

**ИССЛЕДОВАНИЕ ФОРМЫ  
ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ СПЕКТРОВ  
ИЗОТРОПНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ  
В РАВНОВЕСНОМ ИНТЕРВАЛЕ**

*В.Н. Хоролитч*

Севастопольский национальный  
технический университет  
г. Севастополь, Студгородок  
E-mail: is@sevntu.com.ua

*Рассматривается изотропное соленоидальное поле турбулентных скоростей применительно к области универсального равновесия. В рамках предположений, сформулированных Гейзенбергом и Вейцекером, получены новые выражения, описывающие трехмерный энергетический спектр и продольный и поперечный одномерные спектры энергии в равновесном интервале волновых чисел, в котором имеет место «колмогоровская автомодельность».*

Рассмотрим векторное изотропное поле турбулентных скоростей  $\vec{u}(\vec{x}, t) = [u_1(\vec{x}, t), u_2(\vec{x}, t), u_3(\vec{x}, t)]$ , где  $\vec{x} = [x_1, x_2, x_3]$ .

Как известно, основой для теоретических исследований изотропной турбулентности служит уравнение Кармана – Ховарта, которое в спектральной форме может быть записано следующим образом [1]:

$$\partial E(\chi, t) / \partial t = T(\chi, t) - D(\chi, t), \quad (1)$$

$$D(\chi, t) = 2\nu\chi^2 E(\chi, t), \quad (2)$$

$$T(\chi, t) = -8\pi\chi^3 F_3(\chi, t), \quad (3)$$

где  $\chi = |\vec{\chi}|$ ,  $\vec{\chi} = [\chi_1, \chi_2, \chi_3]$  – волновой вектор;  $E(\chi, t)$  – трехмерный спектр энергии поля  $\vec{u}(\vec{x}, t)$ ;  $F_3(\chi, t)$  – спектр 3-го порядка поля  $\vec{u}(\vec{x}, t)$ ;  $D(\chi, t)$  – спектр диссипации энергии;  $T(\chi, t)$  – функция, определяющая скорость изменения во времени спектральной плотности  $E(\chi, t)$  за счет инерционного переноса энергии по спектру волновых чисел.

Уравнение (1) описывает изменение во времени спектрального распределения энергии турбулентности. Интегрируя равенство (1), получим:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^\chi E(\chi, t) d\chi = -W(\chi, t) - \int_0^\chi D(\chi, t) d\chi, \quad (4)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_\chi^\infty E(\chi, t) d\chi = W(\chi, t) - \int_\chi^\infty D(\chi, t) d\chi, \quad (5)$$

$$W(\chi, t) = \int_\chi^\infty T(\chi, t) d\chi = - \int_0^\chi T(\chi, t) d\chi. \quad (6)$$

Для замыкания уравнений (4) – (6) необходимо выразить функцию  $W(\chi, t)$ , определяющую спектральный перенос энергии, через трехмерный спектр  $E(\chi, t)$ . Однако функция  $W(\chi, t)$  зависит от третьих моментов поля скорости  $\vec{u}(\vec{x}, t)$  и не может быть определена по спектру  $E(\chi, t)$ . Поэтому уравнения (4) – (6) следует дополнить некоторой гипотезой, позволяющей составить из значений функции  $E(\chi, t)$  и  $\chi$  выражение, представляющее собой приближение к неизвестной функции  $W(\chi, t)$ .

Анализ такого рода гипотез, выполненный в [1, 2], показывает, что наиболее предпочтительной является гипотеза Гейзенберга – Вейцекера.

В рамках предположений Гейзенберга и Вейцекера для функции  $W(\chi, t)$  можно выписать следующее выражение:

$$W(\chi, t) = 2\gamma_H \int_\chi^\infty \frac{E(\chi, t)}{\chi^3} d\chi \int_0^\chi \chi^2 E(\chi, t) d\chi, \quad (7)$$

где  $\gamma_H$  – безразмерная постоянная.

Формула (7) превращает уравнения (4) – (6) в уравнения с одной неизвестной функцией  $E(\chi, t)$ .

Далее перейдем к применению формул (4) – (7) для расчета трехмерного спектра энергии в интервале универсального равновесия, в котором имеет место «колмогоровская автомодельность» [1, 2]. Целесообразность такого перехода обусловлена следующими двумя обстоятельствами:

1. Исследование поведения спектра в равновесном интервале является достаточно простым с теоретической точки зрения, так как согласно общей теории Колмогорова, при больших числах Рейнольдса зависимостью от времени статистических характеристик в этом интервале можно пренебречь и перейти от функций  $E(\chi, t)$ ,  $D(\chi, t)$ ,  $T(\chi, t)$ ,  $W(\chi, t)$ , соответственно к функциям  $E(\chi)$ ,  $D(\chi)$ ,  $T(\chi)$ ,  $W(\chi)$ , а рассмотрение поля  $\vec{u}(\vec{x}, t)$  заменить рассмотрением поля  $\vec{u}(\vec{x}) = [u_1(\vec{x}), u_2(\vec{x}), u_3(\vec{x})]$ .

2. В области универсального равновесия функции  $W(\chi)$  и  $E(\chi)$  должны задаваться универсальными функциями, зави-

сящими от двух параметров: кинематической вязкости жидкости  $\nu$  и скорости диссипации турбулентной энергии  $\varepsilon$ ; поэтому предположение о возможности выражения функции  $W(\chi)$  через функцию  $E(\chi)$  здесь наиболее оправдано.

Как показано в [1], в интервале универсального равновесия общие спектральные уравнения (4) и (5) примут вид

$$W(\chi) + \int_0^x D(\chi) d\chi = \varepsilon, \quad W(\chi) = \int_x^\infty D(\chi) d\chi, \quad (8)$$

а для гипотезы Гейзенберга – Вейцекера (7) можно выписать формулу

$$W(\chi) = 2\gamma_H \int_x^\infty \sqrt{E(\chi)/\chi^3} d\chi \int_0^x \chi^2 E(\chi) d\chi. \quad (9)$$

Используя (8), (9), можно получить следующее выражение для трехмерного спектра  $E(\chi)$  [1, 2]:

$$E(\chi) = \left( \frac{8\varepsilon}{9\gamma_H} \right)^{2/3} \chi^{-5/3} \left( 1 + \frac{8\nu^3}{3\gamma_H^2 \varepsilon} \chi^4 \right)^{-4/3}. \quad (10)$$

Формула (10) справедлива для области универсального равновесия, соответствующей волновым числам  $\chi \gg \chi_{\max}^{(E)}$ . Волновому числу  $\chi_{\max}^{(E)}$ , отвечающему максимуму  $E_{\max} = E[\chi_{\max}^{(E)}]$  спектральной функции  $E(\chi)$ , соответствует масштаб  $L = 1/\chi_{\max}^{(E)}$ , который можно считать характерным масштабом турбулентности в целом.

Спектр  $E(\chi)$  может быть представлен в виде функции нормированной переменной  $\chi_r = \chi/\chi_\xi$ :

$$E(\chi_r) = C^{(E)} \varphi(\chi_r), \quad (11)$$

$$\varphi(x) = (8/9)^{2/3} x^{-5/3} \left( 1 + 8x^4/3 \right)^{-4/3}, \quad (12)$$

$$C^{(E)} = (\varepsilon\nu^5/\gamma_H^6)^{1/4}, \quad \chi_\xi = (\gamma_H^2 \varepsilon/\nu^3)^{1/4}. \quad (13)$$

Так как выражение (10) справедливо при  $\chi \gg \chi_{\max}^{(E)}$ , то выражение (11) справедливо для нормированных волновых чисел  $\chi_r \gg \chi_{r\max}^{(E)}$ , где  $\chi_{r\max}^{(E)} = \chi_{\max}^{(E)}/\chi_\xi$ .

Для инерционной области и области вязкого равновесия, характеризующихся волновыми числами  $\chi_{\max}^{(E)} \ll \chi \ll \chi_\xi$  (или  $\chi_{r\max}^{(E)} \ll \chi_r \ll 1$ ) и  $\chi \gg \chi_\xi$  (или  $\chi_r \gg 1$ ) соответственно, формула (12) примет вид

$$\varphi_u(x) = (8/9)^{2/3} x^{-5/3}, \quad \varphi_a(x) = x^{-7}/4. \quad (14)$$

На рисунке 1 представлены графики функций  $\varphi(x)$ ,  $\varphi_u(x)$ ,  $\varphi_a(x)$ .

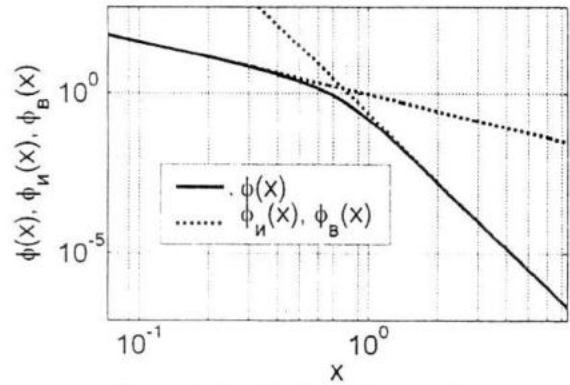


Рисунок 1 – Графики функций  $\varphi(x)$ ,  $\varphi_u(x)$ ,  $\varphi_a(x)$

Так как спектр  $E(\chi_r)$  представим в виде (11), то, предполагая, что рассматриваемое поле  $\vec{u}(\vec{x})$  является соленоидальным, в силу уравнений для связи между продольным и поперечным одномерными спектрами и трехмерным спектром, приведенных в [1], продольный и поперечный одномерные спектры могут быть представлены соответственно в следующем виде:

$$E_1(\chi_{1r}) = C^{(E)} \varphi_1(\chi_{1r}), \quad (15)$$

$$E_2(\chi_{1r}) = C^{(E)} \varphi_2(\chi_{1r}), \quad (16)$$

где функции  $\varphi_1(x)$ ,  $\varphi_2(x)$  и  $\varphi(x)$  связаны уравнениями

$$\varphi_1(x) = \int_x^\infty (1 - x^2/\zeta^2) \varphi(\zeta)/\zeta d\zeta, \quad (17)$$

$$\varphi_2(x) = \varphi_1(x)/2 - x\varphi_1'(x)/2, \quad (18)$$

$$\varphi(x) = x^2\varphi_1''(x)/2 - x\varphi_1'(x)/2. \quad (19)$$

Используя (12), (14), (17) – (19), можно получить выражения, описывающие продольный и поперечный одномерные спектры энергии в равновесном интервале, в инерционной области и в области вязкого равновесия:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= (x^{-7}/4) \times \\ &\times [F(7/4, 4/3, 11/4, -3x^{-4}/8)/7 - \\ &- F(9/4, 4/3, 13/4, -3x^{-4}/8)/9] \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \varphi_2(x) &= (x^{-7}/8) \times \\ &\times [F(7/4, 4/3, 11/4, -3x^{-4}/8)/7 + \\ &+ F(9/4, 4/3, 13/4, -3x^{-4}/8)/9] \end{aligned} \quad (21)$$

$$\varphi_{1u}(x) = \frac{8 \cdot 3^{2/3}}{55} x^{-5/3} = \frac{3}{4} \varphi_{2u}(x) = \frac{18}{55} \varphi_u(x), \quad (22)$$

$$\varphi_{2u}(x) = \frac{32 \cdot 3^{2/3}}{165} x^{-5/3} = \frac{4}{3} \varphi_{1u}(x) = \frac{24}{55} \varphi_u(x), \quad (23)$$

$$\varphi_{1a}(x) = x^{-7}/126 = \varphi_{2a}(x)/4 = 2\varphi_a(x)/63, \quad (24)$$

$$\varphi_{2a}(x) = 2x^{-7}/63 = 4\varphi_{1a}(x) = 8\varphi_a(x)/63, \quad (25)$$

где  $F(a, b, c, z)$  – гипергеометрическая функция [3, 4].

На рисунке 2 представлены графики функций  $\varphi_1(x)$ ,  $\varphi_2(x)$ .

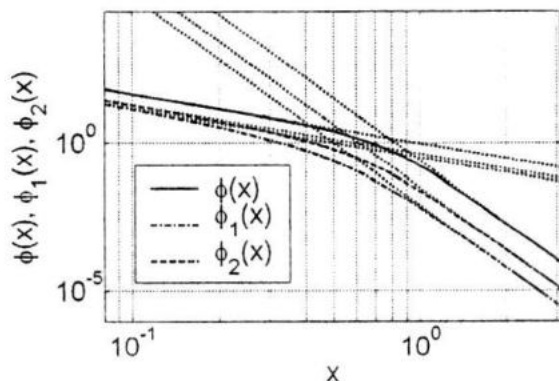


Рисунок 2 – Графики функций  $\varphi_1(x)$ ,  $\varphi_2(x)$

Таким образом, оказывается, что выражения для продольного и поперечного одномерных спектров, соответствующие трехмерному спектру (12), содержат в своем составе гипергеометрические функции. Наличие гипергеометрических функций в соответствующих выражениях, как правило, не приводит к затруднениям в ходе численных расчетов. Однако с точки зрения аналитических исследований наличие такого рода функций снижает физическую наглядность формул и может существенно усложнить процедуру анализа.

Исходя из вышесказанного, представляется необходимым аппроксимировать формулы (20) и (21) более простыми с точки зрения аналитических исследований и требований физической наглядности зависимостями. Сопоставление асимптотических особенностей (14), (22) и (24), (23) и (25) выражений (12), (20), (21) соответственно с точки зрения выражения (12) делает целесообразным исследование возможности аппроксимации функции  $\varphi_1(x)$ , определяемой уравнением (20), эмпирической формулой вида

$$\psi_1(x) = C_1 x^{C_2} \left(1 + C_3 x^{C_4}\right)^{C_5}, \quad (26)$$

где  $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5$  – некоторые вещественные константы.

Используя (22), (24), можно записать:

$$\begin{cases} \psi_{1u}(x) = C_1 x^{C_2} = 8 \cdot 3^{2/3} x^{-5/3}/55, \\ \psi_{1a}(x) = C_1 C_3^{C_5} x^{C_2 + C_4 C_5} = x^{-7}/126. \end{cases} \quad (27)$$

Следовательно, для функции  $\psi_1(x)$  справедлива эмпирическая формула

$$\psi_1(x) = C_{E,1}^{(1)} x^{-5/3} \left[1 + C_{E,1}^{(2)} x^{C_{E,1}^{(3)}}\right]^{C_E}, \quad (28)$$

$$C_{E,1}^{(1)} = 8 \cdot 3^{2/3}/55, \quad (29)$$

$$C_{E,1}^{(2)} = \left(55 \cdot 3^{1/3}/3024\right)^{1/C_E}, \quad (30)$$

$$C_{E,1}^{(3)} = -16/(3C_E), \quad (31)$$

где  $C_E$  – вещественная константа.

Очевидно, для инерционной области и области вязкого равновесия можно соответственно записать:

$$\psi_{1u}(x) = C_{E,1}^{(1)} x^{-5/3} = \varphi_{1u}(x), \quad (32)$$

$$\psi_{1a}(x) = C_{E,1}^{(1)} \left[C_{E,1}^{(2)}\right]^{C_E} x^{C_{E,1}^{(3)} C_E - 5/3} = \varphi_{1a}(x). \quad (33)$$

В соответствии с (18), (19) можно выписать следующие выражения, определяющие поперечный одномерный спектр и трехмерный спектр:

$$\begin{aligned} \psi_2(x) &= \psi_1(x)/2 - x\psi_1'(x)/2 = \\ &= \frac{4}{3} \frac{1 + 3C_{E,1}^{(2)} x^{C_{E,1}^{(3)}}}{1 + C_{E,1}^{(2)} x^{C_{E,1}^{(3)}}} \psi_1(x), \end{aligned} \quad (34)$$

$$\psi_{2u}(x) = 4\psi_{1u}(x)/3 = 4\varphi_{1u}(x)/3 = \varphi_{2u}(x), \quad (35)$$

$$\psi_{2a}(x) = 4\psi_{1a}(x) = 4\varphi_{1a}(x) = \varphi_{2a}(x), \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \psi(x) &= x^2 \psi_1''(x)/2 - x\psi_1'(x)/2 = \\ &= \frac{1}{18} \frac{\sum_{n=0}^2 \left[C_{E,1}^{(2)}\right]^n C_{E,1}^{(3)n} x^{nC_{E,1}^{(3)}}}{\left[1 + C_{E,1}^{(2)} x^{C_{E,1}^{(3)}}\right]^2} \psi_1(x), \end{aligned} \quad (37)$$

$$C_E^{(0)} = 55, C_E^{(1)} = 2 \left(183 + \frac{128}{C_E}\right), C_E^{(2)} = 567, \quad (38)$$

$$\psi_u(x) = \frac{55}{18} \psi_{1u}(x) = \frac{55}{18} \varphi_{1u}(x) = \varphi_u(x), \quad (39)$$

$$\psi_a(x) = \frac{C_E^{(2)}}{18} \psi_{1a}(x) = \frac{63}{2} \varphi_{1a}(x) = \varphi_a(x), \quad (40)$$

Для того чтобы функции  $\psi_1(x)$ ,  $\psi_2(x)$ ,  $\psi(x)$  определяли соответственно продольный одномерный, поперечный одномерный и трехмерный спектры рассматриваемого поля  $\vec{u}(\vec{x})$ , необходимо выполнение условия неотрицательности трехмерного спектра.

Применительно к равновесному интервалу это условие состоит в следующем:

$$\psi(x) \geq 0 \quad \forall x \in \{x: x \gg \chi_{r \max}^{(E)}\}. \quad (41)$$

Используя (37), (38), можно показать, что для выполнения условия (41) постоянная  $C_E$  должна удовлетворять ограничению

$$C_E \in (-\infty, -61/6 + \sqrt{385}/2] \cup (0, \infty). \quad (42)$$

Очевидно, существует такое значение константы  $C_E$ , удовлетворяющее условию (42), при котором функции  $\psi_1(x)$ ,  $\psi_2(x)$ ,  $\psi(x)$  наиболее точно аппроксимируют функции  $\varphi_1(x)$ ,  $\varphi_2(x)$ ,  $\varphi(x)$  соответственно.

Проведение нелинейной регрессии зависимости  $\varphi_1(x)$ , определяемой формулой (20), методом Левенберга-Маркуардта с использованием регрессионной модели, соответствующей выражению для  $\psi_1(x)$  (формула (28)), дает значение для константы  $C_E$ , равное  $C_E^{(E,1)} \approx -2,47$ .

Проводя аналогичным образом нелинейную регрессию для зависимостей  $\varphi_2(x)$  (формула (21)) и  $\varphi(x)$  (формула (12)) с использованием регрессионных моделей  $\psi_2(x)$  (формула (34)) и  $\psi(x)$  (формула (37)) соответственно, можно получить следующие значения для константы  $C_E$ :  $C_E^{(E,2)} \approx -2,53$ ,  $C_E^{(E)} \approx -2,55$ .

Все полученные значения для константы  $C_E$  находятся в рамках «степени приближенности» гипотез Колмогорова, Гейзенберга, Вейцекера к реальной действительности, так что в качестве значения для  $C_E$  можно положить любое из значений, лежащих на отрезке  $[C_E^{(E)}, C_E^{(E,1)}]$ .

С учетом специфики значений  $C_E^{(E,1)}$ ,  $C_E^{(E,2)}$ ,  $C_E^{(E)}$  представляется целесообразным положить  $C_E = -5/2$ . Тогда выражения для  $\psi_1(x)$ ,  $\psi_2(x)$ ,  $\psi(x)$  примут вид:

$$\psi_1(x) = C_{E,1}^{(1)} x^{-5/3} [1 + C_{E,1}^{(2)} x^{32/15}]^{-5/2}, \quad (43)$$

$$\psi_2(x) = \frac{4}{3} \frac{1 + 3C_{E,1}^{(2)} x^{32/15}}{1 + C_{E,1}^{(2)} x^{32/15}} \psi_1(x), \quad (44)$$

$$\psi(x) = \frac{1}{18} \frac{\sum_{n=0}^2 [C_{E,1}^{(2)}]^n C_E^{(n)} x^{32n/15}}{[1 + C_{E,1}^{(2)} x^{32/15}]^3} \psi_1(x), \quad (45)$$

$$C_{E,1}^{(1)} = 8 \cdot 3^{2/3} / 55, \quad C_{E,1}^{(2)} = 3^{16} (112/55)^2, \quad (46)$$

$$C_E^{(0)} = 55, \quad C_E^{(1)} = 1318/5, \quad C_E^{(2)} = 567, \quad (47)$$

На рисунке 3 представлены графики функций  $\psi_1(x)$ ,  $\psi_2(x)$ ,  $\psi(x)$  соответствующих формулам (43) – (47).

Асимптотическое поведение функций  $\varphi_1(x)$ ,  $\varphi_2(x)$ ,  $\varphi(x)$  и, соответственно, функций  $\psi_1(x)$ ,  $\psi_2(x)$ ,  $\psi(x)$  для инерционной области и области вязкого равновесия одинаково. Некоторое отличие имеется в интервале, соответствующем волновым числам, лежащим между указанными областями. В контексте такого различия необходимо заметить, что гипотеза Гейзенберга-Вейцекера, хотя и является качественно приемлемой, количественно соответствует лишь некоторому приближению к истинному положению вещей.

Вышесказанное позволяет предположить, что переход от функций  $\varphi_1(x)$ ,  $\varphi_2(x)$ ,  $\varphi(x)$  к функциям  $\psi_1(x)$ ,  $\psi_2(x)$ ,  $\psi(x)$  соответственно является допустимым в плане описания энергетических спектров векторного изотропного соленоидального поля турбулентных скоростей в интервале универсального равновесия.

Следует отметить, что совокупность функций  $\psi_1(x)$ ,  $\psi_2(x)$ ,  $\psi(x)$  выглядит привлекательнее соответствующей совокупности  $\varphi_1(x)$ ,  $\varphi_2(x)$ ,  $\varphi(x)$ , так как не содержит в своем составе обобщенных гипергеометрических функций.

Вместе с тем модель, даваемая функциями  $\psi_1(x)$ ,  $\psi_2(x)$ ,  $\psi(x)$ , не свободна от недостатка, связанного с громоздкостью выражения, соответствующего функции  $\psi(x)$ , по сравнению с выражением для  $\varphi(x)$ . Так, например, вычисление интеграла  $2 \int_{\infty}^{\infty} x^2 \varphi(x) dx$ , определяющего скорость переноса энергии по спектру волновых чисел, является достаточно простым, в то время как нахождение соответствующего интеграла  $2 \int_{\infty}^{\infty} x^2 \psi(x) dx$  представляет определенные трудности.

Обобщая сказанное, можно заключить, что, несмотря на то, что выражения  $\psi_1(x)$ ,  $\psi_2(x)$ ,  $\psi(x)$  физически более наглядны, чем выражения  $\varphi_1(x)$ ,  $\varphi_2(x)$ ,  $\varphi(x)$ , оконча-



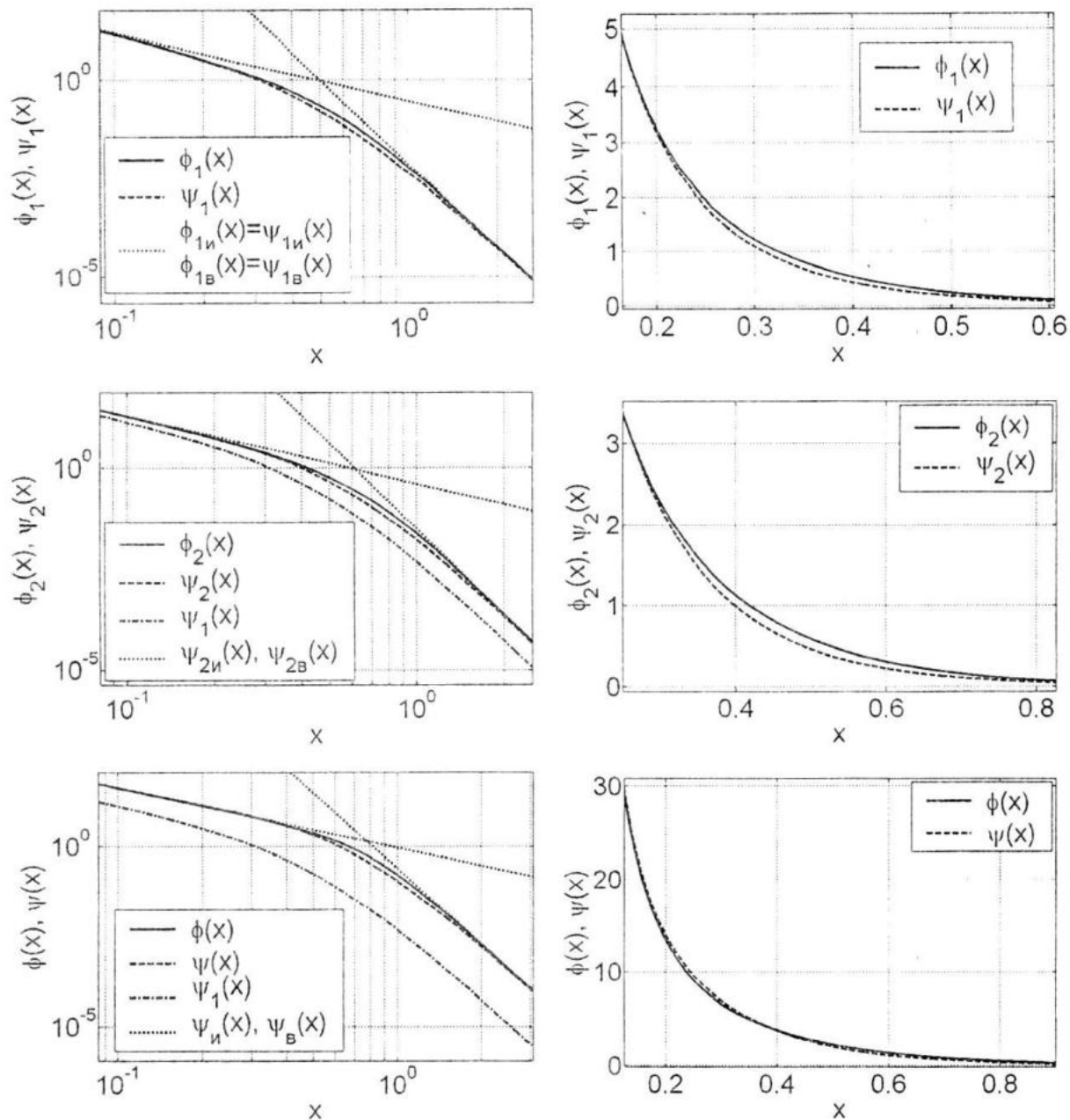


Рисунок 3 – Графики функций  $\psi_1(x)$ ,  $\psi_2(x)$ ,  $\psi(x)$

тельный выбор должен определяться характером соответствующих исследований.

Итак, в ходе теоретических исследований в рамках гипотез Колмогорова, Гейзенберга и Вейцекера получены новые выражения, описывающие спектральные характеристики изотропной турбулентности, которые обладают рядом преимуществ по сравнению с известными уравнениями. Дальнейшие исследования, по-видимому, следует направить на изучение спектров турбулентности во всем диапазоне волновых чисел, включающем область универсального равновесия.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Монин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидромеханика. Ч. 2. – М.: Наука, 1967. – 720 с.
2. Петровский В.С. Гидродинамические проблемы турбулентного шума. – Л.: Судостроение, 1966. – 252 с.
3. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. – М.: Наука, 1978. – 831 с.
4. Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. – М.: Наука, 1979. – 830 с.