

**О ВЗАИМОСВЯЗИ ИНВАРИАНТОВ  
СПЕКТРАЛЬНЫХ ТЕНЗОРОВ  
ГРАДИЕНТНОЙ СКОРОСТИ  
ВЕТРОВЫХ ТЕЧЕНИЙ  
ПРИ РЕВЕРСИВНОМ  
ИЗМЕНЕНИИ НАКЛОНА УРОВНЯ**

*Н.Г. Хоролнич\**, *В.В. Фомин\*\*\**,  
*В.Н. Хоролнич\*\*\**

\*Морское отделение Украинского  
научно-исследовательского гидро-  
метеорологического института  
г. Севастополь, ул. Советская, 61  
Email: mb\_uhmi@stel.sebastopol.ua

\*\*Морской гидрофизический институт  
НАН Украины

г. Севастополь, ул. Капитанская, 2

\*\*\*Севастопольский национальный  
технический университет

г. Севастополь, Студгородок

*С помощью полуспектральной линейной модели получено обобщение задачи Экмана для прямолинейного шельфа с произвольным профилем дна и переменного поля ветра. Показано, что если временные изменения наклона уровня по нормали к берегу имеют преимущественно реверсивный характер, то имеет место подобие спектральных тензоров градиентной скорости ветровых течений, которое не зависит от тангенциального напряжения ветра, ширины и профиля дна шельфа.*

**Введение.** При анализе данных наблюдений за морскими течениями в силу их специфики обычно используется корреляционно-спектральная теория. Однако в настоящее время ее применение несколько затруднено отсутствием единого взгляда на физику поведения вектора скорости течений. Свидетельством этого является использование при обработке и вероятностном анализе скорости течений целого ряда методов. По мнению авторов векторно-алгебраического метода [1], их общим недостатком является игнорирование наиболее общих свойств физических векторов, вытекающих из аксиом алгебры евклидовых векторов. В результате выводы, полученные с помощью разных методов, оказываются несопоставимыми.

Так как изменчивость морских течений характеризуется, вообще говоря, заметной полициклическостью, то с этой точки зрения приоритет среди их вероятностных моделей

должны иметь спектральные гидродинамические модели. Однако к настоящему времени спектральная гидродинамическая теория морских течений пока еще не создана.

Существенные недостатки векторно-алгебраического метода с точки зрения возможности его использования для создания спектральной гидродинамической модели морских течений проявляются, в частности, уже при задании начальных условий. Однако в случае, если исследуемый процесс является случайным, данную проблему, в принципе, можно решить в частотной области. Ее решение намного упрощается, если при этом полуспектральную форму ее представления рассматривать в качестве некоторой промежуточной ступени [2 – 7].

Несмотря на то, что в настоящее время сравнение результатов спектрального анализа данных наблюдений за течениями с теорией весьма проблематично, данную проблему можно попытаться решить для некоторых хотя и простых, но довольно типичных ситуаций. Представляется целесообразным построение такой спектральной модели течений, которая позволила бы сравнить результаты расчетов, например, не со всеми, а лишь с некоторыми спектральными инвариантами вектора скорости течений или их соотношениями.

Известно, что ветровые течения на шельфе являются одним из наиболее изученных классов движений в море с точки зрения, как теории, так и обеспеченности данными наблюдений. По современным воззрениям [8, 9], основная роль в генерации течений на шельфе принадлежит атмосферным возмущениям, главным образом ветру. Это объясняется как спецификой их проявления на шельфе благодаря избирательному (резонансному) характеру реакции его вод на данные возмущения в определенном диапазоне периодов и длин волн, так и тем, что именно на данный диапазон обычно приходится и максимум их энергии. Данное свойство шельфа объясняется, прежде всего, такой важной с гидродинамической точки зрения морфометрической особенностью, как двухмерность значительных по протяженности его относительно прямолинейных участков.

Кроме того, если учесть, что в рамках линейной теории морских течений [3, 10] уже было предложено несколько полуспектральных моделей [2 – 7], то можно прийти

к выводу, что создание спектральной гидродинамической теории морских течений следует предварить разработкой именно полуспектральной теории ветровых течений на шельфе.

Так, в [6, 7], в частности, впервые было установлено, что если при переменном во времени поле ветра изменение наклона уровня по нормали к берегу имеет реверсивный характер, то ориентация соответствующего ему эллипса вращения результирующей градиентной скорости течений не зависит от характеристик аналогичного эллипса для тангенциального напряжения ветра. Однако в контексте затрагиваемых в [6, 7] проблем данный результат не анализировался.

Целью данной работы является исследование в рамках ранее разработанной полуспектральной теории ветровых течений для моря конечной глубины [3 – 7] свойств спектрального тензора градиентной скорости течений на прямолинейном шельфе с произвольным профилем дна при реверсивном изменении наклона уровня по нормали к берегу для субинерционных, инерционной и суперинерционных частот.

**Постановка задачи и ее решение.** Используются линейные уравнения движения, в которых учитываются силы вертикального трения, Кориолиса, трения на дне, а также наклоны свободной поверхности моря, обусловленные неравномерностью поля ветра, влиянием берега и рельефа дна.

Начало декартовых координат расположено на невозмущенной поверхности моря. Горизонтальные оси координат  $Ox$  и  $Oy$  направлены соответственно вдоль берега и в сторону моря, а вертикальная ось  $Oz$  – вниз, система координат – правая. Уравнения движения для вязкой однородной жидкости и граничные условия на поверхности и на дне в линейном приближении запишем в комплексном виде [3 – 7]:

$$-\frac{\partial W}{\partial t} + A \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} - i f W = G, \quad (1)$$

$$A \frac{\partial W}{\partial z} \Big|_{z=0} = -\frac{\tau}{\rho}, \quad W|_{z=H}=0, \quad (2)$$

где

$$W = u + iv, \quad \tau = \tau_x + i\tau_y, \quad G = -g \left( \frac{\partial \zeta}{\partial x} + i \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right). \quad (3)$$

В соотношениях (1) – (3):  $W$ ,  $u$ ,  $v$  – скорость течения и ее составляющие соответственно вдоль декартовых осей координат  $Ox$  и  $Oy$ ;  $t$  – время;  $A$  – кинематический коэффициент вертикального турбулентного обмена;  $f = 2\Omega_r \sin \varphi_r$  – параметр Кориолиса (здесь  $\Omega_r$  – угловая скорость вращения Земли,  $\varphi_r$  – широта места,  $f > 0$  в северном полушарии);  $g$  – ускорение силы тяжести;  $\zeta$  – уровень (отклонение поверхности моря от невозмущенного горизонтального положения  $z = 0$ );  $\rho = \text{const}$  – плотность морской воды;  $\tau$ ,  $\tau_x$ ,  $\tau_y$  – тангенциальное напряжение трения и его составляющие соответственно вдоль осей координат  $Ox$  и  $Oy$  на поверхности моря;  $H = H(y)$  – глубина места.

Так как в задаче рассматриваются непрерывные стационарные процессы с нулевыми средними значениями, то выражение для  $W(t)$ , а также для других аналогичных переменных можно представить в следующем виде [4 – 7, 11] (здесь и далее аргументы  $x$ ,  $y$  и  $z$  с целью удобства записи опущены):

$$W = 0,5 \sum_{n=1}^{\infty} [W_n \exp(i\omega_n t) + W_{-n} \exp(-i\omega_n t)], \quad (4)$$

где  $W_{\pm n} = u_a \pm v_b + i(v_a \mp u_b)$ ,  $\omega_n$  – угловая частота,  $n$  – целые положительные числа ( $\omega_n > 0$ ),  $u_a$ ,  $u_b$ ,  $v_a$ ,  $v_b$  – коэффициенты Фурье составляющих скорости течений  $u$  и  $v$ , а индексы  $a$  и  $b$  – соответственно косинус- и синус-разложение по временной координате  $t$  (в дальнейшем для упрощения записи вместо индексов  $\pm n$  будут использоваться только их знаки).

В выбранной системе координат составляющие  $W_{\pm}$  вектора скорости  $W$  вращаются с угловыми частотами  $\omega_{\pm}$  ( $\omega_{\pm}$  в положительном (отрицательном) направлении, то есть против (по) часовой стрелки относительно оси  $Ox$ . При этом они описывают эллипс, большая ось которого образует с осью  $Ox$  угол, равный полусумме фазовых углов этих составляющих, а знак поляризации определяется знаком большей по модулю его составляющей  $W_{\pm}$  [1, 11].

Комплексные коэффициенты Фурье для вектора тангенциального напряжения ветра и наклона уровня имеют следующий вид (см. аналогию с (4)):

$$T_{\pm} = T_{\pm}^x + iT_{\pm}^y, \quad (5)$$

$$G_{\pm} = G_{\pm}^x + iG_{\pm}^y,$$

где

$$T_{\pm}^x = \tau_a^x \pm \tau_b^y, \quad T_{\pm}^y = \tau_a^y \mp \tau_b^x, \quad (6)$$

$$G_{\pm}^x = \frac{\partial \zeta_a}{\partial x} \pm \frac{\partial \zeta_b}{\partial y}, \quad G_{\pm}^y = \frac{\partial \zeta_a}{\partial y} \mp \frac{\partial \zeta_b}{\partial x},$$

$$W_{\pm} = (N_{\pm} - iqM_{\pm})(T_{\pm}^x + iT_{\pm}^y) + (B_{\pm} - iq\Lambda_{\pm})(G_{\pm}^x + iG_{\pm}^y), \quad (7)$$

где

$$N_{\pm} = \delta f_1 + \gamma f_2, \quad M_{\pm} = \delta f_2 - \gamma f_1, \quad B_{\pm} = gf_4 r / 2A a_{\pm}^2, \quad \Lambda_{\pm} = gf_3 / 2A a_{\pm}^2, \quad (8)$$

$$q = \text{sign}(f + \omega_{\pm}), \quad \delta = r(f_5 + f_6) / a_{\pm} A \rho, \quad \gamma = r(f_5 - f_6) / a_{\pm} A \rho, \quad f_1 = ch \eta_{\pm} \sin \eta_{\pm}, \quad f_2 = sh \eta_{\pm} \cos \eta_{\pm}, \\ f_3 = 1 - r(ch \theta_{\pm} \cos \eta_{\pm} + ch \eta_{\pm} \cos \theta_{\pm}), \quad f_4 = sh \theta_{\pm} \sin \eta_{\pm} + sh \eta_{\pm} \sin \theta_{\pm}, \quad f_5 = cha_{\pm} H \cos a_{\pm} H, \quad f_6 = sha_{\pm} H \sin a_{\pm} H, \\ r = 1 / (ch 2a_{\pm} H + \cos 2a_{\pm} H), \quad a_{\pm} = (|f + \omega_{\pm}| / 2A)^{1/2}, \quad \eta_{\pm} = a_{\pm} H (1 - z/H), \quad \theta_{\pm} = a_{\pm} H (1 + z/H),$$

### Анализ полученных результатов.

В [1] показано, что спектральные характеристики скорости течений, полученные в терминах метода "вращательных компонентов" [11], дают возможность, в принципе, получить основные инварианты соответствующего ему спектрального тензора.

Выражения для коэффициентов в (7) намного упрощаются [3], если их рассматривать с точки зрения поведения параметра  $H/d_{\pm}$  (где  $d_{\pm} = \pi/a_{\pm}$  – глубина "трения"). Так, при  $H > 2d_{\pm}$  чисто дрейфовое течение наблюдается только в поверхностном слое трения толщиной  $d_{\pm}$ , тогда как градиентное течение охватывает всю толщу воды, причем в слое от поверхности моря до верхней границы придонного слоя трения  $z = H - d_{\pm}$  оно практически геострофическое, а в при-

а  $\tau_a^x, \tau_b^x, \tau_a^y, \tau_b^y, \zeta_a, \zeta_b$  – коэффициенты Фурье ортогональных составляющих вектора тангенциального напряжения ветра  $\tau$  и отклонения уровня  $\zeta$  от  $z = 0$  по  $t$ .

Решение уравнения (1) с учетом (5) и граничных условий (2) будет иметь следующий вид [3–7]:

донном слое трения толщиной  $d_{\pm}$  – градиентное. Для двух типичных случаев – "глубокого" ( $H > 2d_{\pm}$ ) и "мелкого" ( $a_{\pm} H \rightarrow 0$ ) моря диапазоны углов ориентации эллипса вращения градиентной скорости течений можно сравнительно легко определить, используя для этого известные свойства поведения ее направления у дна и на верхней границе придонного слоя трения.

Рассмотрим поведение составляющих наклона уровня  $G_{\pm}^x + iG_{\pm}^y$  (см. (5) и (6)) на прямолинейном бесконечном шельфе с произвольным профилем дна в принятой системе координат. Ориентация эллипса наклона уровня совпадает с нормалью к берегу в том случае, если будет справедливо следующее соотношение:

$$\left( \frac{\partial \zeta_a}{\partial y} - \frac{\partial \zeta_b}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial \zeta_a}{\partial x} + \frac{\partial \zeta_b}{\partial y} \right)^{-1} = \left( \frac{\partial \zeta_a}{\partial y} + \frac{\partial \zeta_b}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial \zeta_b}{\partial y} - \frac{\partial \zeta_a}{\partial x} \right)^{-1}, \quad (9)$$

или, как это следует из (9), более простое соотношение:

$$\left( \frac{\partial \zeta_a}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial \zeta_b}{\partial x} \right)^{-1} = - \left( \frac{\partial \zeta_a}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial \zeta_b}{\partial y} \right)^{-1}. \quad (10)$$

Заметим, что в случае (10) изменения наклона уровня по нормали к шельфу, вообще говоря, не будут иметь реверсивный характер.

Однако из анализа выражений (5), (6) и (9) следует, что, строго говоря, для выполнения условия реверсивности для наклона уровня  $|G_{+}| = |G_{-}|$  необходимо и достаточно, чтобы  $\partial \zeta_a / \partial x = \partial \zeta_b / \partial x = 0$ . Нетрудно заме-

тить, что такие условия теоретически возможны на прямолинейном шельфе с произвольным профилем дна, когда вдольбереговыми изменениями наклона уровня можно, в принципе, пренебречь.

Тогда выражение для комплексного коэффициента уровня  $G_{\pm}$  (см. (5) и (6)) значительно упростится:

$$G_{\pm} \approx \pm \frac{\partial \zeta_b}{\partial y} + i \frac{\partial \zeta_a}{\partial y}. \quad (11)$$

Из совместного анализа уравнений (5), (6) и (9) следует, что независимо от типа ветрового воздействия (то есть для каждой из составляющих  $T_{\pm}$  или их суперпозиции) разнонаправлено вращающиеся состав-

ляющие градиентной скорости течений определяются одинаковыми по модулю и ориентированными симметрично относительно нормали к берегу соответствующими им составляющими наклона уровня. Следовательно, результирующее изменение наклона уровня в этом направлении имеет реверсивный характер. Поэтому выражение для определения ориентации эллипса градиентной скорости течений будет иметь следующий вид [6, 7]:

$$\alpha = (\pi - \Delta_+ - q\Delta_-)/2. \quad (12)$$

$$W_m^l = m_* r (N_l - iqM_l)(T_l^x + iT_l^y) + (B_m - iq\Lambda_m) \left( m \frac{\partial \zeta_{ha}}{\partial y} + i \frac{\partial \zeta_{aa}}{\partial y} \right), \quad (13)$$

где  $m = \text{sign}(m_*)$ ,  $m_* = \pm 1$ ,  $l = \text{sign}(l_*)$ ,  $l_* = \pm 1$ , а  $r = (m_* + l_*)/2$ .

При выполнении условий (9) эллипсы вращения для вектора градиентной скорости течений (1) будут подобными, так как для них, в соответствии с (12) и (13), коэффициент сжатия [12], ориентация, а также знак поляризации зависят только от коэффициентов градиентного дрейфа  $B_{\pm} - iq\Lambda_{\pm}$ . Следовательно, для данных эллипсов можно ввести критерий подобия  $K_e$  как суперпозицию скалярного  $\Theta K$  и векторного  $E = \cos\alpha + i\sin\alpha$  полей:

$$K_e \Rightarrow K_e(\Theta K, E), \quad (14)$$

где  $\Theta = \text{sign}(A_* - B_*)$ ,  $K = |A_* - B_*| / (A_* + B_*)$  – коэффициент сжатия эллипса ( $K \in [0, 1]$ ),  $A_* = |B_* - iq\Lambda_*| \sim |W_+^G|$ ,  $B_* = |B_* - iq\Lambda_*| \sim |W_-^G|$ , а  $W_{\pm}^G$  – составляющие градиентной скорости ветровых течений.

Таким образом, при реверсивном изменении наклона уровня в море подобие эллипсов градиентной скорости ветровых течений, вообще говоря, определяется только глубиной места, горизонтом, вязкостью, частотой, а также параметром Кориолиса.

В настоящее время возможность однозначного представления вектора скорости течений  $W$  в виде (1) не доказана ни теоретически, ни экспериментально [1]. С этой точки зрения представляет интерес результаты моделирования спектральных характеристик исследуемой скорости течений, полученные нами, по сути, с помощью метода “вращательных компонентов” [11], представить в тензорном виде, то есть в терминах векторно-алгебраического метода

где  $\Delta_{\pm}$  – угол между составляющей градиентной скорости течений и соответствующей ей составляющей наклона уровня  $G_{\pm}$  (в соответствии с (7)  $\Delta_{\pm} > 0$ ).

Таким образом, при выполнении условий (9) ориентация эллипса градиентной скорости течений не зависит от характеристик соответствующего ей эллипса тангенциального напряжения ветра  $T_{\pm}$  [6, 7]. В результате вместо уравнения (7) имеем следующее уравнение (см. (6)):

[1] и, следовательно, получить искомым критерий подобия как тензорный аналог вышеприведенного критерия подобия  $K_e$ .

Спектральный тензор  $S(\omega)$  (где  $\omega = |\omega_{\pm}|$ ) может быть представлен в матричной форме в виде суммы симметричной  $C(\omega)$  и кососимметричной  $A(\omega)$  его частей [1]:

$$S(\omega) = \begin{pmatrix} S_{uu} & S_{uv} \\ S_{vu} & S_{vv} \end{pmatrix} = C(\omega) + A(\omega), \quad (15)$$

где  $S_{uu}$ ,  $S_{vv}$  – автоспектры составляющих скорости течений  $u$  и  $v$ ,  $S_{uv}(\omega) = C_{uv} - iQ_{uv}$ ,  $S_{vu}(\omega) = C_{uv} + iQ_{uv}$ , а  $C_{uv}$ ,  $Q_{uv}$  – коспектр и квадратурный спектры соответственно.

Спектральный тензор  $S(\omega)$  в соответствии с (15) может быть полностью выражен через свои инварианты в следующем виде:

$$S(\omega) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} + 0,5D(\omega) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (16)$$

где  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  – собственные числа (главные оси) симметричного тензора  $C(\omega)$ , а  $D(\omega)$  – функция, имеющая смысл “индикатора вращения” [1]:

$$D(\omega) = S_{uv} - S_{vu} = -2iQ_{uv}. \quad (17)$$

Из анализа кинематики вектора градиентной скорости течений [11] следует, что

$$S_{uu} \sim A_*^2 + B_*^2 + 2A_*B_* \cos 2\alpha, \quad (18)$$

$$S_{vv} \sim A_*^2 + B_*^2 - 2A_*B_* \cos 2\alpha, \quad -Q_{uv} \sim A_*^2 - B_*^2.$$

Используя (18), найдем выражения для спектров левого  $S_+$  и правого  $S_-$  вращений:

$$S_+ \sim A_*^2 \sim I_1 + D, \quad S_- \sim B_*^2 \sim I_1 - D, \quad (19)$$

где  $I_1 = S_{uu} + S_{vv} = \lambda_1 + \lambda_2$  – линейный инвариант, а  $D = -2Q_{uv}$ .

Собственные числа  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  можно найти с помощью следующих соотношений:

$$S_{uu} = \lambda_1 \sim (A_* + B_*)^2, \quad S_{vv} = \lambda_2 \sim (A_* - B_*)^2. \quad (20)$$

Тогда для коэффициента сжатия  $K$  эллипса вращения градиентной скорости течений будет справедливо следующее простое соотношение:

$$K = \sqrt{\lambda_2 / \lambda_1}. \quad (21)$$

Выражение для “индикатора вращения”  $\mathbf{D}(\omega)$  в соответствии с (17) и (18) имеет следующий вид:

$$\mathbf{D}(\omega) \sim 2i(A_*^2 - B_*^2). \quad (22)$$

Тогда в результате анализа выражений (20) – (22) можно получить следующие соотношения для  $\mathbf{D}(\omega)$ :

$$\mathbf{D}(\omega) = 2i\Theta K \lambda_1 = 2i\Theta \sqrt{\lambda_1 \lambda_2} = 2i\Theta \sqrt{I_2}, \quad (23)$$

где  $I_2$  – квадратичный инвариант симметричной части тензора  $\mathbf{S}(\omega)$ , который в

$$\mathbf{S}(\omega) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} + \Theta \sqrt{\lambda_1 \lambda_2} i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \Theta \sqrt{\lambda_1 \lambda_2} i \\ -\Theta \sqrt{\lambda_1 \lambda_2} i & \lambda_2 \end{pmatrix}. \quad (26)$$

Нетрудно заметить, что детерминант матрицы спектрального тензора  $\mathbf{S}(\omega)$  в виде (26) равен нулю.

Учитывая, что  $I_1(\omega) \geq |\mathbf{D}(\omega)|$ , матрицу

$$\mathbf{S}^*(\omega) = \begin{pmatrix} (1 + K^2)^{-1} & 0 \\ 0 & K^2(1 + K^2)^{-1} \end{pmatrix} + \frac{\Theta K i}{1 + K^2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (27)$$

Следовательно, спектральный тензор  $\mathbf{S}^*(\omega)$  градиентной скорости течений является тензорным аналогом критерия подобия  $\mathbf{K}_e$  (см. (14)), поскольку содержит в себе, по сути, такие же его (эллипса) характеристики, что и  $\mathbf{K}_e$ . Заметим также, что инварианты тензора  $\mathbf{S}^*(\omega)$ , строго говоря, являются однозначными функциями одного и того же аргумента  $K = (\lambda_2 / \lambda_1)^{1/2}$  только в случае использования модели (4) для описания вектора исследуемой скорости течений.

данном случае совпадает с детерминантом матрицы тензора  $\mathbf{C}(\omega)$ :

$$I_2(\omega) = S_{uu}S_{vv} - C_{uv}^2. \quad (24)$$

Поскольку  $|S_{uv}|^2 \in [0, S_{uu}S_{vv}]$ , то  $S_{uu}S_{vv} - C_{uv}^2 \geq 0$  [1].

Итак, вместо выражений для “индикатора вращения”  $\mathbf{D}(\omega)$  и квадратурного спектра  $Q_{uv}(\omega)$  в (17) и (18) имеем следующие их выражения:

$$\mathbf{D}(\omega) = 2i\Theta \sqrt{S_{uu}S_{vv} - C_{uv}^2}, \quad (25)$$

$$Q_{uv}(\omega) = -\Theta \sqrt{S_{uu}S_{vv} - C_{uv}^2}.$$

Из анализа выражений (25) следует, в частности, что спектральный тензор  $\mathbf{S}(\omega)$  можно найти, не прибегая при этом непосредственно к вычислению квадратурного спектра  $Q_{uv}$ , и, кроме того, проверить как правомерность представления вектора скорости течений в виде (4), так и качество ее измерения и, следовательно, последующего статистического анализа.

Итак, вместо (16) имеем следующее выражение для спектрального тензора  $\mathbf{S}(\omega)$ :

тензора  $\mathbf{S}(\omega)$  в виде (26) для дальнейшего анализа следует пронормировать (делением ее элементов) на  $I_1(\omega)$ :

Действительно, если, например, спектральный тензор  $\mathbf{S}(\omega)$  получен не с помощью метода “вращательных компонентов” (см. (4)), то его достоверность с точки зрения данного метода может быть оценена с помощью тензорного критерия подобия  $\mathbf{K}_T(\omega) \equiv \mathbf{S}^*(\omega)$  только в случае справедливости следующих соотношений:

$$\lambda_1^* = (1 + K^2)^{-1}, \quad \lambda_2^* = K^2(1 + K^2)^{-1}, \quad (28)$$

$$|\mathbf{D}^*| = 2K(1 + K^2)^{-1}.$$

С другой стороны, если известен спектральный тензор  $S(\omega)$ , то с помощью соотношений (28) можно проверить правомерность использования модели (4) для описания скорости течений.

Далее, если скорость течений задана в виде (4), то нахождение спектрального тензора  $S(\omega)$  сводится, по сути, к нахождению соответствующих характеристик ее эллипса вращения. Поэтому в случае подобия спектральных тензоров  $S(\omega)$  достаточно ограничиться исследованием поведения только одного из его инвариантов или даже одного коэффициента сжатия эллипса  $K$ , а также его ориентации и поляризации.

Таким образом, с точки зрения метода "вращательных компонентов" тензорному критерию подобия  $K_T$  можно поставить в соответствие каждую из приведенных в (27) характеристик (а также соотношение  $K=(\lambda_2/\lambda_1)^{1/2}$ ) вместе с углом ориентации  $\alpha$  главной оси его симметричной части и параметром  $\Theta$  (см. аналогию с  $K_e$  в (14)). Хотя эти частные критерии подобия представляют собой уже не тензоры вида (27), тем не менее они в силу их, как уже было сказано выше, однозначной зависимости от коэффициента  $K$  могут быть использованы в качестве аналога тензорного критерия подобия  $K_T$ .

В силу специфики данной задачи наибольший интерес при анализе спектрального тензора  $S^*(\omega)$  представляет, пожалуй, исследование его индикатора вращения  $D^*(\omega) = 2\Theta Ki/(1+K^2)$ . Поэтому именно ему и было отдано предпочтение при установлении данного критерия подобия. Следовательно, тензорному критерию подобия  $K_T$  можно поставить в соответствие критерий подобия  $K_D$  как результат суперпозиции скалярного и векторного полей, характеризующихся соответственно параметром  $\Theta|D^*|$  и углом ориентации  $\alpha$  главной оси симметричной части  $K_T$ :

$$K_D \Rightarrow K_D(\Theta|D^*|, E). \quad (29)$$

Численные расчеты характеристик градиентной скорости течений были выполнены для относительной частоты  $\Omega = |\omega_x|/f$  ( $\Omega \in [0,024, 6]$ ,  $\Delta\Omega = 0,024$ ), глубины места  $H \in [2, 100]$  ( $\Delta H = \Delta z = 1+2$ ) м,  $\varphi_r = 45^\circ$  с.ш.,  $A = 0,01$  м<sup>2</sup>/с. При графической интерпретации их результатов на-

правление оси  $O\Omega$  совпадало с направлением оси  $Ox$ .

Вследствие сравнительно незначительной изменчивости углов ориентации составляющих градиентной скорости течений по вертикали анализ критерия подобия  $K_D$  для индикатора вращения  $D^*(\omega)$  предварим рассмотрением поведения углов ориентации  $\chi$  и  $\mu$  главной оси  $\lambda_1$  его симметричной части относительно оси  $Ox$  только для верхней и нижней (то есть у дна) границ придонного слоя трения соответственно. Так как при  $f > 0$  параметр  $\Theta < 0$ , то с целью упрощения анализа в дальнейшем будем иметь в виду поведение  $|K_D|$ .

На рисунке 1 с помощью изолиний  $H/d_{\pm}$ , равным 0,4 и 1, условно выделены отдельные области А, Б, В, Г и Д, для которых были определены диапазоны изменения указанных выше углов  $\chi$  и  $\mu$ . Заметим, что изолиния  $H/d_{\pm} = 0,4$  была выбрана лишь условно для лучшей наглядности при выделении зоны "мелкого" моря.

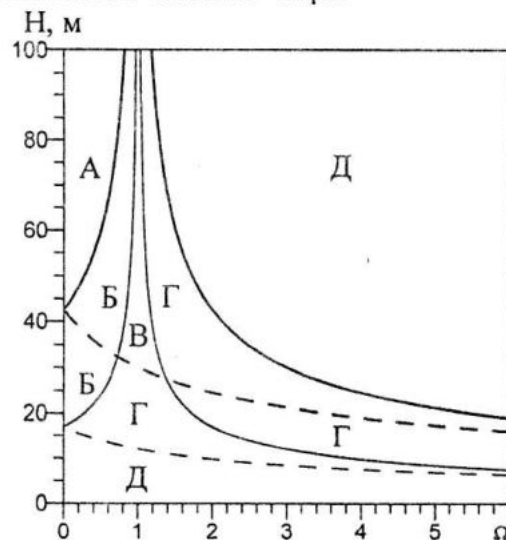


Рисунок 1 – Схема для определения углов ориентации главной оси  $\lambda_1$  симметричной части спектрального тензора градиентной скорости течений на верхней границе придонного слоя трения ( $\chi$ ) и у дна ( $\mu$ ) на шельфе: А)  $\chi = 0^\circ$ ,  $\mu = 45^\circ$ ; Б)  $0^\circ < \chi < 45^\circ$ ,  $45^\circ < \mu < 67^\circ,5$ ; В)  $\chi = 45^\circ$ ,  $\mu = 67^\circ,5$ ; Г)  $45^\circ < \chi < 90^\circ$ ,  $67^\circ,5 < \mu < 90^\circ$ ; Д)  $\chi = \mu = 90^\circ$ . *Примечание:* тонкие изолинии –  $H/d_{\pm} = 0,4$ , жирные изолинии –  $H/d_{\pm} = 1,0$ ,  $H/d_{\pm}$  – пунктирная,  $H/d_{\pm}$  – сплошная изолинии

Как и следовало ожидать, наименьшие диапазоны изменчивости анализируемых углов приходятся на области А, В и Д, где они практически постоянны, поскольку для

них выполняются условия “глубокого” и “мелкого” моря, а наибольшие – на остальные две области Б и Г.

Следовательно, с этой точки зрения области Б и Г характеризуются наибольшей изменчивостью градиентной скорости ветровых течений. Еще одним важным выводом является то, что для глубины, превышающей глубину трения, в поверхностном слое угол ориентации  $\chi$  главной оси  $\lambda_1$  для субинерционных (суперинерционных) час-

тот равен  $0^\circ$  ( $90^\circ$ ), так как для субинерционных частот она ориентирована вправо относительно результирующего наклона, а для суперинерционных – совпадает с ним.

Критерий подобия  $K_D$ , соответствующий индикатору вращения  $D^*(\omega)$ , на рисунке 2 представлен для указанных на нем горизонтов, а на рисунке 3 – в виде непрерывного распределения по вертикали только для характерных значений глубины  $H$ .

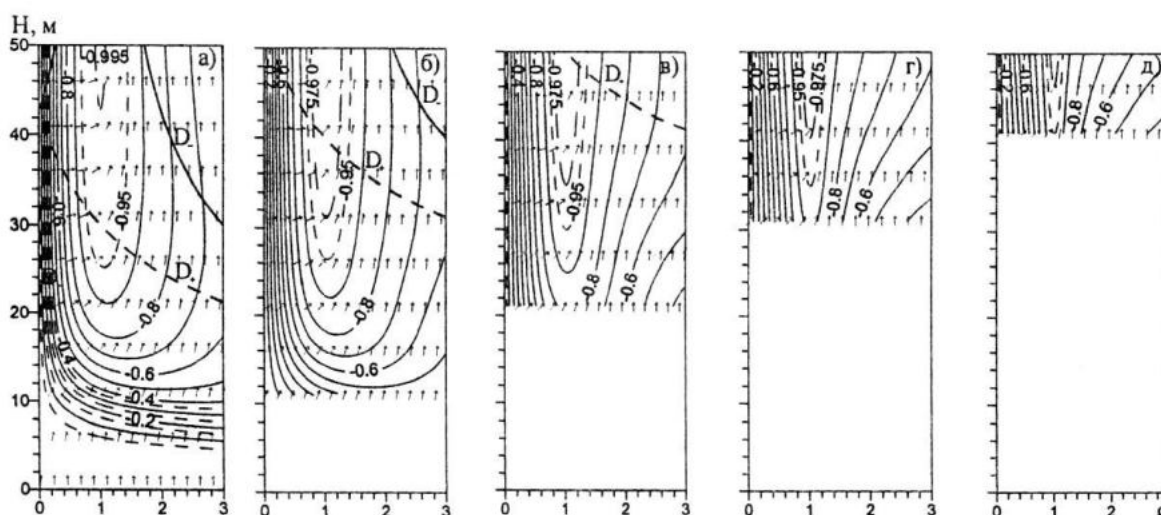


Рисунок 2 – Зависимость критерия подобия  $K_D$  спектральных тензоров градиентной скорости течений от относительной частоты  $\Omega$  и глубины  $H$  для горизонтов 0 (а), 10 (б), 20 (в), 30 (г) и 40 м (д). *Примечание:* изолинии  $D_{\pm}$  – глубина  $H = z + d_{\pm}$

На рисунке 2 направление оси глубины места  $H$  совпадает с направлением мнимой оси  $Oy$ . Отрицательный знак вертикальной координаты  $z$  на рисунке 3 принят условно (напомним, ось  $Oz$  направлена вертикально вниз), чтобы показать ее отличие от глубины  $H$ , которая может быть отождествлена с расстоянием от берега в случае наклонного дна. На данном рисунке мнимая ось  $Oy$  находится в его плоскости. На рисунках 2 и 3 в виде изолиний  $D_{\pm}$  приведено также положение верхней границы придонного слоя трения  $z = H - d_{\pm}$  (или  $H = z + d_{\pm}$ ) относительно соответствующей ему глубины  $H$  (горизонта  $z$ ). Кроме того, на рисунке 3 в виде изолиний  $S_{\pm}$  дополнительно приведено положение нижней границы поверхностного слоя трения  $z = d_{\pm}$ .

Как показал предварительный анализ, исследование зависимости критерия подобия  $|K_D|$  от определяющих его факторов за-

метно упрощается, если при этом рассмотреть его зависимость непосредственно от соотношения модулей коэффициентов градиентного дрейфа  $b = |B_- - iq\Lambda_-| / |B_+ - iq\Lambda_+|$ . Для параметра  $b$  в силу особенностей поведения модуля коэффициента  $B_- - iq\Lambda_-$  в исследуемой области (см. ниже), вообще говоря, выполняется строгое неравенство  $b > 1$ . Кроме того, было установлено, в частности, что на интервал  $b \in (1, 10]$  приходятся значительные изменения коэффициента сжатия  $K$  ( $K \in (0, 0,82)$ ) и, следовательно, модуля критерия подобия  $|K_D|$  ( $|K_D| \in (0, 0,98)$ ). Поэтому  $K$  и  $|K_D|$  определяются с большей точностью, если порядок определяющего их параметра  $b$  не более единицы. Другими словами, данные функции очень слабо реагируют на изменения  $b$  при  $b \geq 10$ .

В случае  $H > d_{\pm}$  симметрия относительно частоты  $\Omega = 1$  для  $\Omega \in (0, 2)$  только коэффициента  $B_- - iq\Lambda_-$  и сравнительно незна-

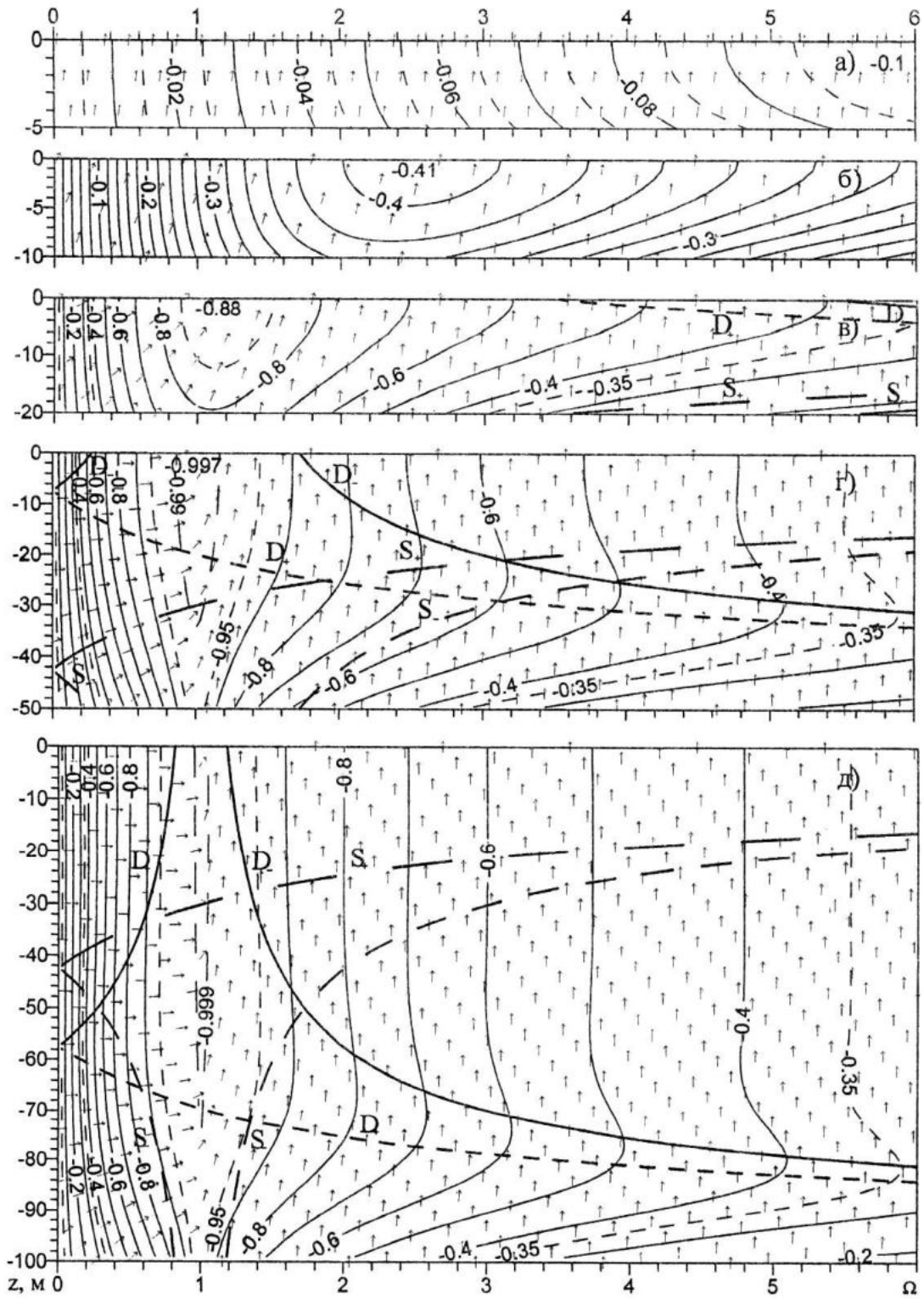


Рисунок 3 – Зависимость вертикального распределения критерия подобия  $K_D$  спектральных тензоров градиентной скорости течений от относительной частоты  $\Omega$  для  $H=5$  (а), 10 (б), 20 (в), 50 (г) и 100 м (д). *Примечание:* вспомогательные изолинии:  $D_+$ ,  $S_+$  – границы придонного ( $z=H-d_+$ ) и поверхностного ( $z=d_+$ ) слоев трения



чительная и к тому же монотонная зависимость его от частоты вне данного интервала, а также аналогичная зависимость от частоты во всем ее исследуемом диапазоне коэффициента  $B_+ - iq\Lambda_+$  является определяющим для поведения тензорного критерия подобия  $K_D$  не только в близинерционной области, но и в остальной части исследуемой области частот.

Следовательно, строгая симметрия изолиний данного критерия относительно инерционной частоты  $\Omega=1$  для  $\Omega \in (0, 2)$  невозможна. Тем не менее только при  $d \gg d_+$  ( $H \gg d_+$ )  $|K_D| \rightarrow 1$  и его изолинии будут практически симметричны относительно  $\Omega=1$  для  $\Omega \in (0, 2)$ , так как  $|B_- - iq\Lambda_-| \gg |B_+ - iq\Lambda_+|$ . Здесь следует отметить, что область частот  $\Omega > \Omega_*$  (где  $\Omega_* > 1$ ) более "глубоководная", чем область частот  $\Omega \in (1, \Omega_*)$ . Для субинерционных частот  $\Omega > \Omega_*$  (где  $\Omega_* > 0$ ) картина обратная.

Другой характерной особенностью модулей коэффициентов  $B_{\pm} - iq\Lambda_{\pm}$  является наличие в них максимума для частоты  $\Omega \neq 1$ , находящегося несколько ниже верхней границы придонного слоя трения. Благодаря этим максимумам характер изолиний критерия подобия  $|K_D|$ , начиная с некоторого промежуточного горизонта в интервале  $z \in (H - d_-, H - d_+]$ , заметно изменяется. Причем наиболее резко это происходит для  $\Omega \gg 1$ , что находит свое выражение в образовании в данном интервале горизонтов его максимумов для фиксированных частот. Однако в интервале частот  $\Omega \in (0, 2)$  они практически не прослеживаются.

Для глубины  $H \leq d_+$  близинерционная область наибольших значений критерия подобия  $|K_D|$  трансформируется, по сути, в аналогичную область. При уменьшении глубины  $H$ , начиная с  $H = d_+$ , условная вертикальная ось квазисимметрии изолиний данного критерия в близинерционной области частот, образуемая во всей толще воды инерционным максимумом, не только наклонена, но и смещена в направлении оси  $O\Omega$ . Что касается его максимумов, то они уменьшаются таким образом, что отношение частот, соответствующих им у поверхности и вблизи дна, увеличивается. Вследствие того, что монотонный характер распределения данных максимумов (их уменьшение), а также сужение их области вдоль данной оси сохраняются, аналогич-

ный характер распределения  $|K_D|$  по вертикали (для  $z \in [0, H)$ ) в интервале частот, нижней и верхней границами которого являются соответственно частоты его локальных максимумов у поверхности и вблизи дна, нарушается.

Вполне очевидно, что такое поведение критерия подобия  $K_D$  может быть объяснено только особенностями поведения коэффициентов  $B_{\pm} - iq\Lambda_{\pm}$  в исследуемой области. Действительно, как показал анализ, близинерционная область частот характеризуется слабо выраженным инерционным максимумом модуля коэффициента  $B_- - iq\Lambda_-$  и сравнительно более низкими значениями его градиента  $-\partial(|B_- - iq\Lambda_-|)/\partial\Omega$ , в отличие от находящейся справа от нее области частот с несколько повышенными их значениями, которая в свою очередь с увеличением частоты постепенно переходит в следующую область, где значения  $-\partial(|B_- - iq\Lambda_-|)/\partial\Omega$  снова уменьшаются (причем  $-\partial(|B_- - iq\Lambda_-|)/\partial\Omega \rightarrow 0$  при  $\Omega \rightarrow \infty$ ). Данным свойством частично обладает также модуль коэффициента  $B_+ - iq\Lambda_+$  при соответствующем сдвиге его аргумента  $\Omega$  вправо на  $\Delta\Omega = 2$ . Отсюда следует, что на начало второй области частот или, в крайнем случае, на ее границу с первой (близинерционной) областью должен приходиться локальный максимум  $|K_D|$ .

Таким образом, в рамках линейной теории ветровых течений в море удалось выявить причину трансформации близинерционной области критерия подобия  $|K_D|$  при уменьшении глубины  $H$ .

**Выводы.** Особенности колебаний градиентной скорости ветровых течений на шельфе при реверсивном изменении наклона уровня по нормали к берегу, в силу некоторой ограниченности используемого при ее моделировании волнового подхода, исследованы с точки зрения возможности их представления в виде спектрального тензора. Установлено, что коэффициент сжатия эллипса вращения ее результирующего вектора, а также его ориентация и знак поляризации не зависят от априорного задания поля тангенциального напряжения ветра и соответствующего ему наклона уровня по нормали к берегу.

Подобие спектральных тензоров анализируемой скорости ветровых течений доказано с помощью тензорного критерия подо-

бия на основе однозначной зависимости его характеристик от коэффициента сжатия, знака поляризации и ориентации соответствующих ему эллипсов вращения ее результирующего вектора.

Отмечены две области с наибольшей изменчивостью направления градиентной скорости ветровых течений.

В случае “глубокого” моря для модулей коэффициентов  $B_{\pm} - iq\Lambda_{\pm}$ , кроме инерционного максимума для модуля коэффициента  $B_{-} - iq\Lambda_{-}$ , характерно наличие несколько ниже верхней границы соответствующих им придонных слоев трения максимума, что обуславливает здесь максимум тензорного критерия подобия  $|K_D|$ .

В случае “мелкого” моря вертикальная ось квазисимметрии изолиний тензорного критерия подобия в близинерционной области частот не только смещается, но и наклоняется в направлении суперинерционных частот. Такое его поведение обусловлено наличием справа от слабо выраженного инерционного максимума модуля коэффициента  $B_{-} - iq\Lambda_{-}$  области максимума его градиента  $-\partial(|B_{-} - iq\Lambda_{-}|)/\partial\omega$ . Поскольку данным свойством частично обладает также модуль коэффициента  $B_{+} - iq\Lambda_{+}$  при соответствующем сдвиге его аргумента  $\Omega$  вправо на  $\Delta\Omega = 2$ , то это и обуславливает здесь локальный максимум  $|K_D|$ .

Полученные результаты могут быть использованы, в частности, для идентификации морских течений, а также тестирования различных вычислительных схем, применяемых при моделировании ветровых течений на шельфе, поскольку без задания тангенциального напряжения ветра и интегрирования соответствующих ему дифференциальных уравнений для уровня, можно, в принципе, получить общее представление об особенностях поведения основных характеристик спектрального тензора градиентной скорости течений.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Бельшев А.П., Клеванцов Ю.П., Рожков И.А. Вероятностный анализ морских течений. – Л.: Гидрометеоздат, 1983. – 263 с.

2. Krauss W.A. A Semi-Spectral Model for the Computation of Mesoscale Processes in a

Stratified Channel of Variable Depth // Dtsch. Hydrogr. Z. – 1979. – 32, № 5. – P. 173 – 189.

3. Фельзенбаум А.И. К теории периодических течений // Проблемы теории океанич. течений: Экспресс-информ. – Киев: Наук. думка, 1966. – 4. – С. 5 – 23.

4. Хоролич Н.Г. Теоретическая модель по расчету временных спектров скоростей течений в однородном море конечной глубины // Деп. рукопись № 368гм-Д84. – ИЦ ВНИИГМИ-МЦД, 1984. – 38 с.

5. Хоролич Н.Г. Моделирование временных спектров скорости течений // Гидрометеорология и гидрохимия морей СССР. Т. 4. Черное море. Гидрометеорологические условия. – СПб.: Гидрометеоздат, 1991. – Вып.1. – С. 262 – 266.

6. Хоролич Н.Г., Ломакин П.Д., Хоролич В.Н. Полуспектральная модель генерации течений на шельфе взаимосвязанными полями ветра и атмосферного давления // Системы контроля окружающей среды: Сб. научн. тр. / НАН Украины, МГИ. – Севастополь, 2005. – С. 193 – 204.

7. Хоролич Н.Г., Ломакин П.Д., Хоролич В.Н. Полуспектральная модель генерации чисто дрейфового, бароградиентного и градиентного полных потоков в море взаимосвязанными полями ветра и атмосферного давления // Экологич. безопасность прибрежн. и шельф. зон и комплексн. использование ресурсов шельфа: Сб. научн. тр. – Севастополь: ЭКОСИ-Гидрофизика, 2005. – Вып. 13. – С. 303 – 321.

8. Brink K.H. Coastal-trapped waves and wind-driven currents over the continental shelf // Ann. Rev. Fluid Mech. – 1991. – 223. – P. 380 – 412.

9. Лаппо С.С. Среднемасштабные динамические процессы океана, возбуждаемые атмосферой. – М.: Наука, 1979. – 181 с.

10. Ekman V.W. On the influence of the Earth's rotation on ocean currents // Arkiv Mat., Astron., Fisik, Uppsal Stockholm. – 1905. – 2, № 11. – P. 11 – 53.

11. Gonella J.A. A rotary-component method for analyzing meteorological and oceanographic vector time series // Deep-Sea Res., 1972. – 19, №12. – P. 833 – 846.

12. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике. – М.: Наука, 1977. – 870 с.