

# НАЛОЖЕНИЕ ВЫСОКОЧАСТОТНЫХ СОСТАВЛЯЮЩИХ В СПЕКТРЕ ДИСКРЕТИЗИРОВАННОГО СИГНАЛА

П.В.Гайский

Морской гидрофизический институт  
НАН Украины  
335000, г. Севастополь,  
ул. Капитанская, 2

Представляет интерес оценка погрешности восстановления по дискретным отсчетам в определенной полосе частот случайного процесса с произвольным спектром в зависимости от интерва-

ла дискретизации и не связанной с алгоритмом восстановления [1,2].

Какой бы алгоритм восстановления в заданной полосе частот непрерывного сигнала из дискретизированного ни использовался, его погрешность не может быть меньше той, которая вызвана перекрытием спектров в дискретизированном сигнале, непрерывный аналог которого имеет бесконечный спектр (рис.1). Это перекрытие спектров и обуславливает нижнюю границу погрешности восстановления сигнала в определенном частотном диапазоне при заданном интервале дискретизации или максимально допустимый интервал дискретизации при заданной погрешности восстановления.



Рис.1. Спектр дискретного представления сигнала и спектр его реального непрерывного аналога

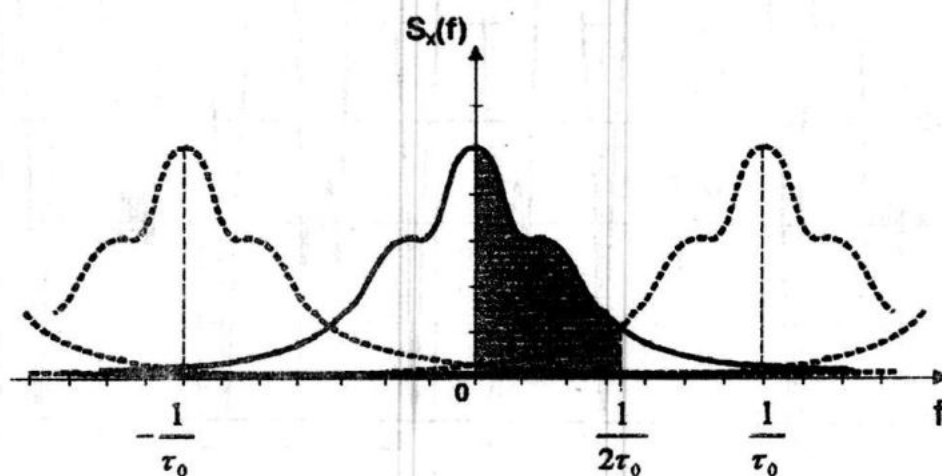


Рис.2. Механизм наложения

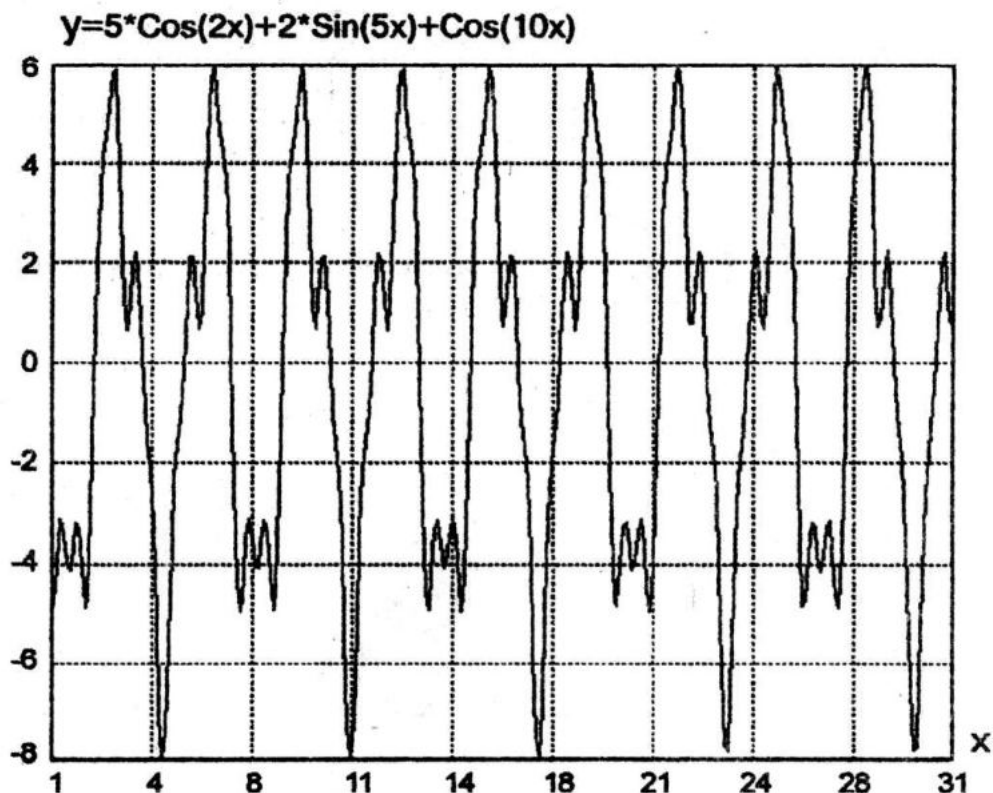
Схематически механизм наложения показан на рис.2. Очевидно, что такое отличие рассчитанного и истинного спектров одного процесса связано с плохим соотношением реального хода сигнала и функцией (синусоидальной, экспоненциальной и др.), используемой при разложении в ряд Фурье и высокочастотными составляющими, теряемыми и накладываемыми при данной дискретности. Таким образом, исследуемая положительная часть спектра  $f = 0.. \frac{1}{2\tau_0}$

(закрашенная часть) содержит в себе полезные составляющие в данном диапазоне частот и наложенную информацию высокочастотного диапазона от отражений  $-\frac{i}{\tau_0}$  и  $\frac{i}{\tau_0}$ , где  $i=1.. \infty$ .

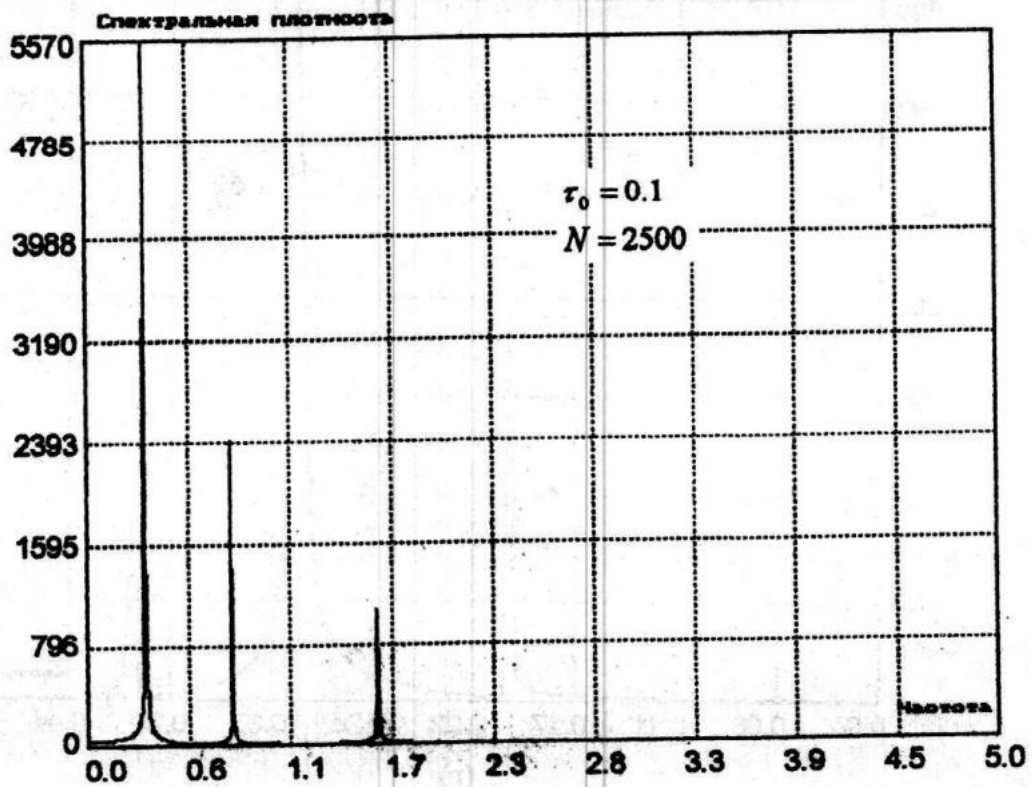
Посредством эксперимента исследуем свойства наложения для ограниченных спектров. Смоделируем колебательный процесс из трех смешанных гармоник разных частот  $f_1, f_2$  и  $f_3$  различной

амплитуды (рис.3.а). Построим спектры различных дискретных реализаций этого процесса с интервалами дискретизации  $\Delta x$ :  $\tau_0=0.1$  (рис.3.б),  $\tau_0=0.5$  (рис.3.в),  $\tau_0=1$  (рис.3.г).

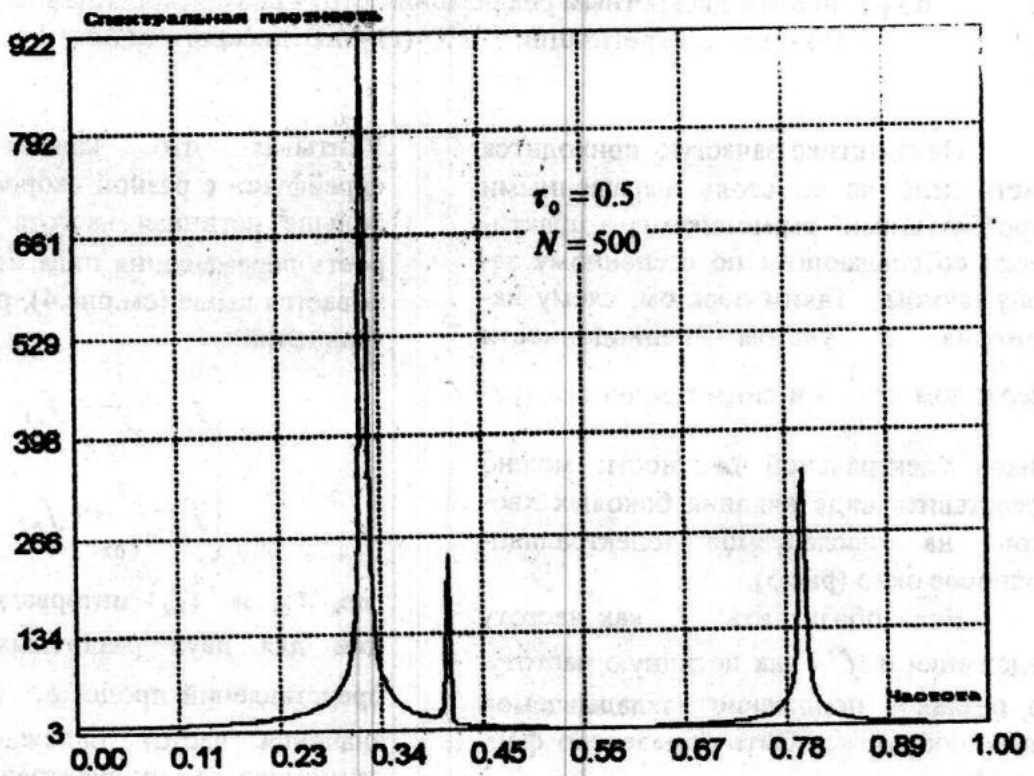
Результаты показывают, что при максимально возможной при построении спектральной плотности частоте среза  $\frac{1}{2\tau_0} > f_i$  гармоники определяются четко и не смещаются в процессе изменения шага дискретизации. При  $\frac{1}{2\tau_0} < f_i$  гармоника выходящей за пределы частотного диапазона накладывается на низкочастотные составляющие и нестабильна в своем положении («дрейфует») с изменением  $\tau_0$ . Характер этого дрейфа можно проследить по изолиниям, ход которых схематически отображен на рис.4.



(а)



(a)



(b)

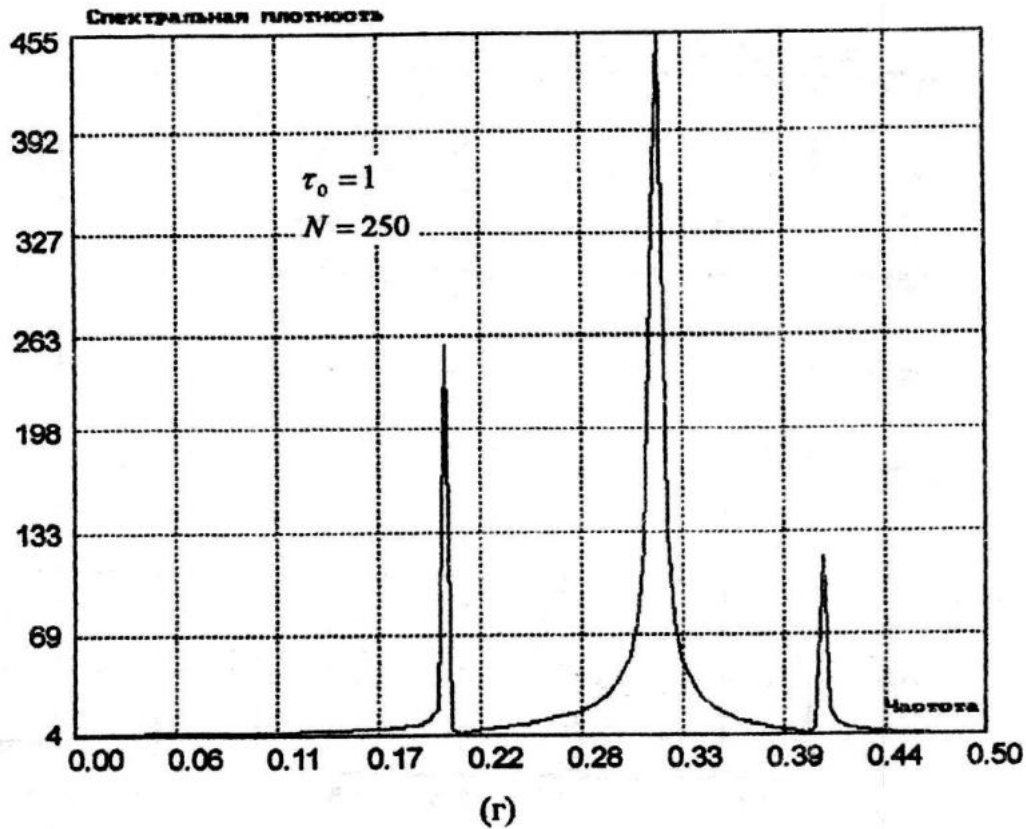


Рис.3. Пример искусственного непрерывного сигнала, полученного смещением трех различных синусоидальных составляющих (а) и его спектральные оценки по различным дискретным реализациям (б) - шаг дискретизации = 0.1, (в) - шаг дискретизации = 0.5, (г) - шаг дискретизации = 1)

На практике зачастую приходится иметь дело не со столь выраженными «дрейфующими» гармониками, а практически со спадающим по степенному закону шумом. Таким образом, схему наложения с учетом периодичности (периодом =  $\frac{1}{\tau_0}$ ) и симметричности графиков спектральной плотности можно представить в виде влияния боковых хвостов на исследуемое спектрально-волновое окно (рис.5).

Если обозначить  $f_n$  как частоту наложения и  $f$  - как истинную частоту, то реальное положение накладываемой гармоники может быть определено формулой:

$$f = \frac{i}{\tau_0} + f_n \text{ или } f = \frac{i}{\tau_0} - f_n \quad (1).$$

Учитывая что каждая гармоника «дрейфует» с разной скоростью, т.е. чем больше истинная частота  $f$ , тем скорость перемещения пика наложения оказывается выше (см.рис.4), решая систему уравнений

$$\begin{cases} f = \frac{i}{\tau_{01}} + f_{n1} \\ f = \frac{i}{\tau_{02}} + f_{n2} \end{cases} \quad (2)$$

где  $\tau_{01}$  и  $\tau_{02}$  - интервалы дискретизации для двух различных дискретных представлений процесса;  $f_{n1}$  и  $f_{n2}$  - значения частот наложения искомой гармоники для их спектральных характеристик, получим искомое значение  $f$  и  $i$  (порядковый номер - см.рис.5):

$$i = \text{round} \left( \frac{f_{n2} - f_{n1}}{\left( \frac{1}{\tau_{01}} - \frac{1}{\tau_{02}} \right)} \right) \quad (3)$$

$$f = \frac{f_{n1} \tau_{01} - f_{n2} \tau_{02}}{\tau_{01} - \tau_{02}} \quad (4)$$

Причем полученное  $i$  может быть откорректировано обратным решением, зная что  $i$  может быть только целым, а найденная ошибка использована для дальнейшего исследования. Формулы (2,3,4) рассчитываются для гармоники смещающейся влево при увеличении интервала дискретизации  $\tau_0$ , т.е. для знака "+" в (1).

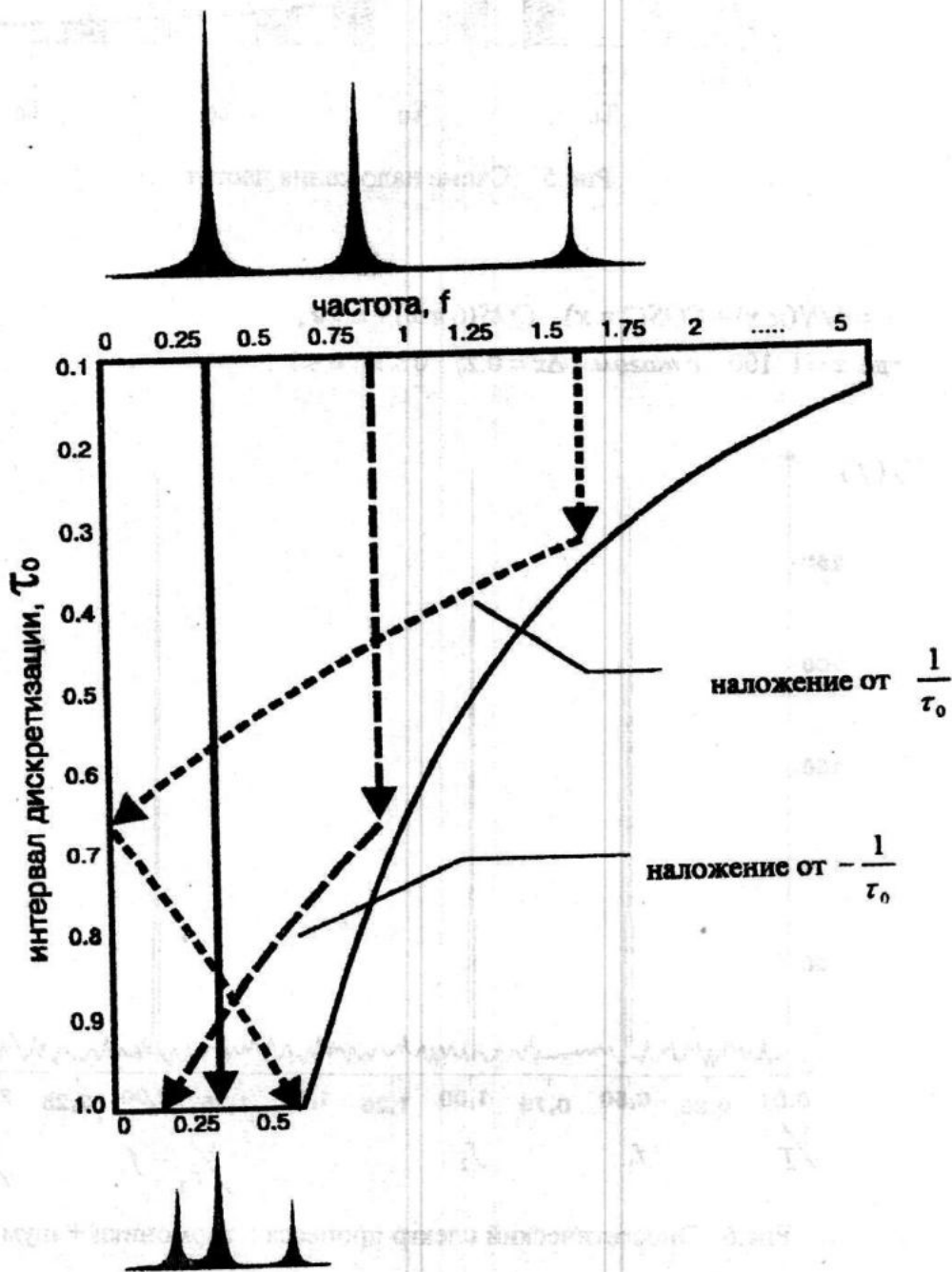


Рис.4. Дрейф спектральных пиков в изолиниях



Рис.5. Схема наложения частот

$$y = \overline{\text{SIN}(\pi x) + \text{COS}(2\pi x) + \text{COS}(6\pi x) + \text{шум}},$$
 где  $x = 1..100$  с шагом  $\Delta x = 0.2$ ;  $0 \leq \text{шум} \leq 1$ :

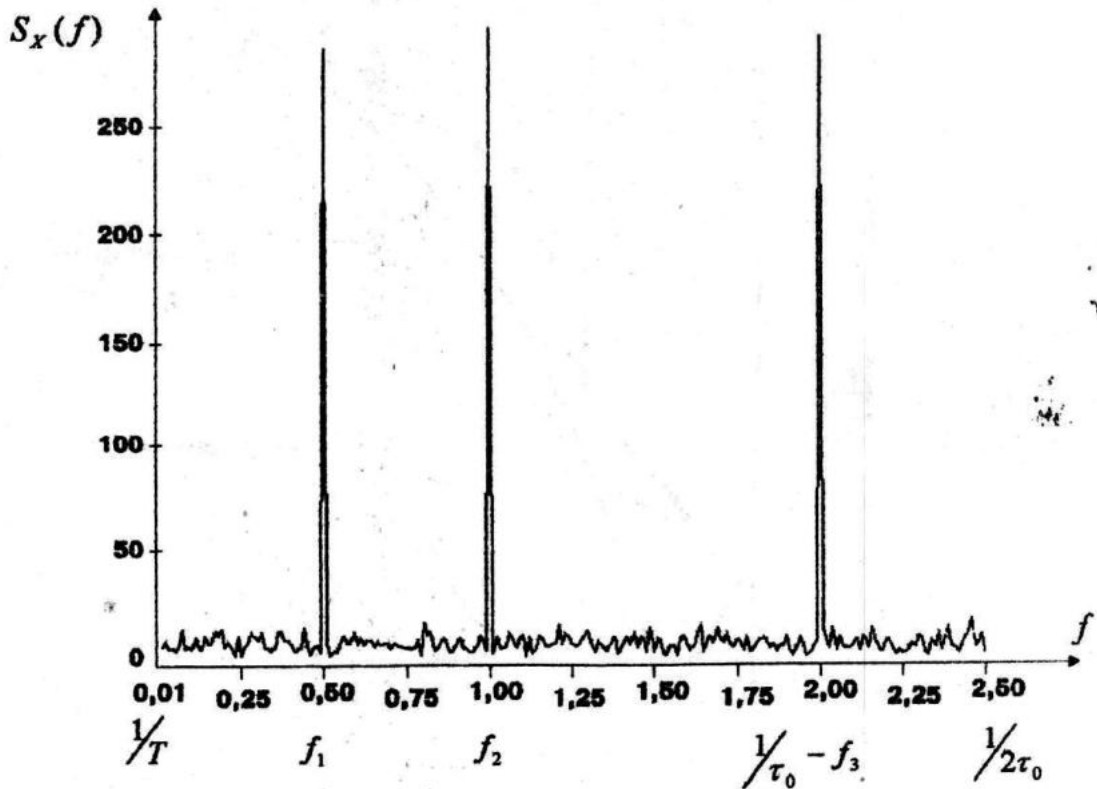


Рис.6. Энергетический спектр процесса : гармоника + шум

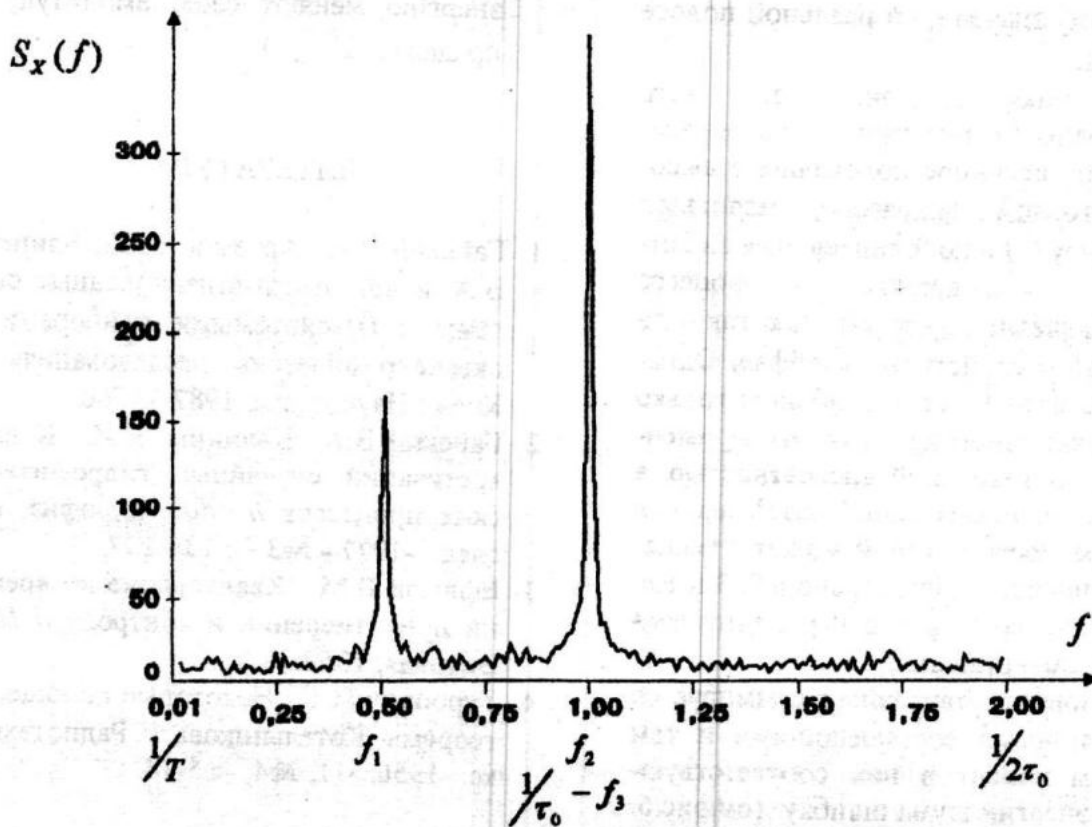


Рис.7. Результат наложения и сложения двух гармоник  $f_2$  и  $f_3$

Для знака "-" (смещение гармоники вправо при увеличении интервала дискретизации  $\tau_0$ ) получим:

$$\begin{cases} f = \frac{i}{\tau_{01}} - f_{n1} \\ f = \frac{i}{\tau_{02}} - f_{n2} \end{cases} \quad (5)$$

$$i = \text{round} \left( \frac{f_{n1} - f_{n2}}{\left( \frac{1}{\tau_{01}} - \frac{1}{\tau_{02}} \right)} \right) \quad (6)$$

$$f = \frac{f_{n2} \tau_{02} - f_{n1} \tau_{01}}{\tau_{01} - \tau_{02}} \quad (7)$$

Рассчитаем спектральную плотность процесса, смоделированного из трех гармоник одинаковой энергии  $E_r$  и различной частоты с добавочным белым

шумом (рис.6) и проведем исследования по поведению гармоник в этой ситуации.

В результате можно сделать следующие выводы по свойствам наложения для спектральных оценок, связанных с дискретизацией исходных данных:

- Если частота тех или иных гармонических колебаний в исследуемом процессе выходит за пределы (выше) диапазона  $f = \frac{1}{T} \dots \frac{1}{2\tau_0}$  спектральной характеристики, то она проявляется в нем одноразовым наложением в частоте, соответствующей указанному выше закону симметрии;
- Спектральная плотность в любой точке соответствует энергетической сумме гармоник данной частоты и всех гармоник эффекта наложения (рис.7);
- Энергия накладываемых гармоник может быть равна (или меньше) ис-

тинному значению в реальной полосе частот;

- Гармоники наложения могут быть выявлены (и возможно даже определено их истинное положение в высокочастотном диапазоне, используя формулу (1) и дополнительные знания об исследуемом процессе (порядковый номер  $i$ )), так как они обладают свойством «дрейфа». Однако это приемлемо в основном только в случае многократных экспериментов с произвольной дискретностью, а не с имеющейся одной базой данных дискретность которой может изменена лишь пропорционально в 2, 3 и т.д. раза, что сразу резко ограничит диапазон обнаружения;
- Шумовая составляющая суммируется с полезными составляющими и тем самым вносит в них соответствующую энергии шума ошибку (см.рис.6. - гармоники, имеющие одинаковую

энергию меняют свою амплитуду в пределах  $\Delta E_{\text{шума}}$ ).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гайский В.А., Артемов Ю.Г., Блинков В.А. и др. Автоматизированные системы с буксируемыми приборами в океанографических исследованиях // Киев : Наук.думка, 1987. -176с.
2. Гайский В.А., Калинина Е.И. К дискретизации случайных гидрофизических процессов // Мор.гидрофиз. исслед. -1977 - №3 - с.134-137.
3. Ефимов В.М. Квантование во времени при измерении и контроле // М. : Энергия, 1969. -87с.
4. Турбович И.Т. Некоторые обобщения теоремы Котельникова // Радиотехника. -1956. -11, №4. -с.5-14.