ИДЕНТИФИКАЦИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ ТУРБУЛЕНТНОЙ ДИФФУЗИИ В МОДЕЛИ ПЕРЕНОСА ПАССИВНОЙ ПРИМЕСИ

С.В. Кочергин, В.С. Кочергин

Морской гидрофизический институт
НАН Украины
г. Севастополь, ул. Капитанская, 2
E-mail: ko4ep@mail.ru

Идентификация коэффициентов турбулентной диффузии осуществляется при помощи вариационного алгоритма усвоения данных измерений. В результате проведения одномерных тестовых расчетов восстановлены истинные значения коэффициентов турбулентной диффузии в модели переноса пассивной примеси.

Решение задач экологической направленности требует наличия моделей адекватно описывающих динамику изучаемого трассера в исследуемом водоеме. Качество таких моделей обуславливается не только точностью решения их дискретных аналогов, но и заданием входных параметров моделирования согласованных с имеющимися данными измерений. Если первая задача решается путем использования тех или иных разностных дискретизаций уравнений модели, то вторая проблема может быть решена на основе методов идентификации входных параметров модели. Для уравнения переноса пассивной примеси такими входными параметрами являются начальные данные, поле скорости и коэффициенты турбулентной диффузии. Рассмотрим алгоритм для идентификации таких коэффициентов, основанный на вариационных принципах и решении сопряженной задачи [1]. Аналогичный подход использовался в [2] для определения турбулентной вязкости в простейшей модели по данным с буйковой станции. В [3] произведены расчеты по идентификации постоянного коэффициента турбулентной диффузии. В данной работе кроме этого осуществляется поиск переменного по пространству коэффициента турбулентной диффузии.

Для лучшего понимания сути проблемы рассмотрим одномерный аналог уравнения переноса пассивной примеси. В области интегрирования D на интервале времени $\left[0,\bar{t}\right]$ в качестве модели рассмотрим одномерное уравнение:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+U\frac{\partial\varphi}{\partial x}=k\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\,,\qquad \begin{array}{l}\Gamma:\varphi=0\\ t=0:\varphi=\varphi_0\end{array}, \quad (1)$$

где U=const, k=const, Г-граница области интегрирования.

Пусть на момент времени $\bar{t}$ имеются данные измерений о поле концентрации $\varphi_{изм}$, тогда задача идентификации параметров модели (1) состоит в нахождении минимума функционала:

$$I_0(\varphi)=\frac{1}{2}\left(\varphi-\varphi_{изм},\varphi-\varphi_{изм}\right)_{D_t}, \quad (2)$$

где скалярное произведение определено следующим образом:

$$\begin{aligned}(\varphi,\varphi^*)_{D_t}&=\int_{D_t}\varphi\cdot\varphi^*\,dD_t=\\ &=\int_0^t\int_{D_t}\varphi\cdot\varphi^*\,dDdt\end{aligned}. \quad (3)$$

Минимизация квадратичного функционала (2) осуществляется при условии, что φ является решением модели (1). Поэтому, поиск минимума (2) при ограничениях (1) эквивалентно минимизации следующего функционала:

$$\begin{aligned}I(\varphi)=I_0(\varphi)&+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+U\frac{\partial\varphi}{\partial x}-k\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2},\varphi^*\right)+\\ &+(\varphi,\varphi^*)_{\Gamma_t}-(\varphi-\varphi_0,\varphi^*)_D\big|_{t=0}.\end{aligned} \quad (4)$$

Следуя [1] выбираем множители Лагранжа как решение сопряженной задачи:

$$\begin{aligned}&-\frac{\partial\varphi^*}{\partial t}-U\frac{\partial\varphi^*}{\partial x}-k\frac{\partial^2\varphi^*}{\partial x^2}=0,\\ &\Gamma:\varphi^*=0,\\ &t=\bar{t}:\varphi^*=\nabla I_0(\varphi).\end{aligned} \quad (5)$$

В случае идентификации начальных данных, из условия стационарности функционала имеем:

$$\nabla\varphi_0 I(\varphi)=\varphi^*\big|_{t=0}. \quad (6)$$

С некоторым итерационным параметром τ необходимо осуществлять спуск в пространстве параметров в направлении этого градиента:

$$\varphi_0^{n+1} = \varphi_0^n + \tau \nabla \varphi_0 I(\varphi). \qquad (7)$$

Идентификация коэффициента турбулентной вязкости осуществляется при помощи следующего итерационного процесса:

$$\nabla_k I(\varphi) = \int_0^T \int_0^X \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \varphi^*}{\partial x} dx dt, \qquad (8)$$

$$k^{n+1} = k^n + \tau \nabla_k I(\varphi)$$

где n – номер итерации.

Для переменного по пространству k градиент функционала ищется по формуле:

$$\nabla_k I(\varphi) = \int_0^T \int_0^X \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \varphi^*}{\partial x} dx dt. \qquad (9)$$

Итерационный параметр τ определяется выражением:

$$\tau = \frac{\int_0^X (\varphi_{изм} - \varphi) \delta\varphi dx}{\int_0^X \delta\varphi^2 dx}. \qquad (10)$$

Здесь $\delta\varphi$ является решением соответствующей задачи в вариациях, которая зависит от того, какой параметр уравнения переноса идентифицируется. При идентификации коэффициента турбулентной вязкости необходимо решать следующую задачу в вариациях:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \delta\varphi}{\partial t} + U \frac{\partial \delta\varphi}{\partial x} = k \frac{\partial^2 \delta\varphi}{\partial x^2} + \delta k \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \\ &\delta k = \nabla_k I(\varphi), \\ &\Gamma : \varphi = 0, \\ &t = 0 : \delta\varphi = 0. \end{aligned} \qquad (11)$$

Численные эксперименты проводились при следующих значениях входных параметров модели: шаг по пространству $\Delta x = 1.4 \cdot 10^6$ см, $\Delta t = 10^4$ с., $U = 10$ см/с, $x = 28$ км.

Данные измерений генерировались при различных значениях коэффициента турбулентной диффузии. На рис. 1 представлены начальное распределение концентрации примеси и сгенерированные данные измерений. Результаты восстановления постоянного коэффициента $k = 10^3$ см^2/с представлены на рис. 2 – 5.

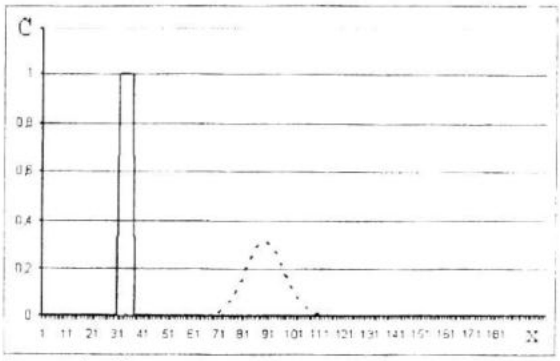


Рис. 1. Начальное поле и сгенерированные данные измерений

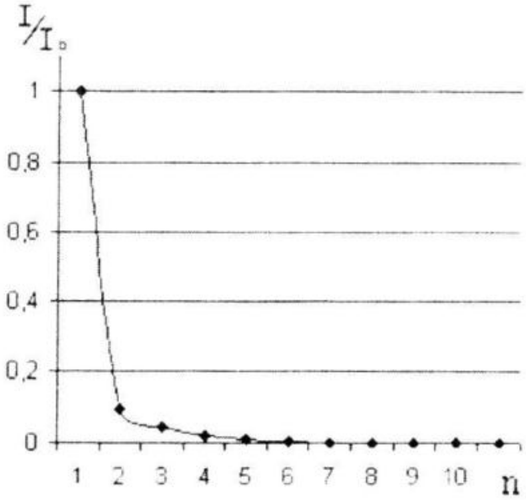


Рис. 2. Зависимость нормированного значения функционала качества прогноза от номера итерации при $k^0 = 10^5$ см^2/с

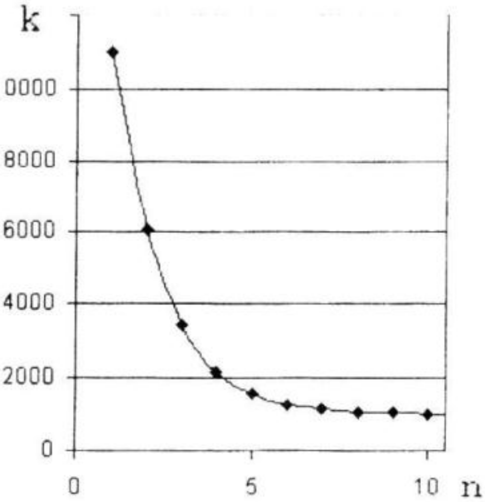
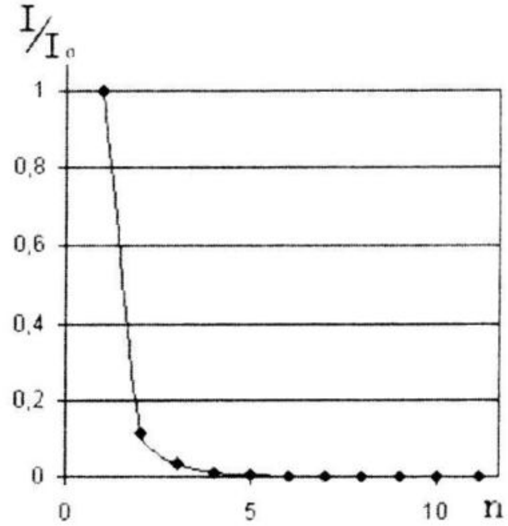
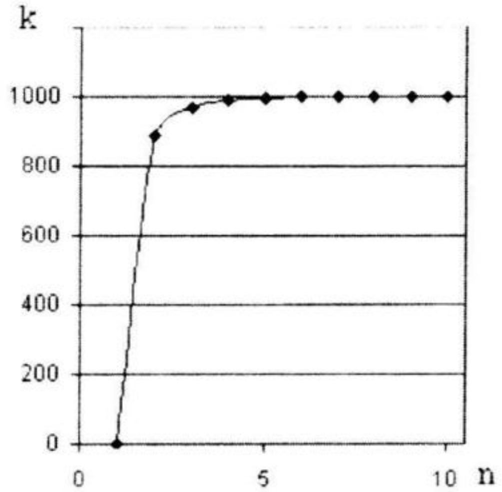


Рис. 3. Восстановление истинного значение коэффициента k в результате итераций

Использование вариационного алгоритма идентификации при решении задачи поиска оптимального значения коэффициента k позволяет получить достаточно быструю сходимость итерационного процесса. Для восстановления истинного значения коэффициента требуется 5 – 6 итераций.

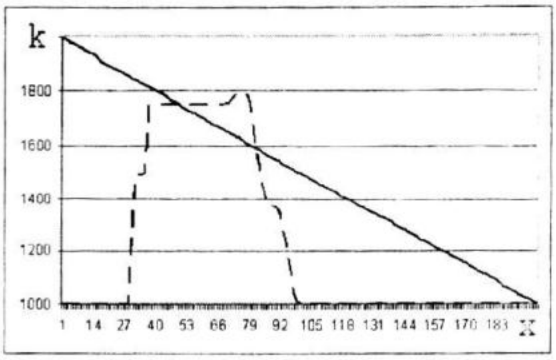


Р и с. 4. Зависимость нормированного значения функционала качества прогноза от номера итерации при $k^0 = 0 \ см^2/с$



Р и с. 5. Восстановление истинного значение коэффициента k в результате итераций

В случае, когда k является функцией от x, истинные значения коэффициента турбулентной диффузиии удается восстановить только в области движения неоднородности в исследуемом поле концентрации пассивной примеси. В областях, где не происходит изменений в поле концентрации, не возможно восстановить истинное значение коэффициента k. На рис. 6 представлено истинное значение коэффициента турбулентной диффузии $k = 2 \cdot 10^3 - i \cdot 5$, где $i = 1{,}200$ – номер точки по оси x.



Р и с. 6. Восстановленное значение коэффициента k (пунктирная линия) и истинное значение коэффициента (сплошная линия)

Запишем отличную от нуля величину k^n в виде $k^n = a \cdot i + b$ и получим систему линейных алгебраических уравнений. Подвергнув её плоским вращениям [4] получим систему двух наиболее информативных уравнений для определения a и b. Отметим, что в новой системе учтена вся информация из первоначальной системы. Таким образом, даже после первой итерации мы получаем хорошее восстановление искомых величин a и b. Восстановленный коэффициент практически совпадает с его истинным значением. Поэтому в случае, когда используется та или иная малопараметрическая модель турбулентности возможно применение предложенного алгоритма.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Пененко В.В.* Оценка параметров дискретных моделей динамики атмосферы и океана // Метеорология и гидрология, 1979, № 7. – С. 77-90.
2. *Yu L., O'Brien J.J.* Variational estimation of the wind stress drag coefficient and the oceanic eddy viscosity profile // J. *Phys. Oceanogr.*, 1991, 21. – P. 709 – 719
3. *Кочергин С.В., Кочергин В.С.* Вариационная идентификация параметров модели переноса пассивной примеси и планирование экспериментов // Системы контроля окружающей среды. МГИ НАНУ, Севастополь 2005. – С. 186-192.
4. *Страхов В.Н.* Метод фильтрации систем линейных алгебраических уравнений – основа решения линейных задач гравиметрии и магнитометрии // Докл. АН СССР., 1991, №.3. – С. 595 – 599.