ИСПОЛЬЗОВАНИЕ РЕШЕНИЯ СОПРЯЖЕННОЙ ЗАДАЧИ В МОДЕЛИ ПЕРЕНОСА ПАССИВНОЙ ПРИМЕСИ

С.В. Кочергин, В.С. Кочергин

Морской гидрофизический институт
НАН Украины
г. Севастополь, ул. Капитанская, 2
E-mail: ko4ep@mail.ru

В работе рассматривается алгоритм оценки поля концентрации пассивной примеси на конечный момент модельного времени по начальным данным при помощи решения сопряженных задач. Предложенный подход используется при построении алгоритмов идентификации начального поля концентрации.

При решении задачи переноса пассивной примеси с использованием большого количества различных начальных полей необходимо многократно интегрировать уравнение модели. Представленный в данной работе алгоритм позволяет существенно упростить эту процедуру с использованием подхода [1]. При численной реализации алгоритма решается серия сопряженных задач для каждой токи области интегрирования на заданном интервале времени. Алгоритм позволяет решать эти задачи в параллельном режиме для максимального использования ресурсов многопроцессорной системы.

Алгоритм оценки. В качестве модели переноса пассивной примеси для тестовых расчетов рассмотрим следующее одномерное уравнение

$$\frac{\partial C}{\partial t}+\frac{\partial UC}{\partial x}=A\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}, \qquad (1)$$

с краевыми условиями

$$\frac{\partial C}{\partial n}=0, \qquad (2)$$

и начальными данными

$$C(x,0)=C_0(x), \qquad (3)$$

где C – концентрация примеси, U – заданная скорость, A – коэффициент турбулентной диффузии, область интегрирования модели $D=[0,X]$, $D_t=D\times\times[0,T]$.

Поставим в соответствие (1) сопряженную задачу

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial C^*}{\partial t}-\dfrac{\partial UC^*}{\partial x}=A\dfrac{\partial^2 C^*}{\partial x^2} \\ \Gamma:\dfrac{\partial C^*}{\partial n}=0 \\ t=T:C^*=h(x) \end{cases} \qquad (4)$$

Умножая (1) – (3) на C^* и интегрируя по частям с учетом (4) получим

$$\int_D hCdD=\int_D C_0C^*dD\ , \qquad (5)$$

Выбираем h в виде

$$h=\begin{cases} \dfrac{1}{m(\Omega)}-\ в\ \Omega \\ 0\ -\ вне\ \Omega \end{cases}, \qquad (6)$$

где m – мера некоторой области $\Omega\in D$. При этом, в левой части выражения (5) получаем среднюю концентрацию $\overline{C}_T$ в Ω на момент времени T. В одномерном случае в качестве Ω выберем интервал $[x_i,x_{i+1}]$ и зададим h в виде

$$h=\begin{cases} \dfrac{1}{\Delta x}-\ в\ [x_i,x_{i+1}] \\ 0\ -\ вне\ [x_i,x_{i+1}] \end{cases}, \qquad (7)$$

где $\Delta x=x_{i+1}-x_i$. Тогда среднюю концентрацию в $[x_i,x_{i+1}]$ можно оценить по формуле

$$\overline{C}_T(x_{i+1/2})=\int_0^X C_0C^*dx\ , \qquad (8)$$

где C^* – решение сопряженной задачи (4), которое фактически является функцией влияния начальных данных. Из (8) видно, что для получения $\overline{C}_T$ необходимо решить на $[0,T]$ серию задач (4), (6) для каждой точки области интегрирова-

ния. Задавая различные C_0 по формуле (8) получаем соответствующие значения $\overline{C}_T$. Начальные данные C_0 могут соответствовать любому моменту времени $t_0 \in [0,T]$, при этом процедура восстановления поля концентрации пассивной примеси $\overline{C}_T$ реализуется на интервале времени $[t_0,T]$. При интегрировании сопряженных задач осуществляется запись C^* на каждом моменте времени для восстановления $\overline{C}_T$ по различным начальным данным C_{t_0}.

Сопряженные задачи в данном алгоритме независимы друг от друга и могут быть реализованы различными исполнителями. Это позволяет с использованием современной вычислительной техники осуществлять необходимые вычисления в распараллеленном режиме. Дальнейшая оценка $\overline{C}_T$ осуществляется без пространственно временного счета с использованием уже насчитанных значений C^*.

Вариационный алгоритм идентификации начальных полей. Пусть на момент времени T имеются данные измерений $C_{изм}$, тогда задача поиска оптимального C_0 сводится к минимизации квадратичного функционала

$$I_0 = \frac{1}{2}\left(C - C_{изм}, C - C_{изм}\right)_D \quad (9)$$

при ограничениях (1) – (3). Градиент обобщенного функционала определяется по формуле

$$\nabla_{C_0} I = C_0^*, \quad (10)$$

где C^* множители Лагранжа, которые определяются из решения сопряженной задачи (4) при

$$h = C_{изм} - C. \quad (11)$$

Процедура идентификации состоит в следующем:

- задается некоторое начальное приближение C_0
- решается задача (1) – (3)
- определяются невязки прогноза
- решается сопряженная задача (4) с условием (11)
- определяется градиент функционала (10)
- осуществляется итерационный спуск по формуле

$$C_0^{n+1} = C_0^n + \tau \cdot \nabla_{C_0} I, \quad (12)$$

где τ – итерационный параметр, который определяется одним из известных способов [2,3].

Если для достижения минимума функционала требуется большое количество итераций (медленная сходимость итерационного процесса), то процедура поиска оптимального начального поля может быть упрощена при помощи описанного выше алгоритма с учетом (8). Решив один раз сопряженные задачи (4), (7) мы оцениваем $\overline{C}_T$ по формуле (8). Аналогично построив функции источников для модели (1) – (2) при

$$C(x,0) = h, \quad (13)$$

можем оценить C_0^* по невязкам прогноза, не решая сопряженную задачу с условием (11). Для этой цели используется формула

$$\overline{C}_0^* = \int_0^X C(x,T)(C_{изм} - C)dx. \quad (14)$$

Такие оценки осуществляются на каждой итерации вместо интегрирования основной и сопряженной задач. В этом случае процедура идентификации C_0 следующая:

- решается задача (4), (7) и по формуле (8) оценивается $\overline{C}_T$
- определяются невязки прогноза
- решается задача (1) – (2) с условием

$$C(x,0) = h, \quad (15)$$

где h определяется из (7)

- производится оценка C_0^* (14) .

- определяется градиент (10)
- осуществляется итерационный спуск по формуле (12).

Предложенная процедура сохраняется и в случае, когда данные измерений существуют для различных моментов времени. Задача решается для каждой точки, в которой имеются данные измерений. В результате сопряженная модель выступает в роли пространственно-временного интерполянта, что позволяет получить оценку на начальный момент времени.

Фильтрационный алгоритм идентификации начальных полей. Рассматриваемый алгоритм основан на процедуре фильтрации систем линейных алгебраических уравнений [4]. Такие алгоритмы успешно применяются при решении различных океанологических задач [5–7]. Суть метода состоит в построении эквивалентной системы уравнений полученной при помощи преобразования плоского вращения. При реализации алгоритма уравнения сортируются по рангу, и из всех уравнений переопределенной системы выбираются наиболее информативные. Если в левую часть формулы (8) подставить данные измерений, а интеграл аппроксимировать суммой, то, зная местоположение начального пятна загрязнения, можно попытаться определить концентрацию C_0 в заданных узлах расчетной сетки из полученной системы линейных уравнений. В случае равенства количества измерений и числа неизвестных, задача очень чувствительна к значениям концентрации в левой части (8). Поэтому для получения достоверных результатов необходимо решать сильно переопределенную систему, где количество измерений, а следовательно и уравнений гораздо больше числа неизвестных. В этом случае происходит фильтрация системы линейных алгебраических уравнений. Вверху новой системы оказываются наиболее информативные уравнения, в которых учтена вся информация о поле концентрации.

Таким образом, на основе применения предложенного алгоритма оценки построены две процедуры идентификации начальных данных. Вариационный алгоритм упрощается в том случае, когда требуется больше число итераций для достижения минимума функционала. Для реализации фильтрационного алгоритма необходимо решение переопределенной системы алгебраических уравнений, что позволяет отфильтровать ошибки в данных измерений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Марчук Г.И.* Математическое моделирование в проблеме окружающей среды.-М.: Наука, 1982. – 320 с.
2. *Васильев Ф.П.* Численные методы решения экстремальных задач. // Наука, 1980. – 519 с.
3. *Васильев Ф.П.* Методы решения экстремальных задач. // Наука, 1981. – 400 с.
4. *Страхов В.Н.* Метод фильтрации систем линейных алгебраических уравнений – основа решения линейных задач гравиметрии и магнитометрии // Докл. АН СССР., 1991, №.3. – С. 595 – 599.
5. *Еремеев В.Н., Кочергин В.П., Кочергин С.В., Скляр С.Н.* Математическое моделирование гидродинамики глубоководных бассейнов. – Севастополь: ЭКОСИ-Гидрофизика, 2002. – 238 с.
6. *Кочергин С.В., Кочергин В.С., Станичный С.В.* Вариационный алгоритм фильтрации данных измерений. // В Сб.: «Системы контроля окружающей среды», МГИ НАНУ, Севастополь 2007., – С. 91 – 94.
7. *Кочергин С.*В., *Янковский А.Е.* Применение алгоритма фильтрации данных при восстановлении структуры захваченных волн на шельфе Крыма // МГФЖ, 1995, – №5, – С. 62 – 65.