ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ СИГНАЛОВ В ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ ИНВАРИАНТНЫХ СИСТЕМАХ

В.А. Гайский, П.В. Гайский, Д.В. Гончаров

Морской гидрофизический инстиcтут НАН Украины

В работах [1,2] рассматриваются принципы функционирования измерительных параметрически инвариантных систем (ИПИС) с реализацией вычислительных алгоритмов при описании каналов дифференциальными уравнениями. При этом производится вычисление производных выходного сигнала и решение систем линейных алгебраических уравнений. Первую операцию трудно выполнить с достаточной точностью из-за наличия аддитивных инструментальных шумов в цифровых отсчетах выходного сигнала, а вторая операция делает любую ИПИС в целом нелинейной системой и привлечение спектральных методов для ее анализа и синтеза вычислительных алгоритмов представляется мало перспективным. В данной работе рассматривается случай, когда представление сигналов дискретным спектром оказывается полезным в ИПИС для подавления инструментальных шумов и вычислительных ошибок.

Структурная схема двухканальной ИПИС с линейными динамическими каналами представлена на рис.1.

Рис.1

Измеряемый сигнал $x(t)$ поступает на входы двух разных измерительных каналов, содержащих в силу необходимости последовательно включенные первичные и вторичные измерительные преобразователи, эквивалентные линейным динамическим звеньям, и аналого-цифровые преобразователи, эквивалентные линейному безынерционному звену.

Выходные цифровые сигналы $y_1(t)$ и $y_2(t)$ поступают на вычислительное устройство, которое для восстановления входного сигнала $x(t)$ (и, при потребности, динамических параметров каналов $d_{kj}(t)$) решает систему линейных алгебраических уравнений вида

$$x(t) - \sum_{j=1}^{n} d_{kj}\ y_k{}^{(j)}(t) = d_{k0}\ y_k(t), \qquad k = \overline{1,2} \quad t = \overline{1,\nu} \tag{1}$$

где $\nu \geq 2n$.

При наличии в системе аддитивных к сигналам $y_1(t)$ и $y_2(t)$ шумов, обусловленных внутренними шумами каналов и в том числе шумом квантования, погрешность вычисления производных $y_k{}^{(j)}(t)$ становится значительной из-за их усиления в области высоких частот [3] и необходимо искать пути ее подавления [2].

Одним из таких путей может быть использование ортогонального представления сигналов в системе.

Представим наблюдаемые сигналы $y_k(t)$ на некотором текущем отрезке времени T рядом Фурье по базису $\varphi_i(t)$ (дискретным спектром)

$$y_k(t) \cong \sum_{i=0}^{m} y_{ki}\, \varphi_i(t), \quad k = \overline{1,2}, \tag{2}$$

где $$y_{ki} = \frac{1}{T}\int_0^T y_k(t)\, \varphi_i(t)\, dt \tag{3}$$

Тогда $$y_k^{(j)}(t) = \sum_{i=0}^{m} y_{ki}\, \varphi_i^{(j)}(t) \,. \tag{4}$$

Подставляя (4) в (1), получим

$$x(t) = \sum_{j=0}^{n} d_{kj} \sum_{i=0}^{m} y_{ki}\, \varphi_i^{(j)}(t), \quad k = \overline{1,2}, \tag{5}$$

На два уравнения (5) имеем неизвестные : $x(t)$ и d_{kj} ($k = \overline{1,2}$), всего 1+2n неизвестных, принимая d_{k0} известными, поскольку d_{10}-статический коэффициент, легко определяется при $x(t)$=const.

Необходимое расширение системы (5) может быть получено за счет использования дополнительных интервалов времени τ для разложения сигналов $y_1(t)$ и $y_2(t)$.

Каждый новый интервал τ даст два новых уравнения вида (5) и одно новое неизвестное $x(t,\tau)$. Следовательно, общее число ν интервалов τ должно удовлетворять условию

$$2\nu \geq \nu + 2n, \qquad \nu \geq 2n \,. \tag{6}$$

Можем записать

$$x(t,\tau) - \sum_{j=1}^{n} d_{kj} \sum_{i=0}^{m} y_{ki}\, \varphi_i^{(j)}(t,\tau) = d_{ko} \sum_{i=0}^{m} y_{ki}\, \varphi_i^{(j)}(t,\tau), \quad k = \overline{1,2}, \quad \tau = \overline{1,\nu} \tag{7}$$

Таким образом, при формировании СЛАУ (7) вместо вычисления производных сигналов $y_1(t)$ и $y_2(t)$ выполняется операция вычисления коэффициентов y_{ki} разложения взвешенным интегрированием по выражению (3). При этом происходит подавление шумов и накопление детерминированных составляющих сигналов с общим улучшением отношения сигнал-шум порядка в $\sqrt{m}$ раз. Платой за достигаемое повышение точности является определенная задержка и увеличение объема вычислений, погрешности которых возрастают. Дальнейший выигрыш в точности может быть получен, если использовать ортогональное представление входного сигнала $x(t)$ и восстанавливать его по частям. Действительно, на общем с сигналами $y_k(t)$ интервале разложения T, для $x(t)$ можем записать

$$x(t) = \sum_{i=0}^{m} x_i\, \varphi_i(t), \tag{8}$$

где $$x_i = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\, \varphi_i(t)\, dt \tag{9}$$

Подставляя (8) в (5), получим

$$\sum_{i=0}^{m} x_i\, \varphi_i(t) = \sum_{j=0}^{n} d_{kj} \sum_{i=0}^{m} y_{ki}\, \varphi_i^{(j)}(t), \quad k = \overline{1,2} \tag{10}$$

Далее используем свойство комплексных гармонических ортогональных составляющих (разложение по функциям тригонометрического ряда Фурье) проходить через линейный канал независимо, без взаимного влияния, с изменением только амплитуды и фазы в зависимости от параметров канала. Тогда можно “расщепить” пару уравнений (10) на (m+1) пар уравнений вида

$$x_i\varphi_i(t)=\sum_{j=0}^{n}d_{kj}\;y_{ki}\;\varphi_i^{(j)}(t),\qquad(11)$$
$$k=\overline{1,2},\quad i=\overline{0,m}$$

Или, принимая d_{ko} известными, запишем в стандартной форме

$$\begin{cases}x_i\;\varphi_i(t)-\sum\limits_{j=1}^{n}d_{1j}\;y_{1i}\;\varphi_i^{(j)}(t)=d_{10}\;y_{1i}\;\varphi_i(t)\\ x_i\;\varphi_i(t)-\sum\limits_{j=1}^{n}d_{2j}\;y_{2i}\;\varphi_i^{(j)}(t)=d_{20}\;y_{2i}\;\varphi_i(t)\end{cases}$$
$$i=\overline{0,m},\quad 0\le t\le\tau_i,\qquad(12)$$

где τ_i - длительность одного периода составляющей $\varphi_i(t)$ в пределах интервала T.

Выражения (12) представляют собой систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), содержащую постоянные на интервале T коэффициенты (параметры каналов) d_{kj} ($j=\overline{1,n}$), вычисляемые y_{ki} через наблюдаемые $y_k(t)$, неизвестные x_i и d_{kj}.

Всего имеем m+2n неизвестных (без d_{ko}). В реальных системах это составляет порядка 36 неизвестных.

Необходимое количество уравнений для определения этих неизвестных может быть сформулировано за счет изменения $i=\overline{0,m}$ или изменения интервала T с обновлением значений y_{ki} и x_i, когда число уравнений растет быстрее числа неизвестных. В рамках одного T может быть сформировано 2m уравнений (без учета φ_0), при m=30 получим избыточное число уравнений 60.

За счет использования добавочных интервалов T (скольжения с любым шагом) может наращиваться число уравнений, если в этом есть необходимость, например, для решения системы уравнений, как условных, методом наименьших квадратов. При этом, естественно, возрастает задержка решения и требуется постоянство параметров каналов d_{kj} на длительность всех интервалов T, которые могут браться внахлест или встык.

Аргумент t непрерывный и должен быть общим только для одной пары уравнений (12) с одним индексом i. Для других пар уравнений аргумент t может быть иным. Поскольку функции $\varphi_i(t)$ при i>1 имеют несколько периодов на интервале T, то имеет смысл брать t в пределах первого периода τ_i. Для упрощения или повышения точности вычислений возможно принимать такие значения t, при которых $\varphi_i(t)$ или их производные $\varphi_i^j(t)$ принимают некоторые заданные значения, например, экстремальные или нуль. В общем случае расширенная матрица СЛАУ (9) имеет вид :

Неизвестные

x_1	x_2	...	x_m	d_{11}	...	d_{1n}	d_{21}	...	d_{2n}	
$\varphi_1(t)$	0	0	0	$y_{11}\varphi_1^{(1)}(t)$	...	$y_{1n}\varphi_1^{(n)}(t)$	0	...	0	$d_{10}y_{11}\varphi_1(t)$
$\varphi_1(t)$	0	0	0	0	...	0	$y_{21}\varphi_1^{(1)}(t)$	...	$y_{21}\varphi_1^{(n)}(t)$	$d_{20}y_{21}\varphi_1(t)$
0	$\varphi_2(t)$	0	0	$y_{12}\varphi_2^{(1)}(t)$	...	$y_{12}\varphi_2^{(n)}(t)$	0	...		$d_{10}y_{12}\varphi_2(t)$
0	$\varphi_2(t)$	0	0	0	...	0	$y_{22}\varphi_2^{(1)}(t)$	...	$y_{22}\varphi_2^{(n)}(t)$	$d_{20}y_{22}\varphi_2(t)$
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
0	0	0	$\varphi_m(t)$	$y_{1m}\varphi_m^{(1)}(t)$	...	$y_{1m}\varphi_m^{(n)}(t)$	0	...	0	$d_{10}y_{1m}\varphi_m(t)$
0	0	0	$\varphi_m(t)$	0	...	0	$y_{2m}\varphi_m^{(1)}(t)$	...	$y_{2m}\varphi_m^{(n)}(t)$	$d_{20}y_{2m}\varphi_m(t)$

(10) 3

Рассмотрим разложение по базису тригонометрических функций Фурье подробнее

$$\varphi_0(t) = 1, \quad \varphi_{ic} = COS\, i\omega_0 t, \quad \varphi_{is} = SIN\, i\omega_0 t, \quad i = \overline{1,m}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \qquad (13)$$

Можем записать для базисных функций и их производных :

i	$\varphi_i(t)$	$\varphi_i^{(1)}(t)$	$\varphi_i^{(2)}(t)$	$\varphi_i^{(3)}(t)$
φ_0	1	0	0	0
$\varphi_{1,C}$	$COS\ \omega_0 t$	$-\omega_0 \cdot SIN\ \omega_0 t$	$-\omega_0^2 \cdot COS\ \omega_0 t$	$-\omega_0^3 \cdot SIN\ \omega_0 t$
$\varphi_{1,S}$	$SIN\ \omega_0 t$	$\omega_0 \cdot COS\ \omega_0 t$	$-\omega_0^2 \cdot SIN\ \omega_0 t$	$-\omega_0^3 \cdot COS\ \omega_0 t$
$\varphi_{2,C}$	$COS\ 2\omega_0 t$	$-2\omega_0 \cdot SIN\ 2\omega_0 t$	$-4\omega_0^2 \cdot COS\ 2\omega_0 t$	$8\omega_0^3 \cdot SIN\ 2\omega_0 t$
$\varphi_{2,S}$	$SIN\ 2\omega_0 t$	$2\omega_0 \cdot COS\ 2\omega_0 t$	$-4\omega_0^2 \cdot SIN\ 2\omega_0 t$	$-8\omega_0^3 \cdot COS\ 2\omega_0 t$
...	...	...	...	...
$\varphi_{m,C}$	$COS\ m\omega_0 t$	$-m\omega_0 \cdot SIN\ m\omega_0 t$	$-m^2\omega_0^2 \cdot COS\ m\omega_0 t$	$m^3\omega_0^3 \cdot SIN\ m\omega_0 t$
$\varphi_{m,S}$	$SIN\ m\omega_0 t$	$m\omega_0 \cdot COS\ m\omega_0 t$	$-m^2\omega_0^2 \cdot SIN\ m\omega_0 t$	$-m^3\omega_0^3 \cdot COS\ m\omega_0 t$

Если измерительные каналы эквивалентны линейным динамическим звеньям 1-го порядка, то СЛАУ для ИПИС имеет вид :

$$\begin{cases} x_i\, \varphi_i(t) - d_{11}\ y_{1i}\ \varphi_i^{(1)}(t) = d_{10}\ y_{1i}\, \varphi_i(t) \\ x_i\, \varphi_i(t) - d_{21}\ y_{2i}\ \varphi_i^{(1)}(t) = d_{20}\ y_{2i}\, \varphi_i(t) \end{cases} \quad (14)$$

$$i = \overline{1,m}$$

или с тригонометрическим базисом $x_0(t) = d_{10}\ y_{1,0}; \quad x_0(t) = d_{20}\ y_{2,0}$ (15):

$$\begin{cases} x_{ic}\, COS\, i\omega_0 t + x_{is}\, SIN\, i\omega_0 t + d_{11}(i\omega_0)(y_{1,i,C}\ SIN\, i\omega_0 t - y_{1,i,S}\ COS\, i\omega_0 t) = \\ \qquad = d_{10}(y_{1,i,C}\ COS\, i\omega_0 t + y_{1,i,S}\ SIN\, i\omega_0 t) \\ x_{ic}\, COS\, i\omega_0 t + x_{is}\, SIN\, i\omega_0 t + d_{21}(i\omega_0)(y_{2,i,C}\ SIN\, i\omega_0 t - y_{2,i,S}\ COS\, i\omega_0 t) = \\ \qquad = d_{20}(y_{2,i,C}\ COS\, i\omega_0 t + y_{2,i,S}\ SIN\, i\omega_0 t) \end{cases} \quad (16)$$

$$i = \overline{1,m}$$

где

$$y_{k,i,C} = \frac{1}{T}\int_0^T y_k(t)\ COS\, i\omega_0 t$$

$$y_{k,i,S} = \frac{1}{T}\int_0^T y_k(t)\ SIN\, i\omega_0 t$$

$$x_{i,C} = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\ COS\, i\omega_0 t \qquad (17)$$

$$x_{i,S} = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\ SIN\, i\omega_0 t$$

$$k = \overline{1,2}, \qquad i = \overline{1,m}$$

Принимаем

$SIN\, i\omega_0 t = 0, \quad COS\, i\omega_0 t = 1.$

Из (16) получим

$$\begin{cases} x_{ic} - d_{11}(i\omega_0)\, y_{1,i,S} = d_{10}\ y_{1,i,C} \\ x_{ic} - d_{21}(i\omega_0)\, y_{2,i,S} = d_{20}\ y_{2,i,C} \end{cases} \quad (18а)$$

Принимаем

$SIN\, i\omega_0 t = 1, \quad COS\, i\omega_0 t = 0.$

Из (16) получим

$$\begin{cases} x_{iS} + d_{11}(i\omega_0)\, y_{1,i,C} = d_{10}\ y_{1,i,S} \\ x_{iS} + d_{21}(i\omega_0)\, y_{2,i,C} = d_{20}\ y_{2,i,S} \end{cases} \quad (18б)$$

Расширенная матрица СЛАУ имеет вид :

Неизвестные

x_{iC}	x_{iS}	d_{11}	d_{21}	
1	0	$-i\omega_0 y_{1,i,S}$	0	$d_{10} y_{1,i,C}$
1	0	0	$-i\omega_0 y_{2,i,S}$	$d_{20} y_{2,i,C}$
0	1	$i\omega_0 y_{1,i,C}$	0	$d_{10} y_{1,i,S}$
0	1	0	$i\omega_0 y_{2,i,C}$	$d_{20} y_{2,i,S}$

(19)

Решения для неизвестных имеют вид

$$x_{i,c} = \frac{d_{10}(y_{1,i,S}^{\ 2} + y_{1,i,C}^{\ 2})\, y_{2,i,S} - d_{20}(y_{2,i,S}^{\ 2} + y_{2,i,C}^{\ 2})\, y_{1,i,S}}{y_{1,i,C}\, y_{2,i,S} - y_{1,i,S}\, y_{2,i,C}}, \tag{20}$$

$$x_{i,S} = \frac{d_{10}(y_{1,i,S}^{\ 2} + y_{1,i,C}^{\ 2})\, y_{2,i,C} + d_{20}(y_{2,i,S}^{\ 2} + y_{2,i,C}^{\ 2})\, y_{1,i,C}}{y_{1,i,C}\, y_{2,i,S} - y_{1,i,S}\, y_{2,i,C}}, \tag{21}$$

$$d_{11} = \frac{d_{10}(y_{1,i,S}\, y_{2,i,S} + y_{1,i,C}\, y_{2,i,C}) - d_{20}(y_{2,i,S}^{\ 2} + y_{2,i,C}^{\ 2})}{i\omega_0 (y_{1,i,C}\, y_{2,i,S} - y_{1,i,S}\, y_{2,i,C})}, \tag{22}$$

$$d_{21} = \frac{d_{10}(y_{1,i,S}^{\ 2} + y_{1,i,C}^{\ 2}) - d_{20}(y_{1,i,S}\, y_{2,i,S} + y_{1,i,C}\, y_{2,i,C})}{i\omega_0 (y_{1,i,C}\, y_{2,i,S} - y_{1,i,S}\, y_{2,i,C})} \tag{23}$$

Для измерительных каналов, эквивалентным линейным и динамическим звеньям 2-го порядка СЛАУ для ПИС согласно (5) будут иметь вид :

$$x(t) - d_{k1} \sum_{i=1}^{m} y_{ki}\, \varphi_i^{(1)}(t) - d_{k2} \sum_{i=1}^{m} y_{ki}\, \varphi_i^{(2)}(t) = d_{10} \sum_{i=1}^{m} y_{ki}\, \varphi_i(t), \quad k = \overline{1,2} \tag{24}$$

Для гармонического базиса и "расщепления" системы получим :

$$\begin{aligned} & x_{iC}\, COS\, i\omega_0 t + x_{is}\, SIN\, i\omega_0 t + d_{k1}\left[i\omega_0 (y_{k,i,C}\, SIN\, i\omega_o t - y_{k,i,S}\, COS\, i\omega_o t)\right] + \\ & + d_{k2}\left[(i\omega_0)^2 (y_{k,i,C}\, COS\, i\omega_o t - y_{k,i,S}\, SIN\, i\omega_o t)\right] = \\ & = d_{ko}\, (y_{k,i,C}\, COS\, i\omega_o t + y_{k,i,S}\, SIN\, i\omega_o t), \\ & k = \overline{1,2}, \qquad i = \overline{1,m} \end{aligned} \tag{25}$$

При $SIN\, i\omega_0 t = 0, \quad COS\, i\omega_0 t = 1$ получим

$$x_{ic} - d_{k1}(i\omega_o)\, y_{k,i,S} + d_{k2}(i\omega_o)^2\, y_{k,i,C} = d_{k0}\, y_{k,i,C} \tag{26a}$$

При $SIN\, i\omega_0 t = 1$, $COS\, i\omega_0 t = 0$ получим

$$x_{iS} - d_{k1}(i\omega_o)\, y_{k,i,C} + d_{k2}(i\omega_o)^2\, y_{k,i,S} = d_{k0}\, y_{k,i,S} \qquad (26б)$$

При $k = \overline{1,2}$ уравнения (26) образуют СЛАУ из четырех уравнений при 6 неизвестных d_{11}, d_{12}, d_{21}, d_{22}, x_{iC} и x_{iS}. Включим в систему еще одну гармонику, которая дает еще 4 дополнительных уравнения и две новых неизвестных x_{jC} и x_{jS}. В итоге получим СЛАУ :

$$\begin{cases} x_{iC} - (i\omega_0)\, d_{11} y_{1,i,S} + (i\omega_0)^2 d_{12} y_{1,i,C} = d_{10} y_{1,i,C} \\ x_{iC} - (i\omega_0)\, d_{21} y_{2,i,S} + (i\omega_0)^2 d_{22} y_{2,i,C} = d_{20} y_{2,i,C} \\ x_{iS} + (i\omega_0)\, d_{11} y_{1,i,C} + (i\omega_0)^2 d_{12} y_{1,i,S} = d_{10} y_{1,i,S} \\ x_{iS} + (i\omega_0)\, d_{21} y_{2,i,C} + (i\omega_0)^2 d_{22} y_{2,i,S} = d_{20} y_{2,i,S} \\ x_{jC} - (j\omega_0)\, d_{11} y_{1,j,S} + (j\omega_0)^2 d_{12} y_{1,j,C} = d_{10} y_{1,j,C} \\ x_{jC} - (j\omega_0)\, d_{21} y_{2,j,S} + (j\omega_0)^2 d_{22} y_{2,j,C} = d_{20} y_{2,j,C} \\ x_{jS} + (j\omega_0)\, d_{11} y_{1,j,C} + (j\omega_0)^2 d_{12} y_{1,j,S} = d_{10} y_{1,j,S} \\ x_{jS} + (j\omega_0)\, d_{21} y_{2,j,C} + (j\omega_0)^2 d_{22} y_{2,j,S} = d_{20} y_{2,j,S} \end{cases} \qquad (27)$$

$$i, j = \overline{1,m} \qquad j \neq i$$

Расширенная матрица системы (27) имеет вид :

Неизвестные

x_{iC}	x_{iS}	x_{jC}	x_{jS}	d_{11}	d_{12}	d_{21}	d_{22}	
1	0	0	0	$-(i\omega_0 y_{1,i,S})$	$(i\omega_0)^2 y_{1,i,C}$	0	0	$d_{10} y_{1,i,C}$
1	0	0	0	0	0	$-(i\omega_0 y_{2,i,S})$	$(i\omega_0)^2 y_{2,i,C}$	$d_{20} y_{2,i,C}$
0	1	0	0	$i\omega_0 y_{1,i,C}$	$(i\omega_0)^2 y_{1,i,S}$	0	0	$d_{10} y_{1,i,S}$
0	1	0	0	0	0	$i\omega_0 y_{2,i,C}$	$(i\omega_0)^2 y_{2,i,S}$	$d_{20} y_{2,i,S}$
0	0	1	0	$-(j\omega_0 y_{1,j,S})$	$(j\omega_0)^2 y_{1,j,C}$	0	0	$d_{10} y_{1,j,C}$
0	0	1	0	0	0	$-(j\omega_0 y_{2,j,S})$	$(j\omega_0)^2 y_{2,j,C}$	$d_{20} y_{2,j,C}$
0	0	0	1	$j\omega_0 y_{1,j,C}$	$(j\omega_0)^2 y_{1,j,S}$	0	0	$d_{10} y_{1,j,S}$
0	0	0	1	0	0	$j\omega_0 y_{2,j,C}$	$(j\omega_0)^2 y_{2,j,S}$	$d_{20} y_{2,j,S}$

(28)

Может быть сформировано $2m$ уравнений для определения x_{iC}, x_{iS}, d_{11}, d_{12}, d_{21}, d_{22}. Возможно также решение одной системы (28) относительно неизвестных параметров каналов d_{11}, d_{12}, d_{21}, d_{22} , а далее прямое восстановление $x(t)$ по выражениям (24). Можно предполагать, что при восстановлении $x(t)$ по ортогональным составляющим вычислительные погрешности подавляются в $\sqrt{m}$ раз. Большинство датчиков, используемых в системах измерения параметров внешней среды, с удовлетворительной точностью представляются линейными динамическими звеньями не более второго порядка.

Таким образом, проведенный анализ охватывает большинство практически важных линейных динамических измерительных каналов.

Литература

1. Гайский В.А. Параметрически инвариантные системы с динамическими линейными измерительными преобразователями. В сб.: Приборостроение, вып. 23, Киев, "Наукова думка", 1982.

2. Гайский В.А., Гончаров Д.В. Коррекция динамических характеристик инерционных датчиков. Сб. научн. трудов конфер.: "Диагноз состояния экосистемы Черного моря и зоны сопряжения суши и моря", Севастополь, 1997.

3. Гайский В.А. Способ исключения динамической погрешности первичного измерительного преобразователя при сканировании поля. В сб. научн. трудов: "Автоматизированные системы контроля состояния морской среды", МГИ НАНУ, Севастополь, 1992.