

# ПОГРЕШНОСТИ ИНТЕРПОЛЯЦИИ ПРОЦЕССОВ С ИЗВЕСТНЫМ СПЕКТРОМ

В.А.Гайский, П.В.Гайский

Морской гидрофизический институт  
НАН Украины  
г.Севастополь, Капитанская,2

Приводятся алгоритмы расчета среднеквадратической погрешности линейной интерполяции непрерывных процессов  $x(t)$  с известной или вычисляемой функцией спектральной плотности  $S_x(f)$ , заданных конечным рядом отсчетов  $x(t_i)$ ,  $i = \overline{0, n}$  и восстанавливаемых в точке  $\tau$  по выражению

$$x(\tau) = \sum_{i=0}^n a_i(\tau) x(t_i), \quad (1)$$

где  $a_i(\tau)$  - вес отсчета  $x(t_i)$  процесса,  $\tau$  и  $t_i$  в интервале  $[t_-, t_+]$ . Приводятся графики амплитудно-частотных характе-

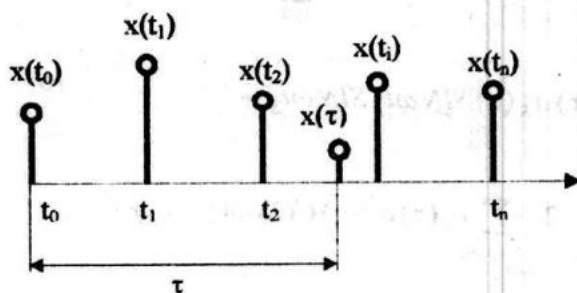


Рис.1. Схема интерполяции

Для среднеквадратической погрешности интерполяции  $\varepsilon_\tau^{-2}$  справедливо:

$$\varepsilon_\tau^{-2} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty |G_{\varepsilon_\tau}(p)|^2 S_x(\omega) d\omega, \quad (4)$$

где  $S_x(\omega)$  - спектр интерполируемого процесса,  $|G_{\varepsilon_\tau}(p)|^2$  - квадрат модуля амплитудно-частотной характеристики

ростик эквивалентных схем погрешности различных интерполяторов.

Интерполяторы, описываемые выражением 1 [1-5], имеют передаточную функцию вида (рис.1).

$$G_\tau(p) = \sum_{i=0}^n a_i(\tau) e^{-pt_i} \quad (2).$$

Погрешность интерполяторов удобно определить из эквивалентной структурной схемы погрешности [6], представленной на рис.2 и в развернутом виде на рис.3, где  $e^{-pt_i}$  - передаточные функции задержки  $t_i$  отсчета  $x(t_i)$  процесса от 0-го отсчета,  $e^{-p\tau}$  - передаточная функция задержки  $\tau$  до точки интерполяции. Для передаточной функции эквивалентной схемы погрешности  $\varepsilon_\tau$  интерполятора можем записать:

$$G_{\varepsilon_\tau}(p) = e^{-p\tau} - \sum_{i=0}^n a_i(\tau) e^{-pt_i} \quad (3).$$

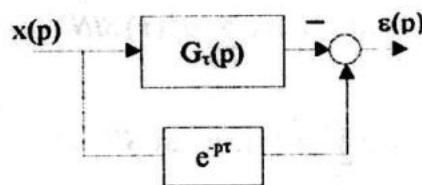


Рис.2. Эквивалентная структурная схема погрешности интерполяции

схемы погрешности (АЧХ СП). Можем записать из выражения 3:

$$G_{\varepsilon_\tau}(j\omega) = \cos \omega \tau + \sum_{i=0}^n a_i(\tau) \cos \omega t_i + j \left[ \sum_{i=0}^n a_i(\tau) \sin \omega t_i - \sin \omega \tau \right], \quad (5)$$

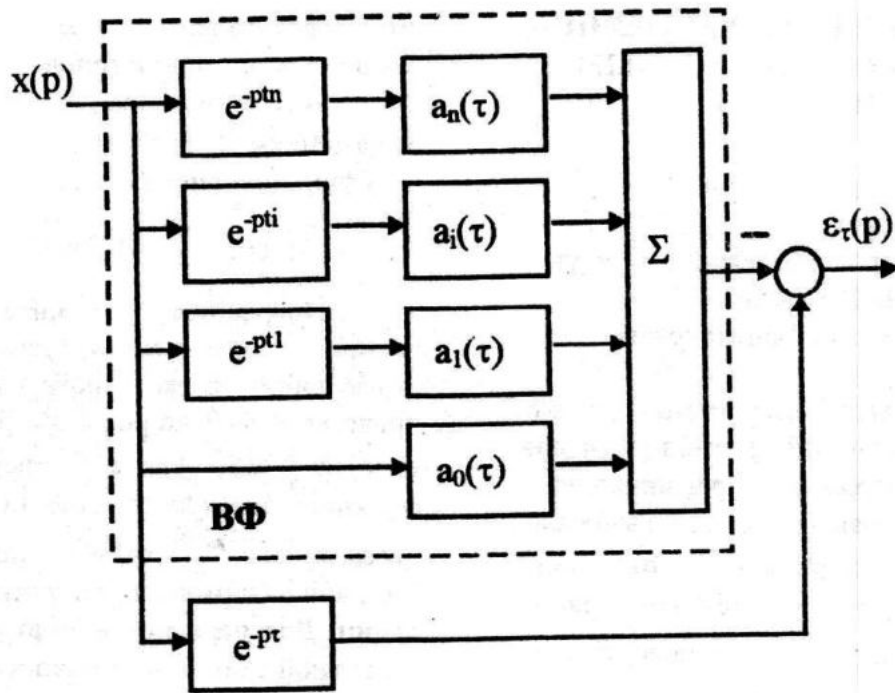


Рис.3. Развернутая эквивалентная структурная схема погрешности интерполяции

$$\begin{aligned}
 |G_{\epsilon_\tau}(j\omega)|^2 &= \left[ \cos \omega\tau - \sum_{i=0}^n a_i(\tau) \cos \omega t_i \right]^2 + \left[ \sum_{i=0}^n a_i(\tau) \sin \omega t_i - \sin \omega\tau \right]^2 = \cos^2 \omega\tau + \\
 &+ \sum_{i=0}^n a_i^2(\tau) \cos^2 \omega t_i + 2 \sum_{\substack{i, s \in \{0, n\} \\ i \neq s}} a_i(\tau) a_s(\tau) \cos \omega t_i \cos \omega t_s - 2 \sum_{i=0}^n a_i(\tau) \cos \omega\tau \cos \omega t_i + \\
 &+ \sin^2 \omega\tau + \sum_{i=0}^n a_i^2(\tau) \sin^2 \omega t_i + 2 \sum_{\substack{i, s \in \{0, n\} \\ i \neq s}} a_i(\tau) a_s(\tau) \sin \omega t_i \sin \omega t_s - \\
 &- 2 \sum_{i=0}^n a_i(\tau) \sin \omega\tau \sin \omega t_i = 1 + \sum_{i=0}^n a_i^2(\tau) + 2 \sum_{\substack{i, s \in \{0, n\} \\ i \neq s}} a_i(\tau) a_s(\tau) \cos \omega(t_i - t_s) - \\
 &- 2 \sum_{i=0}^n a_i(\tau) \cos \omega(\tau - t_i)
 \end{aligned} \tag{6}$$

Окончательно для среднеквадратической погрешности интерполяции  $\bar{\epsilon}_\tau$  в точку  $\tau$  из выражений 4 и 6 получим :

$$\begin{aligned}
 \bar{\epsilon}_\tau^2 &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left[ 1 + \sum_{i=0}^n a_i^2(\tau) - 2 \sum_{i=0}^n a_i(\tau) \cos \omega(\tau - t_i) + 2 \sum_{\substack{i, s \in \{0, n\} \\ i \neq s}} a_i(\tau) a_s(\tau) \cos \omega(t_i - t_s) \right] S_X(\omega) d\omega = \\
 &= 2 \left[ 1 + \sum_{i=0}^n a_i^2(\tau) \right] \int_0^\infty S_X(f) df - 4 \sum_{i=0}^n a_i(\tau) \int_0^\infty S_X(f) \cos 2\pi f(\tau - t_i) df +
 \end{aligned} \tag{7a}$$

$$\begin{aligned}
 & -4 \sum_{\substack{i, s \in \{0, n\} \\ i < s}} a_i(\tau) a_s(\tau) \int S_X(f) \cos 2\pi f(t_i - t_s) df = 2 \left[ 1 - \sum_{i=0}^n a_i^2(\tau) \right] \sigma_x^2 + 4 \sum_{\substack{i, s \in \{0, n\} \\ i < s}} a_i(\tau) a_s(\tau) K_X(\tau - t_i) + \\
 & + 4 \sum_{\substack{i, s \in \{0, n\} \\ i < s}} a_i(\tau) a_s(\tau) K_X(t_i - t_s), \tag{76}
 \end{aligned}$$

где  $K_X(\tau - t_i)$  и  $K_X(t_i - t_s)$  - корреляционные функции процесса при сдвигах  $(\tau - t_i)$  и  $(t_i - t_s)$ ;  $\sigma_x^2$  - дисперсия процесса.

Для интегральной средней на интервале интерполяции  $[t_-, t_+]$  среднеквадратической погрешности  $\bar{\varepsilon}$  получим:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{t_+ - t_-} \int_{t_-}^{t_+} \varepsilon_\tau d\tau \tag{8}$$

Таким образом, для вычисления погрешности интерполяции  $\bar{\varepsilon}_\tau$  необходимо знать: весовые коэффициенты отсчетов  $a_i(\tau)$ ; расстояние между отсчетами  $t_i$ ; спектр  $S_X(f)$  (выражение 7а) или значения корреляционных функций  $K_X(\tau - t_i)$  и  $K_X(t_i - t_s)$  (выражение 7б) процесса.

При дискретизации процесса с равномерным шагом  $\tau_0$  можем записать  $t_i = i\tau_0$ . Тогда  $K_X(t_i - t_s) = K_X[\tau_0(i - s)]$  и это значение корреляционной функции может быть вычислено из ряда отсчетов стационарного процесса. Для получения значения  $K_X(\tau - t_i)$ , которое не может быть вычислено из исходного ряда отсчетов процесса, необходима интерпо-

ляция вычисленных с шагом  $\tau_0$  значений корреляционной функции  $K_X(i\tau_0)$  в точку  $(\tau - t_i)$  или вычисление обратным преобразованием Фурье из функции спектральной плотности  $S_X(f)$  процесса известной априорно или вычисленной из некоторого ряда. Таким образом, знание или вычисление спектра процесса  $S_X(f)$  необходимо.

Оптимальная интерполяция

Из выражения 7 могут быть определены оптимальные весовые коэффициенты  $\tilde{a}_i(\tau)$ , при которых значение  $\bar{\varepsilon}_\tau^2$  принимает минимальное значение. Берем производные  $\frac{\partial \bar{\varepsilon}_\tau^2}{\partial a_i}$  от уравнений 7, приравниваем их к нулю и получаем систему из  $(n+1)$  линейных алгебраических уравнений для определения  $(n+1)$  оптимальных коэффициентов  $\tilde{a}_i$  ( $i = \overline{0, n}$ ). Система уравнений в спектральной форме имеет вид:

$$\begin{aligned}
 \tilde{a}_i(\tau) \int_0^\infty S_X(f) df + \sum_{\substack{s=0 \\ s \neq i}}^n \tilde{a}_s(\tau) \int_0^\infty S_X(f) \cos 2\pi f(t_i - t_s) df = \int_0^\infty S_X(f) \cos 2\pi f(\tau - t_i) df, \tag{9} \\
 i = \overline{0, n}
 \end{aligned}$$

Система уравнений в корреляционной форме имеет вид:

$$\begin{aligned}
 \tilde{a}_i(\tau) + \sum_{\substack{s=0 \\ s \neq i}}^n \tilde{a}_s(\tau) K_X(t_i - t_s) = \\
 = K_X(\tau - t_i) \tag{10}
 \end{aligned}$$

где  $i = \overline{0, n}$ ;  $K_X(t_i - t_s)$  и  $K_X(\tau - t_i)$  - нормированные корреляционные функции (коэффициенты корреляции), меньшие 1.

Расширенная матрица системы 10 имеет вид

$$\begin{vmatrix} 1 & K_X(t_0 - t_1) & K_X(t_0 - t_2) & \dots & K_X(t_0 - t_n) & K_X(\tau - t_0) \\ K_X(t_1 - t_0) & 1 & K_X(t_1 - t_2) & \dots & K_X(t_1 - t_n) & K_X(\tau - t_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_X(t_n - t_0) & K_X(t_n - t_1) & K_X(t_n - t_2) & \dots & 1 & K_X(\tau - t_n) \end{vmatrix} \quad (11)$$

Определив оптимальные весовые коэффициенты  $\tilde{a}_i(\tau)$ , подставляем их в формулы 7 и 8 для вычисления погрешности оптимальной интерполяции.

Рассмотрим наиболее распространенный случай процесса с ограниченным спектром :

$$S_X(f) = \begin{cases} S_X, & \text{при } -f_m \leq f \leq f_m \\ 0, & \text{при } -f_m > f > f_m \end{cases} \quad (12)$$

Составим систему уравнений для весов оптимальной интерполяции  $\tilde{a}_i$  для спектральной формы (выражение 9), учитывая из выражения 12, что

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} S_X(f) df &= \int_0^{f_m} S_X(f) df = S_X f_m \\ \int_0^{\infty} S_X(f) \cos 2\pi f(t_i - t_s) df &= \int_0^{f_m} S_X(f) \cos 2\pi f(t_i - t_s) df = S_X f_m \operatorname{Si}[2\pi f_m(t_i - t_s)] \end{aligned} \quad (13)$$

Для  $n=1$  (интерполяция по двум узлам) получим :

$$\begin{cases} \tilde{a}_0(\tau) + \tilde{a}_1(\tau) \operatorname{Si}(2\pi f_m \tau_0) = \operatorname{Si}(2\pi f_m \tau) \\ \tilde{a}_0(\tau) \operatorname{Si}(2\pi f_m \tau_0) + \tilde{a}_1(\tau) = \operatorname{Si}[2\pi f_m(\tau_0 - \tau)] \end{cases} \quad (14)$$

Из решения этой системы для коэффициентов получим :

$$\begin{aligned} \tilde{a}_0(\tau) &= \frac{\operatorname{Si}(2\pi f_m \tau) - \operatorname{Si}(2\pi f_m \tau_0) \operatorname{Si}[2\pi f_m(\tau_0 - \tau)]}{1 - \operatorname{Si}^2(2\pi f_m \tau_0)} \\ \tilde{a}_1(\tau) &= \frac{\operatorname{Si}[2\pi f_m(\tau_0 - \tau)] - \operatorname{Si}(2\pi f_m \tau) \operatorname{Si}(2\pi f_m \tau_0)}{1 - \operatorname{Si}^2(2\pi f_m \tau_0)} \end{aligned} \quad (15)$$

$$\text{Упростим выражения, принимая } f_m = \frac{1}{2\tau_0} \quad (16)$$

(условие теоремы отсчетов Найквиста-Котельникова).

Тогда можем записать

$$\begin{aligned} \tilde{a}_0(\tau) &= \frac{\operatorname{Si}\left(\frac{\pi\tau}{\tau_0}\right) - \operatorname{Si}(\pi) \operatorname{Si}\left[2\pi\left(1 - \frac{\tau}{\tau_0}\right)\right]}{1 - \operatorname{Si}^2(\pi)} = \operatorname{Si}\left(\frac{\pi\tau}{\tau_0}\right) \\ \tilde{a}_1(\tau) &= \operatorname{Si}\left[\pi\left(1 - \frac{\tau}{\tau_0}\right)\right] \end{aligned} \quad (17)$$

С учетом условия 13 и 16 и, принимая во внимание, что  $\operatorname{Si}(i\pi) = 0$ , система уравнений примет вид

$$\tilde{a}_i(\tau) + \sum_{\substack{s=0 \\ s \neq i}}^{\infty} \tilde{a}_s(\tau) \operatorname{Si}[\pi(i - s)] = \operatorname{Si}\left[\pi\left(i - \frac{\tau}{\tau_0}\right)\right], \quad i = \overline{0, n} \quad (18)$$

Поскольку  $\sum_{\substack{s=0 \\ s \neq i}}^{\infty} \tilde{a}_s(\tau) Si[\pi(i-s)] = 0$ , то

весовые коэффициенты соответствуют формуле Котельникова

$$\tilde{a}_i(\tau) = Si[\pi(i - \frac{\tau}{\tau_0})], \quad i = \overline{0, n} \quad (19)$$

Таким образом, для процессов с ограниченным спектром оптимальная интерполяция по любому числу узлов  $n$  соответствует формуле Котельникова.

Как следует из выше изложенного, оптимальная интерполяция и оценка ее погрешностей требует достаточно много исходных данных и вычислений и для нестационарных процессов не имеет смысла. С другой стороны, известны многие формулы интерполяции с весовыми коэффициентами, полученными из других соображений, и полезно иметь наглядное представление о них как фильтрах в частотной области. Для этого необходимо подставить значения весовых

коэффициентов  $a_i(\tau)$  в выражение 6 и построить АЧХ СП. Погрешность интерполяции формирует та часть спектра процесса  $S_X(f)$ , которая попадает в полосу АЧХ СП.

Амплитудно-частотные характеристики эквивалентных схем погрешностей (АЧХ СП) для типовых формул интерполяции [7]

Для наглядности примем равномерную дискретизацию процесса с шагом  $\tau_0$ , т.е.  $t_i = i\tau_0$ .

**Полином 0-го порядка :**

$$x(\tau) = x(t_0), \quad \tau = \overline{0, \tau_0} \quad (20)$$

$$a_0(\tau) = 1, \quad a_i = 0, \quad i \neq 0$$

$$|G_{\text{ст}}(j\omega)|^2 = 4 \text{SIN}^2 2\pi f\tau \quad (21)$$

График АЧХ СП интерполяции 0-го порядка представлен на рис.4.

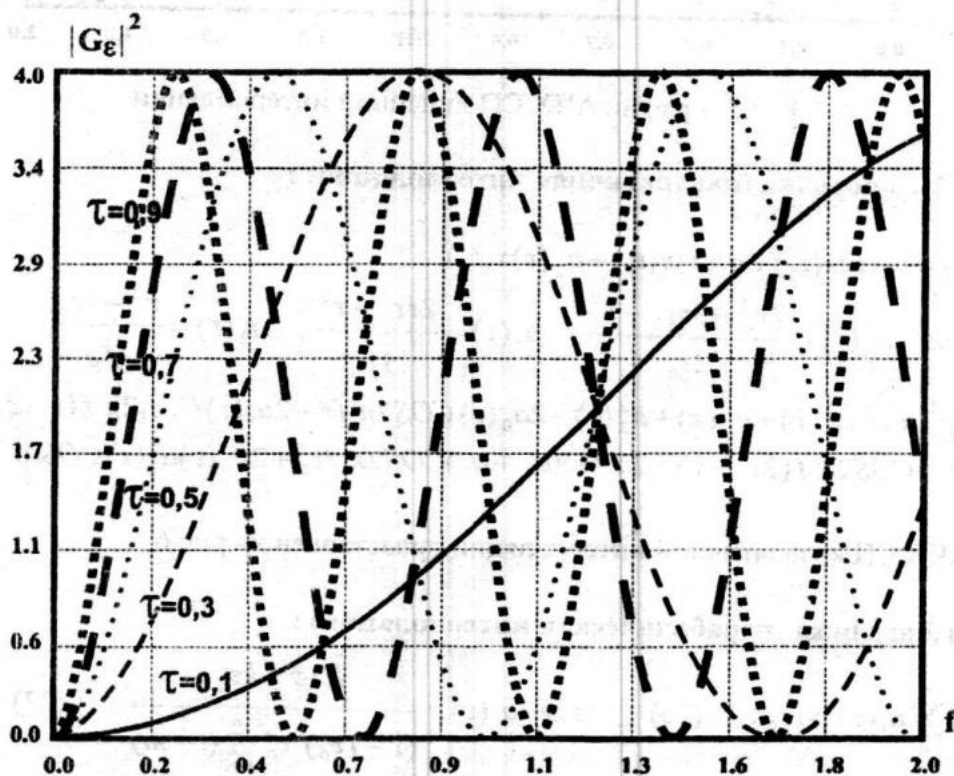


Рис.4. График АЧХ СП интерполяции 0-го порядка

**Полином 1-го порядка (линейная интерполяция) :**

$$x(\tau) = a_0(t_0)x(t_0) + a_1(t_1)x(t_1), \quad \text{где } a_0(\tau) = (1 - \frac{\tau}{\tau_0}); \quad a_1(\tau) = \frac{\tau}{\tau_0} \quad (22)$$

$$|G_{sr}(j\omega)|^2 = 1 + a_0^2(\tau) + a_1^2(\tau) - 2a_0 \cos 2\pi f\tau + 2a_0 a_1 \cos 2\pi f\tau_0 - 2a_1 \cos 2\pi f(\tau - \tau_0) \quad (23)$$

График АЧХ СП линейной интерполяции представлен на рис.5.

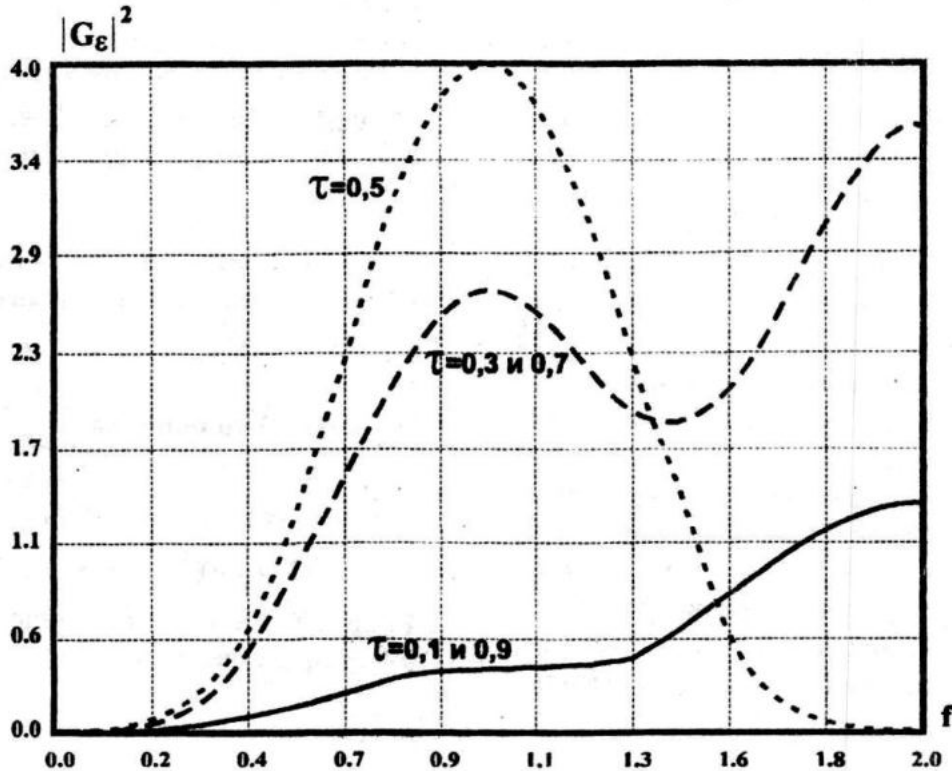


Рис.5. График АЧХ СП линейной интерполяции

Полином 2-го порядка (квадратичная интерполяция):

$$x(\tau) = a_0(\tau)x(t_0) + a_1(\tau)x(t_1) + a_2(\tau)x(t_2),$$

$$\text{где } a_0(\tau) = \frac{2\tau_0^2 - 3\tau\tau_0 + \tau^2}{2\tau_0^2}; \quad a_1(\tau) = \frac{2\tau\tau_0 - \tau^2}{\tau_0^2}; \quad a_2(\tau) = \frac{\tau^2 - \tau\tau_0}{2\tau_0^2} \quad (24)$$

$$|G_{sr}(j\omega)|^2 = 1 + a_0^2(\tau) + a_1^2(\tau) + a_2^2(\tau) - 2a_0(\tau)\cos 2\pi f\tau - 2a_1(\tau)\cos 2\pi f(\tau - \tau_0) - 2a_2(\tau)\cos 2\pi f(2\tau_0 - \tau) + 2a_1(\tau)(a_0 + a_2)\cos 2\pi f\tau_0 + 2a_0(\tau)a_2(\tau)\cos 4\pi f\tau_0 \quad (25)$$

График АЧХ СП квадратичной интерполяции представлен на рис.6.

Формула Лагранжа (параболическая интерполяция):

$$x(\tau) = \sum_{i=0}^n a_i(\tau)x(i\tau_0), \quad (26) \quad \text{где } a_i(\tau) = \frac{\prod_{k=0, k \neq i}^n (\tau - k\tau_0)}{(\tau - i\tau_0) \tau_0^n \prod_{\substack{m=0 \\ m \neq i}}^n (i - m)} \quad (27)$$

Графики АЧХ СП параболической интерполяции по формуле Лагранжа в интервале  $\tau = \overline{0, \tau_0}$ :

- для 3-точек - на рис.7;
- для 4-точек - на рис.8;

для 5-точек - на рис.9.

Из анализа графиков можно сделать вывод, что увеличение числа узлов интерполяции не приводит к существенному сужению полосы частот для погрешности.

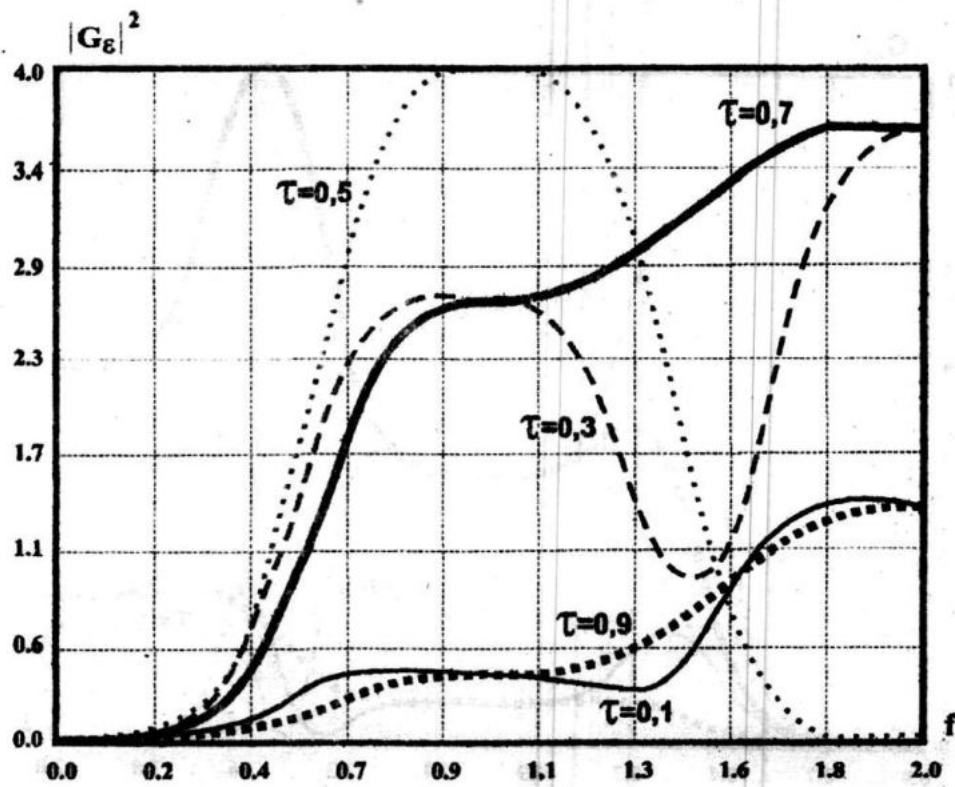


Рис.6. График АЧХ СП квадратичной интерполяции

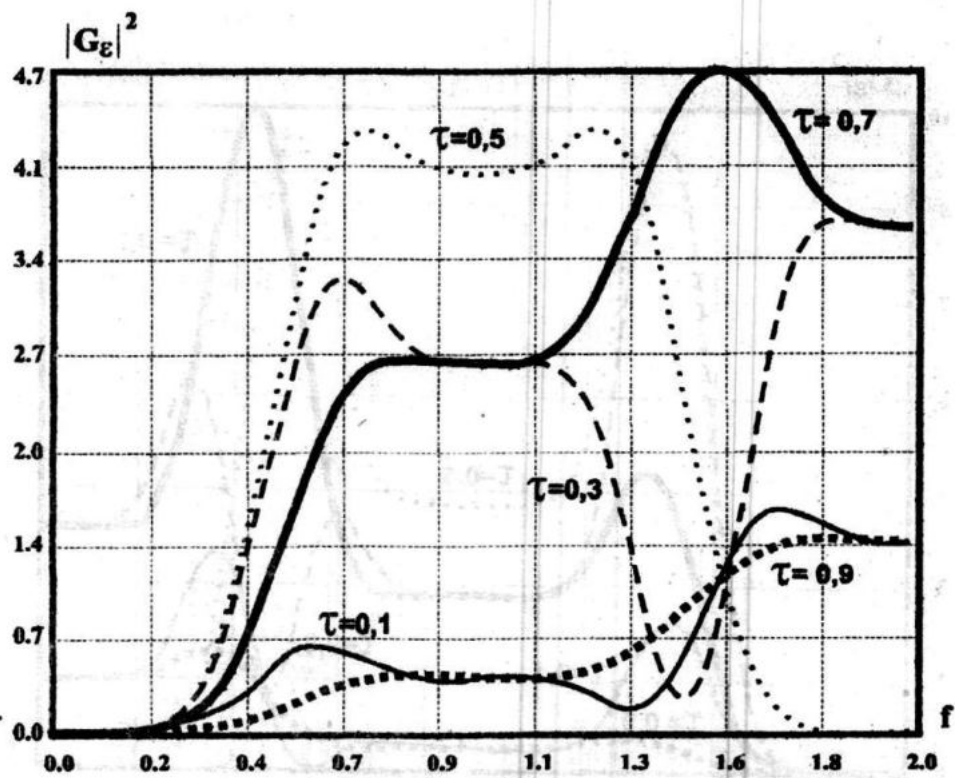


Рис.7. График АЧХ СП параболической интерполяции по формуле Лагранжа для 3-точек

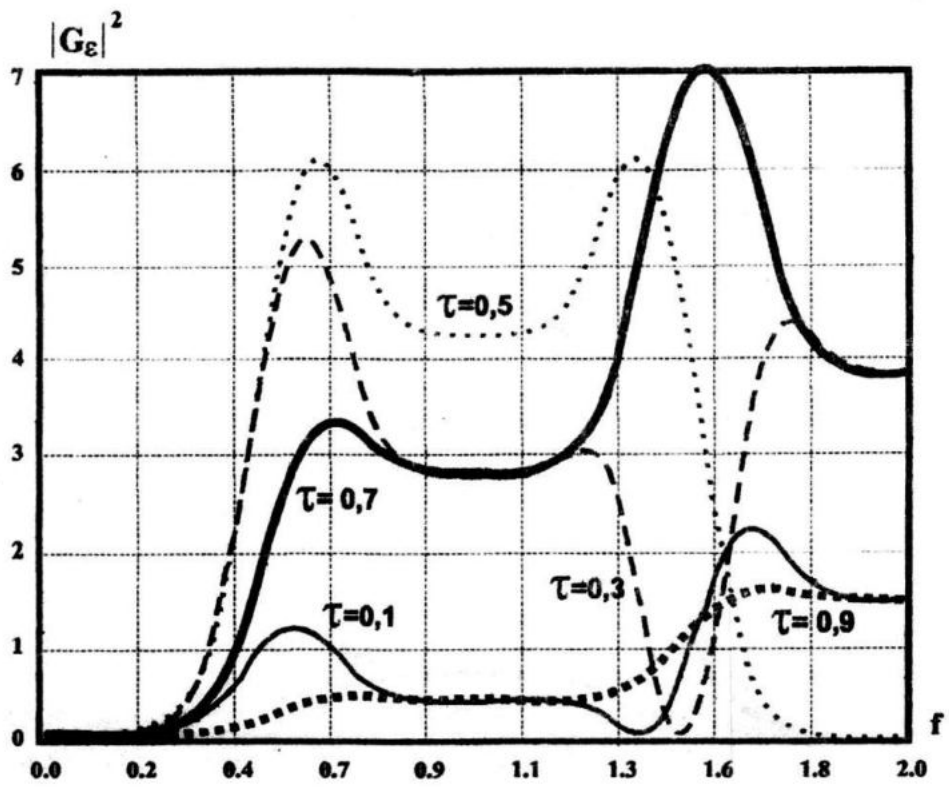


Рис.8. График АЧХ СП параболической интерполяции по формуле Лагранжа для 4-точек

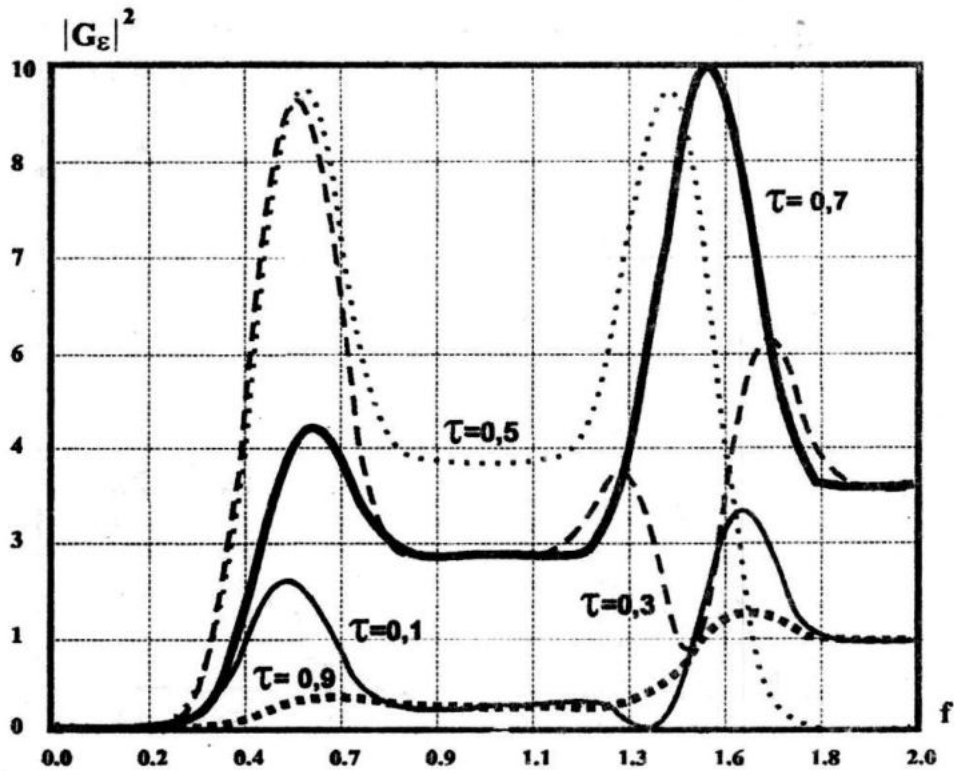


Рис.9. График АЧХ СП параболической интерполяции по формуле Лагранжа для 5-точек



**Формула Гаусса (тригонометрическая интерполяция) :**

$$x(\tau) \approx \sum_{i=0}^{2n} a_i(\tau) x(t_i), \quad (28) \quad \text{где } a_i(\tau) = \frac{\prod_{k=0, k \neq i}^{i-1} \sin\left[\frac{1}{2}(\tau - k\tau_0)\right] \prod_{m=i+1}^{2n} \sin\left[\frac{1}{2}(\tau - m\tau_0)\right]}{\prod_{k=1}^{i-1} \sin\left[\frac{1}{2}(i-k)\tau_0\right] \prod_{m=i+1}^{2n} \sin\left[\frac{1}{2}(i\tau_0 - m\tau_0)\right]}$$

(29)

Графики АЧХ СП тригонометрической интерполяции представлены :

- для  $2n+1=3$  точек - на рис.10;
- для  $2n+1=5$  точек - на рис.11;
- для  $2n+1=7$  точек - на рис.12.

Из сравнения графиков АЧХ СП для параболической и тригонометрической интерполяции для равного числа узлов интерполяции следует, что первая имеет более узкую полосу частот для погрешности и поэтому предпочтительнее.

**Формула Котельникова (оптимальная интерполяция) для процессов с ограниченным спектром :**

$$x(\tau) = \sum_{i=0}^n a_i(\tau) x(i\tau_0), \quad (30) \quad \text{где } a_i(\tau) = \frac{\text{SIN}\left[\pi\left(i - \frac{\tau}{\tau_0}\right)\right]}{\pi\left(i - \frac{\tau}{\tau_0}\right)} \quad (31)$$

Графики АЧХ СП оптимальной интерполяции представлены :

- для  $n=1$  на рис.13;
- для  $n=2$  на рис.14;
- для  $n=5$  на рис.15;
- для  $n=6$  на рис.16.

Из графиков для оптимальной видно подавление шумов интерполяции с ростом  $n$  в полосе  $[0 \div 0,5\tau_0^{-1}]$ .

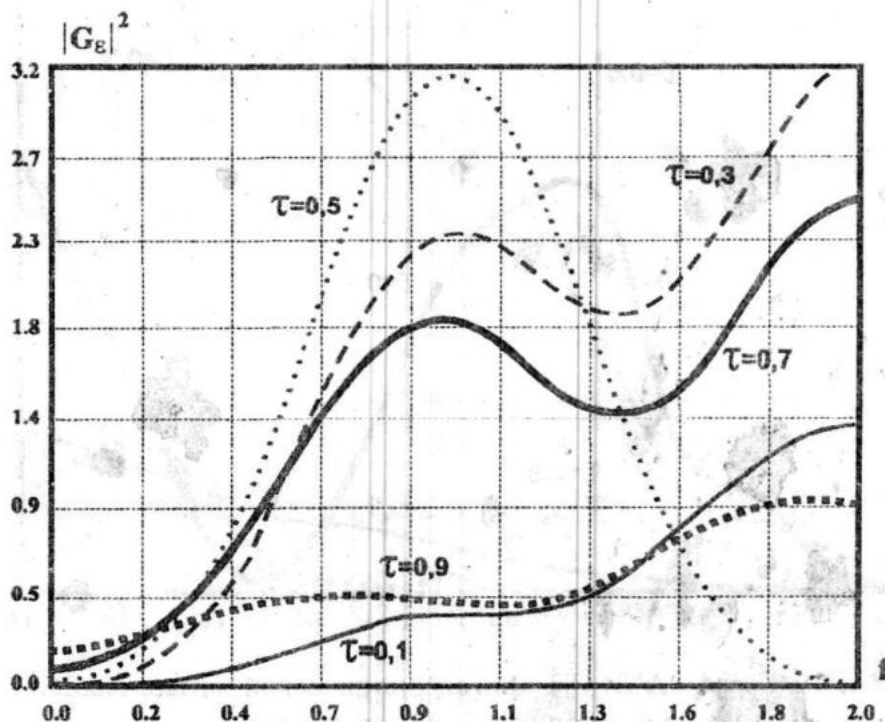


Рис.10. График АЧХ СП тригонометрической интерполяции по формуле Гаусса для 3-точек

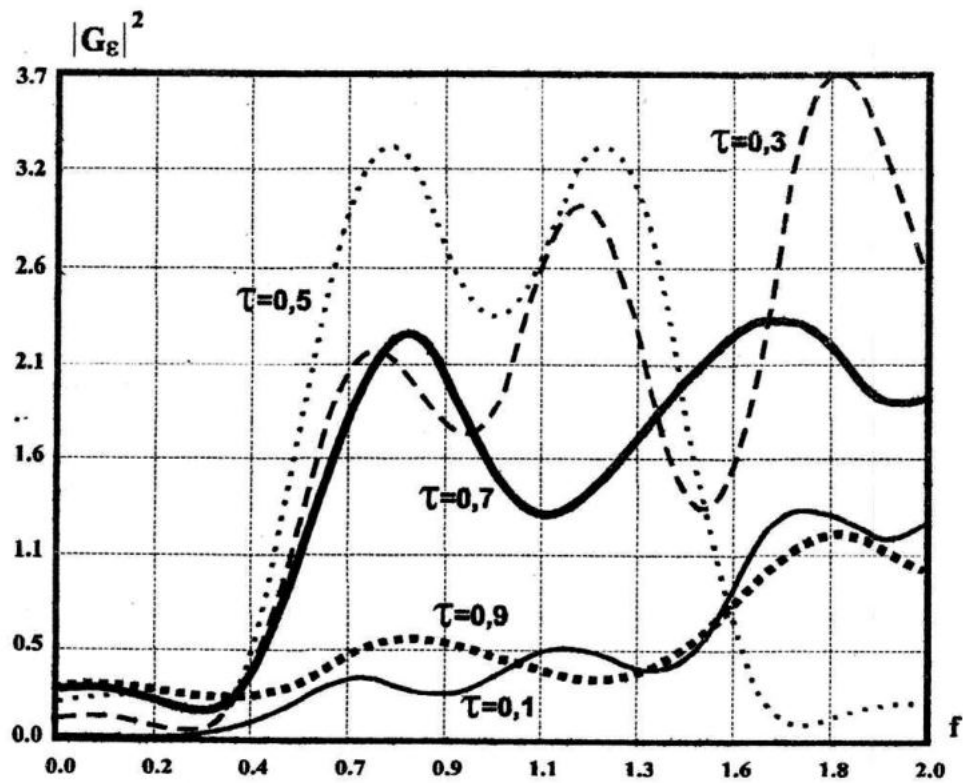


Рис. 11. График АЧХ СП тригонометрической интерполяции по формуле Гаусса для 5-точек

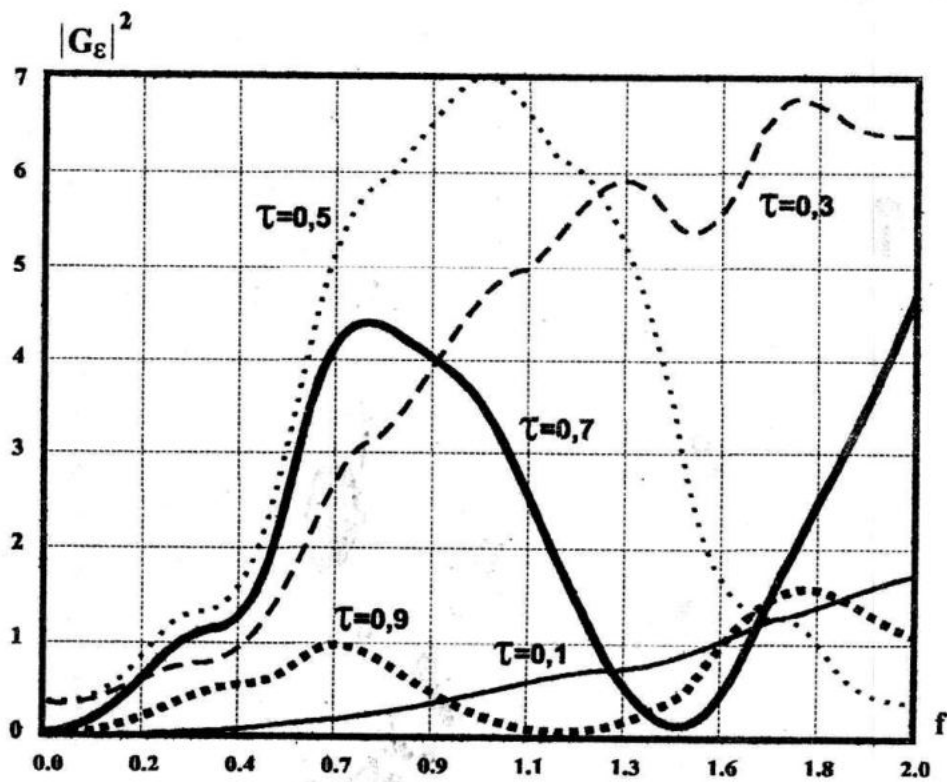


Рис. 12. График АЧХ СП тригонометрической интерполяции по формуле Гаусса для 7-точек

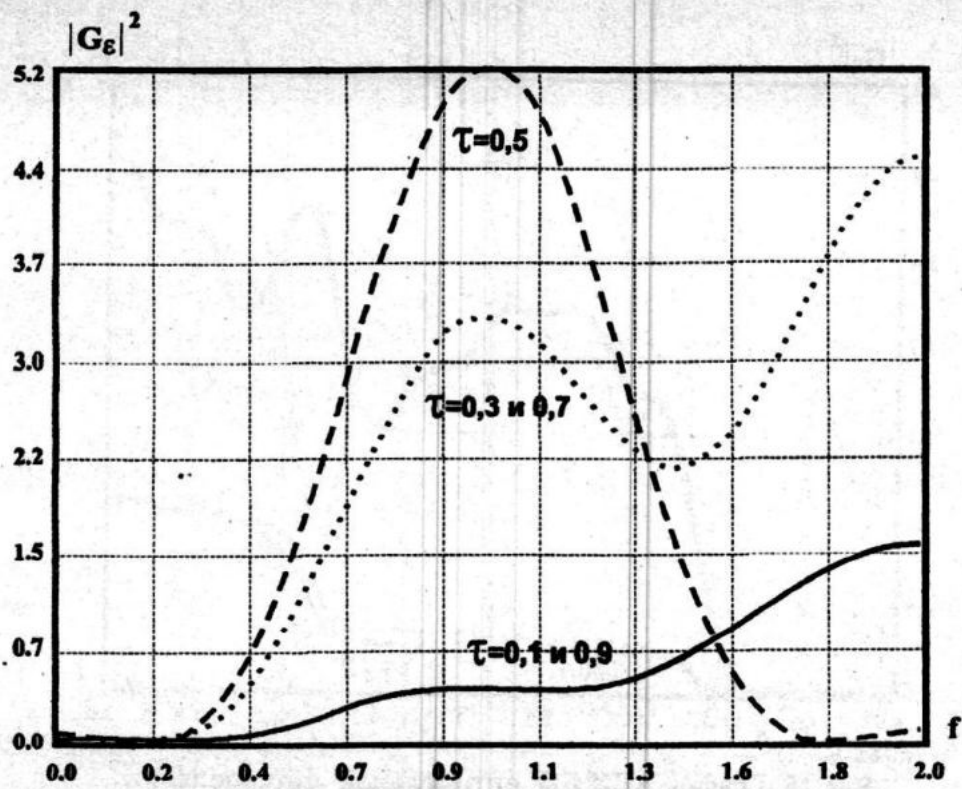


Рис. 13. График АЧХ СП оптимальной интерполяции по формуле Котельникова для  $n=1$

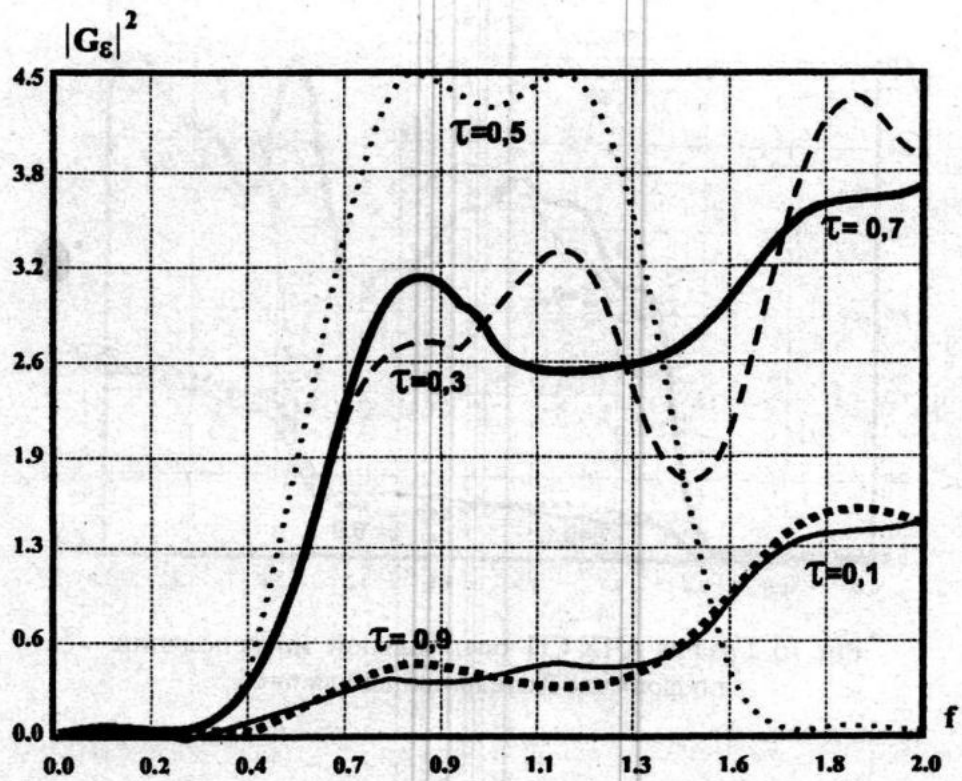


Рис. 14. График АЧХ СП оптимальной интерполяции по формуле Котельникова для  $n=2$

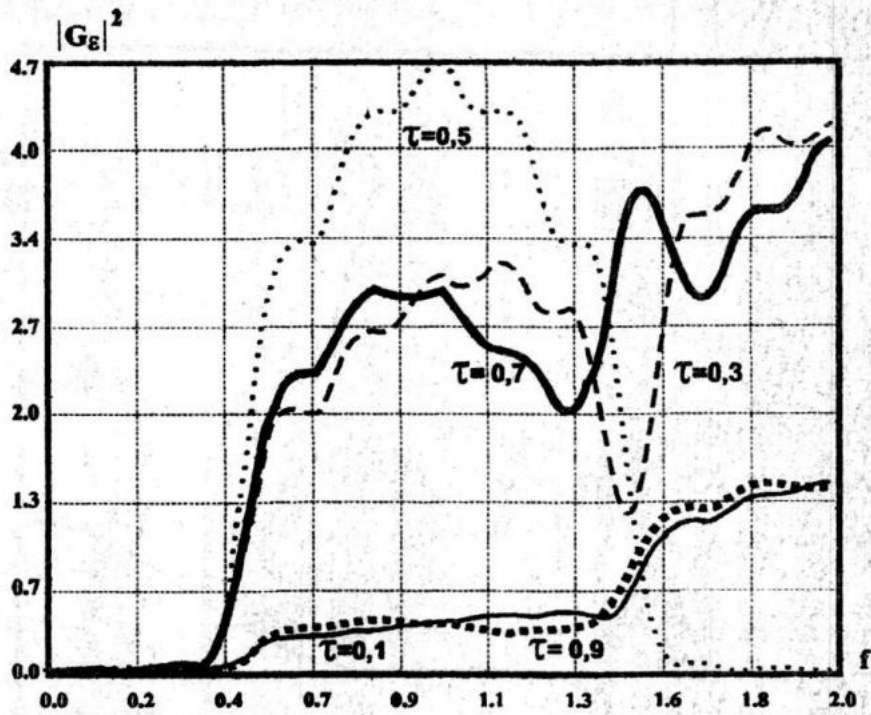


Рис. 15. График АЧХ СП оптимальной интерполяции по формуле Котельникова для  $n=5$

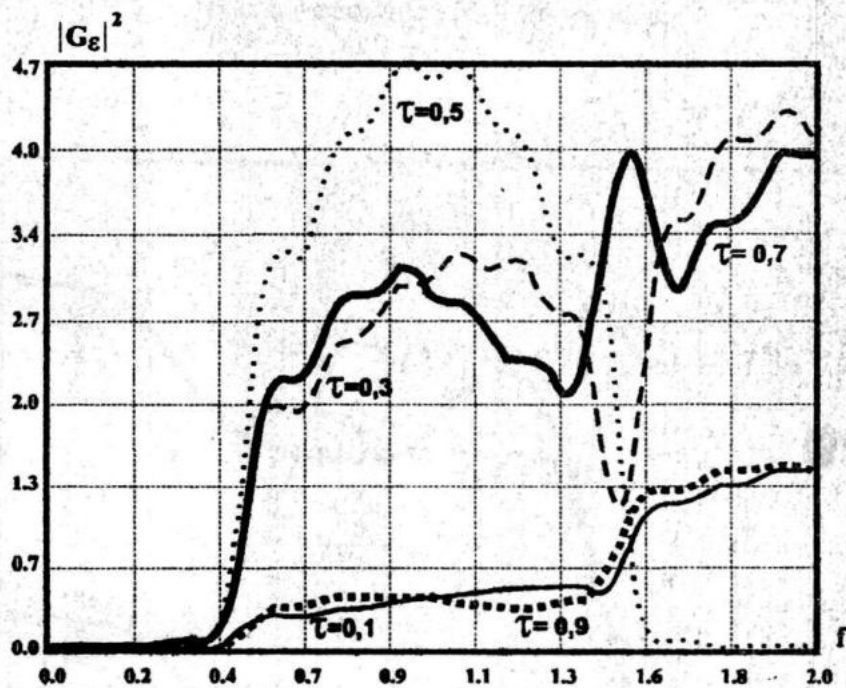


Рис. 16. График АЧХ СП оптимальной интерполяции по формуле Котельникова для  $n=6$

Коррекция наложения частот  
(элайзинга)

Если не выполняется условие теоремы отсчетов (16) и  $f_m > 0,5f_0$ , то

имеет место наложение частот и вызванная этим погрешность дискретизации. Обычно она считается неустранимой. Однако это не так. При регулярной дискретизации с частотой  $f_{OK} = \tau_{OK}^{-1}$  для

спектра дискретизированного сигнала справедливо

$$X_k^*(f) = \frac{1}{\tau_{ок}} \cdot \left\{ \sum_{i=0}^{n_k} [X(if_{ок} - f) + X(if_{ок} + f)] \right\}, \quad (32)$$

где  $f = 0, \frac{N_k}{2T}, n_k \cong \frac{f_m - f_{ок}}{f_{ок}},$

$$f_{ок} = \frac{N_k}{T}, \tau_{ок} = \frac{T}{N_k}, N_k = \frac{N}{k},$$

$X(\bullet)$  - истинная спектральная составляющая сигнала,  $N$  - число отсчетов исходного ряда длиной  $T$ . Спектр  $X_k^*(f)$  вычисляется по  $N_k$  отсчетам ряда  $x(ik\tau_0)$ , полученного прореживанием исходного ряда  $x(i\tau_0)$  через  $k$  отсчетов. Вычисляется  $K$  спектров по  $(\frac{N}{2K} + 1)$  составляющих. Это дает общее

число  $M$  уравнений вида 32 :

$$M = \left(\frac{N}{2} + 1\right) + \left(\frac{N}{2 \cdot 2} + 1\right) + K + \left(\frac{N}{2 \cdot K} + 1\right) = \quad (33)$$

$$= K + \frac{N}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + K + \frac{1}{K}\right) \cong K + \frac{N}{2} \ln K$$

Фактически  $M$  может быть равно сумме всех делителей числа  $\frac{N}{2}$  плюс число де-

лителей числа  $\frac{N}{2}$ . Из теории чисел известно, что сумма делителей числа растет быстрее, чем число примерно в  $\ln N$  раз. Учитывая, что  $k \leq \frac{N}{4}$ , для достаточно больших  $N$  из (33) можно записать оценку

$$M \approx \frac{N}{2} \ln \frac{N}{2}. \quad (34)$$

Таким образом, полоса  $\frac{f_0}{2}$  дискретизированного сигнала за счет коррекции элиазинга может быть расширена примерно в  $\ln \frac{N}{2}$  раз и составит

$$f_m \cong \frac{N}{2T} \ln \frac{N}{2} \cong \frac{f_0}{2} \ln \frac{Tf_0}{2}. \quad (35)$$

Далее по расширенному ряду Фурье исходный ряд отсчетов  $x(i\tau_0)$  трансформируется в уплотненный ряд отсчетов  $x(i\frac{1}{2f_m})$ , для которого возможна оптимальная интерполяция по формуле Котельникова.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гандин Л.С., Каган Р.Л. Статистические методы интерпретации метеорологических данных. -Л.: Гидрометеоиздат, 1976. -358с.
2. Жуковский Е.Е., Киселева Т.Л., Мандельштам С.М. Статистический анализ случайных процессов. -Л.: Гидрометеоиздат, 1976. -408с.
3. Маркос Ж. Дискретизация и квантование. -М.: Энергия, 1969. -144с.
4. Ефимов В.М. Квантование по времени при измерении и контроле. -М.: Энергия, 1969. -87с.

5. Справочник по телеметрии. / Под редакцией Э.Л.Грюнберга. Перевод с англ. -М.: Машиностроение, 1971. -482с.
6. Гайский В.А., Чмутов М.В. Метод оценки погрешности восстановления непрерывных процессов и полей по дискретным данным. Тезисы докладов НТС «Морские технологии и приборостроение» : -Севастополь, 1993. -с.27-28.
7. Справочник по специальным функциям. Под редакцией М.Абрамовича и И.Сиган. М.: Наука, 1979. -830с.