ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ КОНЕЧНОЙ ЭЛЕКТРОПРОВОДИМОСТИ НА ПОВЕРХНОСТНЫЕ МГД-ВОЛНЫ В ГЛУБОКОВОДНОЙ МОРСКОЙ СРЕДЕ

А.И. Задорожный, М.Н. Гуров

Южный Федеральный университет
Россия, г. Ростов-на-Дону,
ул. Мильчакова, 8а
E-mail: simon@rsu.ru

В статье излагаются результаты асимптотического анализа и численных расчетов задачи о коротких прогрессивных волнах с учетом кинематической вязкости и конечной электрической проводимости морской среды.

Введение. Прикладная значимость теоретического изучения изменчивости магнитных полей (МП) морей и океанов аргументировано, с приложением обширного библиографического списка гидрофизической направленности очерчена в монографии [1]. В ней же рассмотрена не связанная задача о влиянии заданного поля скоростей поверхностных волн на флуктуации МП. В общем геофизическом плане одной из наиболее исследуемых задач является задача о геомагнитном кинематическом динамо, описываемым системой уравнений $\frac{\partial \overline{B}}{\partial t} = -\{\overline{V}, \overline{B}\} + +\eta \Delta \overline{B}$, $div\overline{B} = 0$ $\{\overline{V}, \overline{B}\} = -rot\{V \times B\}$, $\overline{B}$ – вектор магнитной индукции, $\eta = 1/Rm$ – безразмерная магнитная вязкость, Rm – магнитное число Рейнольдса, с известным полем скоростей $\overline{V}$ несжимаемой жидкости [2]. Постановка задачи, как видно, так же является не связанной (не самосогласованной). По поводу самосогласованных задач, в которых из полной системы уравнений магнитной гидродинамики (МГД) ищется как вектор индукции МП $\overline{B}$, так и поле скоростей $\overline{V}$, сказано, что они являются «гораздо менее разработанными». В теории гравитационных морских волн ситуация дополнительно усложняется наличием свободной поверхности (СП), являющейся границей раздела океана и атмосферы. Последняя традиционно трактуется как безграничная область вакуума или неионизированного газа. Возникает проблема «склеивания» на СП решения для области морской среды с решением для области «условной» атмосферы. Касаясь косвенного экологического аспекта магнитогидродинамических волновых задач, обратим внимание на раздел 3.2.10. «Аппараты для очистки воды от нефтепродуктов», в котором упоминаются и загрязненные поверхности акваторий, из монографии [3] (стр. 147–148). Следует отметить, что в самосогласованной постановке линейная задача о свободных гравитационных волнах в идеальной в МГД смысле жидкости (то есть лишенной внутреннего трения и имеющей нулевое электрическое сопротивление) решена в [4].

Постановка задачи. В настоящей статье рассматривается плоская линейная задача о собственных колебаниях тяжелой однородной несжимаемой жидкости бесконечной глубины, граничащей с вакуумом, что физически отвечает коротковолновому приближению. Среда обладает молекулярной (или турбулентной) вязкостью, а также конечной электрической проводимостью, то есть магнитной вязкостью и, следовательно, является диссипативной. На систему наложено стационарное горизонтальное магнитное поле постоянной напряженности $\overline{H_0} = (H_0, 0, 0)$, $H_0 = \text{const}$. Начало системы координат Oxy помещено на невозмущенной СП жидкости, ось Oz направлена вертикально вверх, а ось Ox по горизонтали.

Вектор напряженности МП, индуцированного движением электропроводящей жидкости в наложенном МП, обозначим через $\overline{h}(x,z,t)$, таким образом, $\overline{H}(x,z,t) = (H_0 + h_x, 0, h_z)$. Система МГД уравнений движения (импульсов), неразрывности, индукции и отсутствия магнитных зарядов в безразмерной форме имеет вид [4]:

$$\frac{\partial V_x}{\partial t}=-\frac{\partial p^*}{\partial x}+\frac{1}{Rg}\Delta V_x,\quad \frac{\partial V_z}{\partial t}=-\frac{\partial p^*}{\partial z}+\frac{1}{Rg}\Delta V_z+A\left(\frac{\partial h_z}{\partial x}-\frac{\partial h_x}{\partial z}\right),$$

$$\frac{\partial V_x}{\partial x}+\frac{\partial V_z}{\partial z}=0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial h_x}{\partial t}=\frac{\partial V_x}{\partial x}+\frac{1}{Rm}\Delta h_x,\quad \frac{\partial h_z}{\partial t}=\frac{\partial V_z}{\partial x}+\frac{1}{Rm}\Delta h_z,$$

$$\frac{\partial h_x}{\partial x}+\frac{\partial h_z}{\partial z}=0,$$

где $Rg=\frac{l\sqrt{gl}}{\nu}$ – гидродинамическое число Рейнольдса, $Rm=\frac{l\sqrt{\lg}}{\nu_m}$, $\nu_m=(\sigma_в\mu)^{-1}$ – магнитная вязкость, $\sigma_в$ – электрическая проводимость среды, μ – её магнитная проницаемость, совпадающая в МГД приближении с магнитной проницаемостью вакуума, $A=\frac{H_0}{g\rho l}$ – число Альфвена, p^* – гидродинамическое давление.

Во внешнем пространстве над свободной поверхностью, представляющем собой, как уже указывалось выше, вакуум или неионизированный газ, электрическое и магнитное поля должны удовлетворять уравнениям Максвелла в пренебрежении током смещения:

$$rot\overline{E_1}=-\frac{\partial\overline{B}}{\partial t},$$

$$div\overline{E_1}=0,\ div\overline{B_1}=0,\ rot\overline{H_1}=0,$$

где $\overline{E_1}$ – вектор напряженности электрического поля, $\overline{H_1}$ – вектор напряженности магнитного поля, $\overline{B_1}=\mu\overline{H_1}$ – вектор магнитной индукции, причем $\overline{H_1}=(H_0+h_{1x},0,h_{1z})$.

Сформулируем граничные условия. На СП, уравнение которой $z=\zeta(x,t)$ или в неявной форме $\Phi(x,z,t)=z-\zeta(x,t)=0$, должны выполнятся условия:

1) непрерывности нормальной компоненты тензора полных напряжений при переходе через границу раздела сред;

2) отсутствия вязких касательных напряжений на СП;

3) непрерывности касательной составляющей тензора магнитных напряжений, 4) отсутствия скачка нормальной составляющей МП ($\left[\overline{H_n}\right]=0$). Напомним определение тензора полных напряжений, называемого ещё тензором потока импульса

$$\Pi_{ij}=p_{ij}+T_{ij};\quad p_{ij}=-p\delta_{ij}+\tau_{ij},$$

где p_{ij} – тензор гидродинамических напряжений, $T_{ij}=\mu H_iH_j-\frac{\mu}{2}\overline{H^2}\delta_{ij}$ – тензор напряжений магнитного поля.

При переходе через границу раздела сред выполняются условия непрерывности нормальной компоненты тензора полных напряжений и касательной компоненты тензора магнитных напряжений:

$$\Pi_{nn}=\Pi_{1nn},\ T_{n\tau}=T_{1n\tau}\ \text{при}\ z=\zeta(x,t).$$

$$\Pi_{nn}=p_{nn}+T_{nn},\ p_{nn}=-p+2\nu\rho\frac{\partial V_z}{\partial z},$$

$T_{nn}=\mu H_n^2-\frac{1}{2}\mu H^2$, поскольку в линейной постановке $H_n=h_z-H_0\frac{\partial\zeta}{\partial x}$, а $H_\tau=H_0+h_x$, то в линеаризованной форме $T_{nn}=-\frac{\mu}{2}H_0^2-\mu H_0h_x$, а так как в силу исходной постановки задачи $H_0=H_{10}$, то первое граничное условие принимает вид

$$-p^{*}+\zeta+\frac{2}{Rg}\frac{\partial V_z}{\partial z}+A(h_{1x}-h_x)=0 \quad \text{при } z=0. \tag{2}$$

Обратимся к классическому условию отсутствия скачка $[H_n]=0$ (см. [4]). В размерных переменных оно имеет вид $h_{1z}-H_0\frac{\partial\zeta}{\partial x}=h_z-H_0\frac{\partial\zeta}{\partial x}$, а после перехода к безразмерным переменным и естественного упрощения получаем его окончательную форму

$$h_z=h_{1z} \text{ при } z=0. \tag{3}$$

Легко видеть, что условие непрерывности касательных компонент тензора магнитных напряжений не может быть полностью линеаризовано и записывается в следующем виде

$$\left(h_z-\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)(h_x-h_{1x})=0 \text{ при } z=0. \tag{4}$$

Разыскивая, как это принято в теории свободных колебаний, решения типа прогрессивных волн: $f_i=F_i(z)e^{\sigma t-ix}$, где функции $F_i(z)$ представляют собой соответствующие амплитудные функции искомых переменных, а сигма является искомым спектральным параметром, приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), вид которой мы не приводим, сводящейся после определенных преобразований к одному ОДУ шестого порядка, а именно:

$$\frac{1}{RmRg}\left(Z^{VI}-3Z^{IV}+3Z''-Z\right)-\left(\frac{\sigma}{Rm}+\frac{\sigma}{Rg}\right)\left(Z^{IV}-2Z''+Z\right)+\left(\sigma^2+A\right)\left(Z''-Z\right)=0. \tag{5}$$

Краевые условия преобразуются к виду:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{RmRg}\left(Z^{V}(0)-4Z'''(0)+3Z'(0)\right)-\frac{\sigma}{Rg}\left(Z'''(0)-3Z'(0)\right)\frac{1}{Rm}\Big\{\sigma\left[Z'''(0)-Z'(0)\right]+\\&\frac{1}{\sigma}\left[Z''(0)-Z(0)\right]\Big\}+\sigma^2Z'(0)+Z(0)+A\left[Z'(0)+Z(0)\right]=0,\end{aligned} \tag{6}$$

$$\frac{1}{Rm}\left(Z^{IV}(0)-Z(0)\right)-\sigma\left(Z''(0)+Z(0)\right)=0. \tag{7}$$

Из формулы (4) вытекает вывод о двойственном характере недостающего третьего краевого условия, на что обращено внимание в [5]. Двойственность означает выполнение условия

$$Z'(0)+Z(0)=0, \tag{8}$$

при отсутствии поверхностного тока. Заметим, что МГД аналог задачи Ламба с условием (8) для случая $Rg=\infty$ при произвольном Rm детально рассмотрен в статье [6]. Второй вариант условия таков:

$$Z''(0)-Z(0)=0 \tag{9}$$

при наличии скачка касательной составляющей индуцированного МП, равной плотности поверхностного тока j_y, распространяющегося в направлении оси Oy. Именно этот второй вариант будет предметом изучения в настоящей статье. Заметим, что в случае $Rg=+\infty$, когда единственным диссипативным фактором является магнитная вязкость, приводящая к рассеянию кинетической энергии в джоулево тепло, точное решение соответствующей краевой задачи, вытекающей из (5) – (7), (9), а именно:

$$\left(Z^{IV}-2Z''+Z\right)-Rm\left(\sigma+\frac{A}{\sigma}\right)\left(Z''-Z\right)=0,$$

$$-\frac{1}{Rm}\left\{\sigma\left[Z'''(0)-Z'(0)\right]+\frac{1}{\sigma}\left[Z''(0)-Z(0)\right]\right\}+\sigma^2 Z'(0)+Z(0)+A\left[Z'(0)+Z(0)\right]=0,$$

$$Z''(0)-Z(0)=0.$$

Мы учли тот факт, что обладающее лишь магнитной вязкостью среда не воспринимает механических касательных напряжений, а, значит, условие (7) является в данном случае лишним. Решение только что сформулированной задачи при условии затухания движения с глубиной представляется несколько парадоксальным для диссипативной среды. Нетрудно проверить, что единственные собственные числа дискретного спектра (поверхностных волн) имеют вид: $\sigma=\pm i\sqrt{1+2A}$, что соответствует спектру колебаний идеальной в МГД смысле жидкости. Объясняется этот факт тем, что переменный поверхностный ток плотности j_y в силу закона Лоренца создает переменную по направлению вертикальную силу, «раскачивающую» свободную поверхность. Тем не менее, диссипативный характер задачи проявляется на имеющих сплошной спектр внутренних волнах альфвеновского типа. При постановке на бесконечности вместо условия затухания более слабого условия ограниченности видно, что фундаментальная система решений содержит помимо функции e^z ещё пару функций $e^{\pm\lambda_a z}$, где $\lambda_a=\sqrt{1+Rm\left(\sigma+\dfrac{A}{\sigma}\right)}$ и при этом $\lambda_a=is$, $s\in R$ (ср. [7]). Решая соответствующее уравнение, найдем, что $\sigma_a=-\dfrac{1+s^2}{2Rm}\pm\sqrt{\dfrac{\left(1+s^2\right)^2}{4Rm^2}-A}$.

Указанный класс волн более сложным путем может быть получен предельным переходом при $D/\Lambda\to\infty$ ($D=\mathrm{const}$ – конечная глубина бассейна, Λ – длина волны) из МГД аналога класса так называемых вязких внутренних волн (ВВВ) в немагнитной жидкости, имеющих дискретный счетный спектр [8]. Сплошной спектр для случая произвольных Rg и Rm исследован в [9].

Асимптотический анализ задачи. Обратим внимание на тот факт, что в реальных условиях морской среды оба числа Рейнольдса велики: $Rg\gg 1$, $Rm\gg 1$. Авторам данной статьи не известны какие-либо результаты по сингулярно возмущенным задачам для ОДУ с двумя малыми параметрами при старшей производной. По этой причине ограничимся рассмотрением модельного примера, в котором $Rg=Rm$. Несмотря на понятную искусственность такого допущения, есть основания полагать, что полученные выводы будут обладать определенным физическим смыслом. Исключительно из желания избежать излишней громоздкости мы опускаем более общий вариант построения асимптотики на лучах $Rm=kRg$, $k=O(1)$. Для асимптотического анализа сформулированной задачи применим метод Вишика – Люстерника [10]. Введем малый параметр ε: $\dfrac{1}{Rg}=\dfrac{1}{Rm}=\dfrac{1}{R}=\varepsilon^2$. Тогда исходная краевая задача перепишется в следующем виде

$$\varepsilon^4\left(Z^{VI}-3Z^{IV}+3Z''-Z\right)-2\varepsilon^2\sigma\left(Z^{IV}-2Z''+Z\right)+\left(\sigma^2+A\right)\left(Z''-Z\right)=0. \qquad (10)$$

С краевыми условиями

$$\varepsilon^4\left\{Z^{V}(0)-4Z'''(0)+3Z'(0)\right\}-\sigma\varepsilon^2\left\{Z'''(0)-3Z'(0)\right\}- \qquad (11)$$

$$-\varepsilon^2\left\{\sigma\left[Z'''(0)-Z'(0)\right]+\frac{1}{\sigma}\left[Z''(0)-Z(0)\right]\right\}+\sigma^2 Z'(0)+Z(0)+A\left[Z'(0)+Z(0)\right]=0,$$

$$\varepsilon^2\left(Z^{IV}(0)-Z(0)\right)-\sigma\left(Z''(0)+Z(0)\right)=0, \tag{12}$$

$$Z''(0)-Z(0)=0. \tag{13}$$

При $z\to-\infty$ ставится условие затухания, то есть рассматривается только поверхностное волнение. Решение задачи будем разыскивать в виде: $Z(z,\varepsilon)=\overline{Z}(z,\varepsilon)+\Pi Z(\tau,\varepsilon)$, $\tau=\dfrac{z}{\varepsilon}$ – «растянутая» переменная, при этом $\overline{Z}(z)=Z_0(z)+\varepsilon Z_1(z)+\varepsilon^2 Z_2(z)+\ldots$ – функция, строящаяся с помощью первого итерационного процесса [5], представляющего собой процедуру теории регулярных возмущений. $\Pi Z(\tau,\varepsilon)=\Pi_0 Z(\tau)+\varepsilon\Pi_1 Z(\tau)+\varepsilon^2\Pi_2 Z(\tau)+\ldots$ – функция типа пограничного слоя, удовлетворяющая условию затухания $\Pi Z(\tau,\varepsilon)\to 0$ при $\tau\to-\infty$ и компенсирующая невязки в удовлетворении граничных условий, возникающие при реализации первого итерационного процесса. Ясно, что к числу компенсируемых условий относятся (6) и (8). Собственное число разыскивается в виде отрезка ряда

$$\sigma=\sigma_0+\varepsilon\sigma_1+\varepsilon^2\sigma_2+\ldots$$

Подготовим необходимые для дальнейшего разложения формулы:

$$\sigma^2=\left(\sigma_0+\varepsilon\sigma_1+\varepsilon^2\sigma_2\right)\cong\sigma_0^2+\varepsilon 2\sigma_0\sigma_1+\varepsilon^2\left(\sigma_1^2+2\sigma_0\sigma_1\right),$$

$$\frac{1}{\sigma}=\frac{1}{\left(\sigma_0+\varepsilon\sigma_1+\varepsilon^2\sigma_2\right)}=\frac{1}{\sigma_0\left(1+\varepsilon\dfrac{\sigma_1}{\sigma_0}+\varepsilon^2\dfrac{\sigma_2}{\sigma_0}\right)}=\frac{1}{\sigma_0}\left(1-\varepsilon\frac{\sigma_1}{\sigma_0}+\varepsilon^2\left(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_0^2}-\frac{\sigma_2}{\sigma_0}\right)\right).$$

В дальнейшем ограничимся разложениями с точностью до ε^2 включительно.

Рассматривая первый итерационный процесс, найдем с очевидностью, что $\overline{Z}(z)=\left(C_0+\varepsilon C_1++^2C_2+\ldots\right)e^z$, где C_1 – произвольные постоянные, а, следовательно, $\overline{Z}=Ce^z$ и это $\overline{Z}$ является «полным» решением для первого итерационного процесса. Выражение для σ_0 определим из решения вырожденной (при $\varepsilon=0$) задачи:

$$\sigma_0^2\overline{Z}'(0)+\overline{Z}(0)+A\left[\overline{Z}'(0)+\overline{Z}(0)\right]=0. \tag{14}$$

После подстановки $\overline{Z}=Ce^z$ в уравнение (3) получим, что $\sigma_0^2C+C+2AC=0$, и поскольку C отлично от нуля, то $\sigma_0=\pm i\sqrt{1+2A}$, что представляет собой безразмерную частоту колебаний идеальной в МГД смысле жидкости. Перейдем к построению пограничного слоя. Определяющее его ОДУ, как очевидно, записывается в виде

$$\left(\Pi Z^{VI}-3\varepsilon^2\Pi Z^{IV}+3\varepsilon^4\Pi Z''-\varepsilon^6\Pi Z\right)-2\left(\sigma_0+\varepsilon\sigma_1+\varepsilon^2\sigma_2\right)\left(\Pi Z^{IV}-2\varepsilon^2\Pi Z''+\varepsilon^4\Pi Z\right)$$
$$+\left(\sigma_0^2+A+\varepsilon 2\sigma_0\sigma_1+\varepsilon^2\left(\sigma_1^2+2\sigma_0\sigma_1\right)\right)\left(\Pi Z''-\varepsilon^2\Pi Z\right)=0.$$

Вид граничного условия (14) показывает, что $\Pi Z(\tau)$ следует разыскивать в виде: $\Pi Z(\tau)=\varepsilon^2\widetilde{\Pi}Z(\tau)$. Представляя теперь $\widetilde{\Pi}Z(\tau)$ формальным степенным рядом

$$\widetilde{\Pi}Z(\tau,\varepsilon)=\Pi_0 Z(\tau)+\varepsilon\Pi_1 Z(\tau)+\ldots+\varepsilon^2\Pi_2 Z(\tau)+\ldots,$$

для нулевого приближения, получается следующее уравнение:

$$\Pi Z_0^{VI}-2\sigma\Pi Z_0^{IV}+\left(\sigma_0^2+A\right)\Pi Z_0''=0,$$

характеристический полином которого имеет вид:

$$\lambda^2\left(\lambda^4 - 2\sigma_0\lambda^2 + \left(\sigma_0^2 + A\right)\right) = 0 .$$

Поскольку для функции типа погранслоя выполняется условие затухания, то нас интересует только два корня: $\lambda_p = \sqrt{\sigma_0 + i\sqrt{A}}$, $\lambda_m = \sqrt{\sigma_0 - i\sqrt{A}}$, при вычислении которых выбирается ветвь $\mathrm{Re}(\lambda_j) > 0$.

Тогда $\Pi Z_0(\tau) = D_1^0 e^{\lambda_p \tau} + D_2^0 e^{\lambda_m \tau}$. $Z = \overline{Z} + \Pi Z(\tau)$ должно удовлетворять погранслойным условиям (2) и (3), то есть

$$\frac{d^2\widetilde{\Pi}Z}{d\tau^2} - \varepsilon^2\widetilde{\Pi}Z = 0 \text{ при } \tau = 0,$$

$$\frac{d^4\widetilde{\Pi}Z}{d\tau^4} - \varepsilon^4\widetilde{\Pi}Z - \left(\sigma_0 + \varepsilon\sigma_1 + \varepsilon^2\sigma_2\right)\left[\frac{d^2\widetilde{\Pi}Z}{d\tau^2} - \varepsilon^2\widetilde{\Pi}Z\right] = 2\left(\sigma_0 + \varepsilon\sigma_1 + \varepsilon^2\sigma_2\right)C \text{ при } \tau = 0.$$

Собирая члены при ε^0 , получаем алгебраическую систему для нахождения D_1 и D_2 :

$$\lambda_p^2 D_1^0 + \lambda_m^2 D_2^0 = 0 ,$$

$$\lambda_p^2\left(\lambda_p^2 - \sigma\right)D_1^0 + \lambda_m^2\left(\lambda_m^2 - \sigma\right)D_2^0 = 2\sigma C .$$

Откуда, $$D_1^0 = -i\frac{\sigma}{\lambda_p^2\sqrt{A}}C , \quad D_2^0 = i\frac{\sigma}{\lambda_m^2\sqrt{A}}C .$$

Таким образом, построение решения в нулевом приближении завершено. Для построения последующих приближений обратимся к условию для нормальных напряжений:

$$\varepsilon\left[\frac{d^5\widetilde{\Pi}Z}{d\tau^5} - 4\varepsilon^2\frac{d^3\widetilde{\Pi}Z}{d\tau^3} + 3\varepsilon^4\frac{d\widetilde{\Pi}Z}{d\tau}\right] - 2\varepsilon\left(\sigma_0 + \varepsilon\sigma_1 + \varepsilon^2\sigma_2\right)\left[\frac{d^3\widetilde{\Pi}Z}{d\tau^3} - 2\varepsilon^2\frac{d\widetilde{\Pi}Z}{d\tau}\right] -$$

$$-\varepsilon^2\frac{1}{\sigma_0}\left(1 - \varepsilon\frac{\sigma_1}{\sigma_0} + \varepsilon^2\left(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_0^2} - \frac{\sigma_1}{\sigma_0}\right)\right)\left[\frac{d^2\widetilde{\Pi}Z}{d\tau^2} - \varepsilon^2\widetilde{\Pi}Z\right] +$$

$$+\varepsilon\left(\sigma_0^2 + \varepsilon 2\sigma_0\sigma_1 + \varepsilon^2\left(\sigma_0^2 + 2\sigma_0\sigma_1\right) + A\right)\frac{d\widetilde{\Pi}Z}{d\tau} + \varepsilon^2(1 + A)\widetilde{\Pi}Z + \varepsilon^2 2\left(\sigma_0 + \varepsilon\sigma_1 + \varepsilon^2\sigma_2\right)C +$$

$$+\left(\sigma_0^2 + 1 + 2A + \varepsilon 2\sigma_0\sigma_1 + \varepsilon^2\left(\sigma_0^2 + 2\sigma_0\sigma_2\right)\right)C = 0 \text{ при } \tau = 0.$$

С учетом того, что $\sigma_0^2 + 1 + 2A = 0$, условие для нормальных напряжений следует переписать в виде:

$$\frac{d^5\widetilde{\Pi}Z}{d\tau^5} - 4\varepsilon^2\frac{d^3\widetilde{\Pi}Z}{d\tau^3} + 3\varepsilon^4\frac{d\widetilde{\Pi}Z}{d\tau} - 2\left(\sigma_0 + \varepsilon\sigma_1 + \varepsilon^2\sigma_2\right)\left[\frac{d^3\widetilde{\Pi}Z}{d\tau^3} - 2\varepsilon^2\frac{d\widetilde{\Pi}Z}{d\tau}\right] -$$

$$-\varepsilon\frac{1}{\sigma_0}\left(1-\varepsilon\frac{\sigma_1}{\sigma_0}+\varepsilon^2\left(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_0^2}-\frac{\sigma_2}{\sigma_0}\right)\right)\left[\frac{d^2\tilde{\Pi}Z}{d\tau^2}-\varepsilon^2\tilde{\Pi}Z\right]+$$

$$+\left(\sigma_0^2+\varepsilon 2\sigma_0\sigma_1+\varepsilon^2\left(\sigma_1^2+2\sigma_0\sigma_1\right)+A\right)\frac{d\tilde{\Pi}Z}{d\tau}+\varepsilon(1+A)\tilde{\Pi}Z+\varepsilon 2\left(\sigma_0+\varepsilon\sigma_1+\varepsilon^2\sigma_2\right)C+$$

$$+\left(2\sigma_0\sigma_1+\varepsilon\left(\sigma_1^2+2\sigma_0\sigma_2\right)\right)C=0 \text{ при } \tau=0.$$

Подставляя в последнее соотношение $\Pi Z_0(\tau)$ и собирая члены порядка ε^0, получим:

$$\left\{\frac{d\Pi Z_0}{d\tau^5}-2\sigma_0\frac{d^3\Pi Z_0}{d\tau^3}+\left(\sigma_0^2+A\right)\frac{d\Pi Z_0}{d\tau}\right\}+2\sigma_0\sigma_1 C=0.$$

Выражение в фигурных скобках обращается в нуль в силу характеристического уравнения, а поэтому $2\sigma_0\sigma_1 C=0$, откуда следует, что $\sigma_1=0$. Далее, группируя члены порядка ε, придем к соотношению:

$$-\frac{1}{\sigma_0}\frac{d^2\Pi Z_0}{d\tau^2}+(1+A)\Pi Z_0+2\sigma_0\sigma_2 C+2\sigma_0 C=0. \qquad (15)$$

Поскольку уже удовлетворено условие $\left.\frac{d^2\Pi Z_0}{d\tau^2}\right|_{\tau=0}=0$, то из (15) вытекает алгебраическое соотношение для определения σ_2:

$$(1+A)\left\{-i\frac{\sqrt{1+2A}}{\sqrt{A}\left(\sqrt{1+2A}+\sqrt{A}\right)}+i\frac{\sqrt{1+2A}}{\sqrt{A}\left(\sqrt{1+2A}-\sqrt{A}\right)}\right\}C+i2\sqrt{1+2A}C=$$

$$=-i2\sqrt{1+2A}\sigma_2 C.$$

Совершенно очевидно, что $\sigma_2=-2$. Таким образом, в рамках выбранного порядка приближения пара собственных чисел, определяющих спектр поверхностной волны, задается асимптотической формулой

$$\sigma=\pm\sqrt{1+2A}-\frac{2}{R}+o\left(\frac{1}{R^2}\right).$$

Обратим внимание на то, что частота колебаний асимптотически совпадает с частотой колебаний идеальной жидкости, а декремент затухания не зависит от числа Альфвена, характеризующего величину напряженности МП. Более того, найденный декремент затухания совпадает с декрементом затухания для немагнитной жидкости в классической задаче Ламба [7].

Численное решение точного дисперсионного уравнения. Построенная асимптотика помимо того, что содержит информацию о поведении решения при весьма больших числах Рейнольдса, служит еще и достаточно хорошим начальным приближением для численного нахождения корней точного дисперсионного (частотного) уравнения. Его вывод не вызывает принципиальных затруднений. Характеристическое уравнение для исходного ОДУ (10) имеет вид

$$\left(\theta^2-1\right)\left(\left(\theta^2-1\right)^2-2\sigma R\left(\theta^2-1\right)+R^2\left(\sigma^2+A\right)\right)=0,$$

а общее решение представляется в форме:

$$Z(z) = Ce^{z} + C_p e^{\theta_p z} + C_m e^{\theta_m z}, \quad (16)$$

где $\theta_{p,m} = \sqrt{1 + R\left(\sigma \pm i\sqrt{A}\right)}$ и, естественно, $\operatorname{Re}\left(\theta_{p,m}\right) > 0$. Обычная процедура подстановки (16) в краевые условия (11) – (13) и приравнивания к нулю детерминанта полученной однородной алгебраической системы и приводит к точному уравнению частот, вид которого вследствие определенной громоздкости здесь не выписывается. Приведем лишь некоторые результаты численных расчетов, выполненных в широком диапазоне изменения чисел Рейнольдса $Rm = Rg = R$ для различных значений параметра A, характеризующего величину натяжения магнитных силовых линий, «вмороженных» в жидкую среду [4]. Графическая иллюстрация проведенных расчетов приведена на нижеследующих графиках.

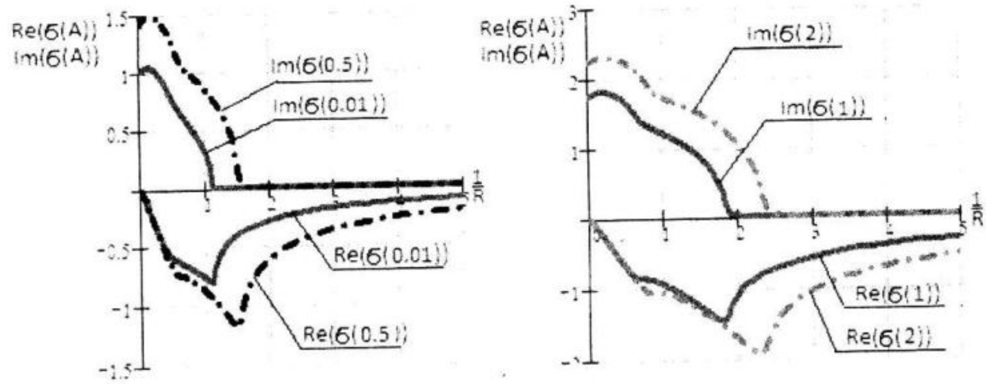

Рис. 1. Графики частоты и декремента затухания поверхностных волн в зависимости от безразмерной вязкости для различных напряженностей внешнего магнитного поля.

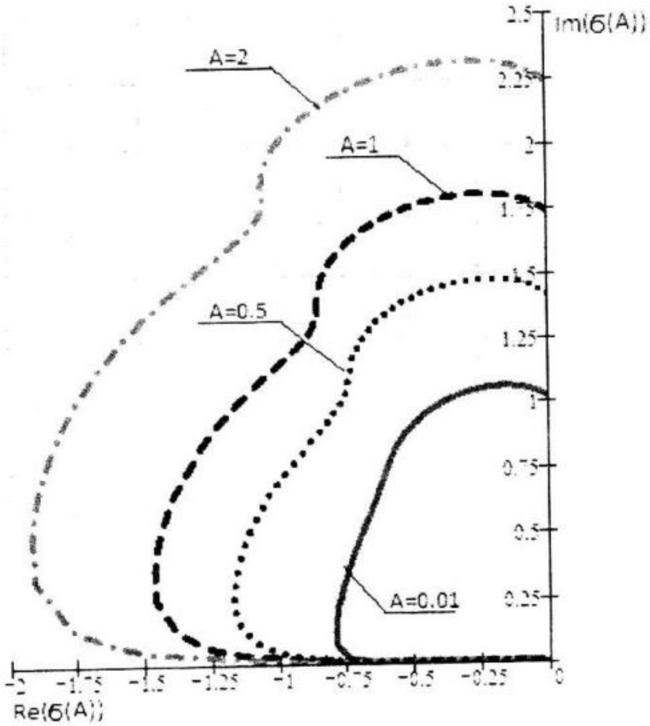

Рис. 2. Кривые зависимости частоты колебаний от декремента затухания для различных значений числа Альфвена А.

Заключение. Основные физические выводы, вытекающие из вышеизложенных аналитических и численных расчетов, состоят в следующем. Наличие двух вязкостей приводит к ангармоническому затуханию коротких поверхностных волн, при этом апериодические (монотонно затухающие) режимы, свойственные случаям малых Rg при $Rm = +\infty$ и малых Rm при $Rg = +\infty$ [6, 12] отсутствуют, что видно из рис. 1 и «фазового портрета» (рис. 2). Обращает на себя внимание факт наличия максимумов как частоты, так и декремента затухания. Видно, что выход на низкочастотные медленно затухающие колебания смещается в сторону малых чисел R, с ростом величины напряженности внешнего МП, то есть числа Альфвена.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Карнаушенко Н.Н.* Естественное электромагнитное поле морей и океанов в диапазоне сверхнизких частот. – Севастополь: МГИ НАН Украины, 2001. – 328 с.
2. *Арнольд В.И., Хесин Б.А.* Топологические методы в гидродинамике. – М.: МЦНМО, 2007. – 392 с.
3. *Баринов В.А., Тактаров Н.Г.* Математическое моделирование магнитогидродинамических поверхностных волн. – Саранск: Мордовский госуниверситет, 1991. – 96 с.
4. *Куликовский А.Г., Любимов Г.А.* Магнитная гидродинамика. – М.: ГИФМЛ, 1962. – 248 с.
5. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. – М.: ГИФМЛ, 1959. – 532 с.
6. *Задорожный А.И., Грунтфест Р.А.* // Собственные колебания жидкости конечной электропроводимости при наличии внешнего магнитного поля – Новосибирск: ПМТФ. – 2000. – Т. 41, № 2. – С. 3 – 10.
7. *Ламб Г.* Гидродинамика. – М., Л.: ГИТТЛ, 1947. – 928 с.
8. *Копачевский Н.Д., Крейн С.Г., Нго Зуй Кан.* Операторные методы в линейной гидродинамике. Эволюционные и спектральные задачи. – М.: Наука, ГРФМЛ, 1989. – 416 с.
9. *Задорожный А.И., Гуров М.Н.* Магнитогидродинамическая задача Ламба о волнах в вязкой жидкости конечной электропроводимости // Современные проблемы прикладной математики и математического моделирования: Материалы III Международной научной конференции, Ч.1. – Воронеж: «Научная книга», 2009. – С. 126 – 131.
10. *Вишик М.И., Люстерник Л.А.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // УМН – 1957. – т. 12:5(77). – С. 3 – 122.
11. *Моисеев Н.Н., Румянцев В.В.* Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. – М.: Наука, ГРФМЛ, 1965. – 440 с.
12. *Задорожный А.И.* Задача Ламба о волнах в вязкой жидкости бесконечной проводимости // Труды VI межвузовской конференции «Математическое моделирование и краевые задачи». Ч.2. Самара: СамГТУ, 1996. – С. 26 – 38.