i_ч}{2}}a_{ki_ч}\omega^{i_ч}+Y_{ks}(\omega)\sum_{i_{нч}=1}^{n_{нч}}(-1)^{\left(\frac{i_{нч}-1}{2}\right)}a_{ki_{нч}}\omega^{i_{нч}}=-Y_{kc}(\omega),\\
&X_s(\omega)-Y_{ks}(\omega)\sum_{i_ч=2}^{n_ч}(-1)^{\frac{i_ч}{2}}a_{ki_ч}\omega^{i_ч}+Y_{kc}(\omega)\sum_{i_{нч}=1}^{n_{нч}}(-1)^{\left(\frac{i_{нч}-1}{2}\right)}a_{ki_{нч}}\omega^{i_{нч}}=-Y_{ks}(\omega).
\end{aligned}
\qquad (20)
$$

В системе $2n+2$ неизвестных и 4 уравнения, введение новых m частот будет добавлять 2 новых неизвестных $X_c(\omega)$ и $X_s(\omega)$ и 4 уравнения, т.е должно быть $2n+2m=4m$ или $m=n$, при порядке системы $2(n+m)$. Аналогично выше приведенному, порядок системы может быть понижен до $2n$ при вычислении только параметров $\dot{H}_1(\omega)$ и $\dot{H}_2(\omega)$.

Восстановление характеристик случайных процессов. Структурно-функциональная схема прохождения случайных процессов через двухканальную измерительную ПИС показана на рис. 3.



Р и с. 3. Случайные процессы в двухканальной измерительной ПИС

Для случайных сигналов важны значения квадрата модулей передаточных функций $|H_1(\omega)|^2$ и $|H_2(\omega)|^2$, функции спектральной плотности $S^*_{y1}(\omega)$ и $S^*_{y2}(\omega)$ выходных сигналов вычисляются преобразованием Фурье (ФП) корреляционных функций. Характеристикой случайного сигнала $x(t)$ является функция спектральной плотности $S_x(\omega)$, после прохождения сигналом динамического канала с квадратом модуля передаточной функции $|H(\omega)|^2$ выходной сигнал $y(t)$ имеет функцию спектральной плотности

$$S_y(\omega)=|H(\omega)|^2 S_x(\omega) \tag{21}$$

или

$$S_x(\omega)=S_y(\omega)|H(\omega)|^{-2}.$$

Для двух сигналов с аддитивными к измеряемому образцовыми сигналами $X_{01}(t)$ и $X_{02}(t)$, имеющими известные ФСП $S_{y1}(\omega)$ и $S_{y2}(\omega)$, можем записать

$$\begin{aligned} S_x(\omega)-S_{y1}(\omega)|H_1(\omega)|^{-2}&=-S_{x01}(\omega),\\ S_x(\omega)-S_{y2}(\omega)|H_2(\omega)|^{-2}&=-S_{x02}(\omega) \end{aligned} \tag{22}$$

В качестве $S_{x0}(\omega)$ могут быть использованы внутренние шумы каналов, измеренные при отключении $x(t)$.

При произвольных $\dot{H}_1(j\omega)$ и $\dot{H}_2(j\omega)$ общее решение может быть получено через восстановление реализации $x(t)$, т.к. это показано выше.

Если известна или принята удовлетворительная модель $|H_1(\omega)|^2$ и известен ее порядок, то решение упрощается. Например, для измерительных звеньев первого порядка

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1+a_1^2\omega^2}, \tag{23}$$

второго порядка

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{(1-a_2\omega^2)^2 + a_1\omega^2}. \tag{24}$$

Можем записать по аналогии с выражением (10):

$$\begin{aligned} &S_x(\omega) - a_{11}^2\omega^2 S_{y1}(\omega) = S_{y1}(\omega), \\ &S_x(\omega) - a_{21}^2\omega^2 S_{y2}(\omega) = S_{y2}(\omega). \end{aligned} \tag{25}$$

Расширение системы уравнений получим за счет введения двух частот:

$$\begin{aligned} &S_x(\omega_1) - a_{11}^2\omega_1^2 S_{y1}(\omega_1) = S_{y1}(\omega_1), \\ &S_x(\omega_1) - a_{21}^2\omega_1^2 S_{y2}(\omega_1) = S_{y2}(\omega_1), \\ &S_x(\omega_2) - a_{11}^2\omega_2^2 S_{y1}(\omega_1) = S_{y1}(\omega_2), \\ &S_x(\omega_2) - a_{21}^2\omega_2^2 S_{y2}(\omega_1) = S_{y2}(\omega_2). \end{aligned} \tag{26}$$

Расширенная матрица для определения неизвестных $S_x(\omega_1)$, $S_x(\omega_2)$, a_{11}, a_{21} имеет вид

$$\left|\begin{matrix} 1 & 0 & -\omega_1^2 S_{y1}(\omega_1) & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\omega_1^2 S_{y2}(\omega_1) \\ 0 & 1 & -\omega_2^2 S_{y1}(\omega_2) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\omega_1^2 S_{y2}(\omega_1) \end{matrix}\right| \left|\begin{matrix} S_{y1}(\omega_1) \\ S_{y2}(\omega_1) \\ S_{y1}(\omega_2) \\ S_{y2}(\omega_2) \end{matrix}\right| \tag{27}$$

Для измерительных звеньев второго порядка по аналогии с (16)

$$|H(\omega)|^2 = (1-a_2\omega^2)^2 + a_1^2\omega^2 = 1 - 2a_2\omega^2 + a_2^2\omega^4 + a_1^2\omega^2. \tag{28}$$

Для ПИС из двух каналов по аналогии запишем, считая неизвестными a_{11}^2, a_{12}, a_{12}^2, a_{21}^2, a_{22}, a_{22}^2.

$$\begin{aligned}
&S_x(\omega_1) - a_{11}^2\omega_1^2 S_{y1}(\omega_1) + 2a_{12}\omega_1^2 S_{y1}(\omega_1) - a_{12}^2\omega_1^4 S_{y1}(\omega_1) = S_{y1}(\omega_1),\\
&S_x(\omega_1) - a_{21}^2\omega_1^2 S_{y2}(\omega_1) + 2a_{22}\omega_1^2 S_{y2}(\omega_1) - a_{12}^2\omega_1^4 S_{y2}(\omega_1) = S_{y2}(\omega_1),\\
&S_x(\omega_2) - a_{11}^2\omega_2^2 S_{y1}(\omega_1) + 2a_{12}\omega_2^2 S_{y1}(\omega_2) - a_{12}^2\omega_2^4 S_{y1}(\omega_2) = S_{y1}(\omega_2),\\
&S_x(\omega_2) - a_{21}^2\omega_2^2 S_{y2}(\omega_1) + 2a_{22}\omega_2^2 S_{y2}(\omega_1) - a_{12}^2\omega_2^4 S_{y2}(\omega_1) = S_{y2}(\omega_2).
\end{aligned} \tag{29}$$

Необходимое расширение системы до 12 уравнений получим для шести частот $\omega_i, i=\overline{1,6}$.

Можно уменьшить порядок системы в 2 раза, если исключить из неизвестных ФСП входного сигнала и определить параметры квадрата модуля передаточных функций каналов, а затем напрямую восстановить ФСП входных сигналов.

В этом случае СЛАУ будет иметь вид:

$$\begin{gathered}
a_{11}^2\omega_i^2 S_{y1}(\omega_i) + 2a_{12}\omega_i^2 S_{y1}(\omega_i) - a_{12}^2\omega_i^4 S_{y1}(\omega_i) + a_{21}\omega_i^2 S_{y2}(\omega_i) -\\
-2a_{22}\omega_i^2 S_{y2}(\omega_i) + a_{22}^2\omega_i^4 S_{y2}(\omega_i) = S_{y1}(\omega_i) - S_{y2}(\omega_i),\\
i=\overline{1,6}.
\end{gathered} \tag{30}$$

Заключение. Предложены частотные методы анализа и спектральные методы обработки сигналов в измерительных параметрически инвариантных системах.

Показано, что двухканальные системы мало уступают по быстродействию *n*-канальным и существенно проще их в реализации.

Дальнейшим исследованием измерительных ПИС может введение в систему шумов аддитивных и элиайзинга.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гайский В.А. Параметрические инвариантные системы с динамическими линейными измерительными преобразователями. – В кн. Приборостроение, вып. 23. СПИ. – Севастополь. – 1982.
2. *Гончаров Д.В.* Исследование измерительных параметрически инвариантных систем // Системы контроля окружающей среды. – Севастополь: МГИ НАН Украины, 1998. – С. 95 – 98.
3. *Основы* автоматического управления. Под ред. Пугачева В.С.: Издательство «Наука». Главная редакция физико-математическая литература, 1967. – 680 с.
4. *Мокин Б.И., Ткачук Б.Л.* Алгоритм обработки измерительной информации. Тезисы докладов IV Всесоюзного симпозиума «Проблемы создания преобразователей формы информации». Часть 1. (Киев, 18 – 20 ноября 1980). – С. 36 – 38.
5. *Изерман Р.* Цифровые системы управления: Пер. с англ. – М.: Мир, 1984. – 541 с.
6. *Азизов А.М., Гордов А.Н.* Точность измерительных преобразователей. – М.: «Энергия», 1975. – 256 с.