РАЗВИТИЕ ВОЛН В ОГРАНИЧЕННОМ БАССЕЙНЕ ПЕРЕМЕННОЙ ГЛУБИНЫ

Н.А.Миклашевская, Л.В.Черкесов
Морской гидрофизический институт НАН Украины
г.Севастополь, ул.Капитанская, 2

Исследуем процесс установления вынужденных колебаний, возникающих на поверхности однородной жидкости, заполняющей ограниченный бассейн переменной глубины без вертикальных стенок. В качестве генератора волн рассмотрим периодические по времени поверхностные давления вида

$$p_0(x,t) = P_0\, \psi(x) \sin \sigma t, \qquad (1)$$

действующие начиная с момента времени t=0. Будем считать, что в начальный момент времени жидкость не возмущена, а свободная поверхность горизонтальна. Изучим влияние силы Кориолиса и характеристик возмущающих давлений на развитие таких волн.

В работе [1] найдено аналитическое решение задачи о свободных колебаниях жидкости в аналогичном бассейне. В [2] проведены численные эксперименты по исследованию нестационарных волн, вызываемых колебаниями атмосферного давления в бассейне переменной глубины с вертикальными стенками; в [3] для аналогичного бассейна найдено аналитическое решение задачи о вынужденных периодических колебаниях жидкости.

В рамках линейной теории длинных волн с учетом действия силы Кориолиса и диссипативных сил уравнения движений записываются в виде

$$u_t - fv = -g\zeta_x - \mu u - \rho^{-1} p_{0x} \qquad (2)$$

$$v_t + fu = -\mu v \qquad (3)$$

$$\zeta_t = -(uh)_x \qquad (4)$$

где $\zeta(x,t)$ – возвышение свободной поверхности, $u(x,t)$, $v(x,t)$ – горизонтальные составляющие скорости, $h(x)$ – глубина бассейна, ρ – плотность, g – ускорение свободного падения, μ>0 – коэффициент диссипации, индексы x и t означают дифференцирование по соответствующим переменным.

Будем считать, что глубина бассейна меняется по параболическому закону

$$h(x) = -h_0(x^2 - a^2)/a^2, \qquad (5)$$

где h_0 – максимальная глубина бассейна, $2a$ – его ширина, а $\psi(x)$ является многочленом первой степени

$$\psi(x) = 1 + b_1 x. \qquad (6)$$

Решая систему (2)–(4) с начальными условиями

$$u(x,0)=0, \quad v(x,0)=0, \quad \zeta(x,0)=0, \qquad (7)$$

получим следующие выражения для возвышения свободной поверхности и горизонтальных составляющих скорости:

$$\zeta(x,t) = 2x\varphi_1(t), \qquad (8)$$

$$u(x,t) = -a^2 h_0^{-1}\varphi(t), \qquad (9)$$

$$v(x,t) = f^{-1}[-a^2(\mu\varphi + \varphi_t)/h_0 + 2g\varphi_1 + d_0 g b_1 \sin\sigma t], \qquad (10)$$

где

$$\varphi = (A_1\cos\beta t + A_2\sin\beta t)\,e^{-\mu_1 t} + A_3\,e^{-\mu_2 t} + B_1\sin\sigma t + B_2\cos\sigma t,$$

$$\varphi_1(t) = C_1 e^{-\mu_1 t}\sin(\beta t + \delta_1) + C_2 \times e^{-\mu_2 t} + C_3\sin(\sigma t + \gamma_1),$$

при этом

$$C_1 = \omega^{-2}[(A_1\mu_1 - A_2\beta)^2 + (A_1\beta + A_2\mu_1)^2]^{-2},$$

$$C_2 = A_3/\mu_2, \quad C_3 = (B_1^2 + B_2^2)^{-2},$$

$$\mathrm{tg}\,\delta_1 = (A_1\beta + A_2\mu_1)/(A_1\mu_1 - A_2\beta),$$

$$\mathrm{tg}\,\gamma_1 = B_1/B_2,$$

$$\mu_1 = \mu(f^2 + \beta^2)/2\beta^2, \quad \mu_2 = \mu m_1^2/\beta^2,$$

$$\beta^2 = m_1^2 + f^2, \quad m_1^2 = 2gh_0/a^2,$$

A_i, B_j – известные константы.

Отсюда следует, что возникающая под действием поверхностных давлений

$$p_0(x,t) = P_0(1 + b_1 x)\sin\sigma t, \qquad (11)$$

волна (8) представляет собой суперпозицию двух стоячих волн, каждая из которых имеет одну узловую точку при $x = 0$. Первая ("свободная") волна обусловлена наличием начальных условий. Вторая ("вынужденная") волна обусловлена наличием возмущающих давлений (11) и имеет одинаковую с ними частоту.

Амплитуда свободной волны затухает со временем по экспоненциальному закону и не будет превышать ε% от амплитуды вынужденной волны для $t \geq T_3$ и $t \geq T_4$. При этом

$$T_3 = max(T_1, T_2), \qquad (12)$$

а T_1, T_2, T_4 удовлетворяют следующим равенствам:

$$C_1\exp(-\mu_1 T_1) = 10^{-2}\varepsilon_1 C_3,$$

$$C_2\exp(-\mu_2 T_2) = 10^{-2}\varepsilon_1 C_3, \qquad (13)$$

$$C_1\exp(-\mu_1 T_4) + |C_2|\exp(-\mu_2 T_4) = 10^{-2}\varepsilon C_3,$$

где $\varepsilon_1 = \varepsilon/2$. Полагая $\varepsilon = 1$, получаем, что при $t \geq T_5$, где $T_5 = min(T_3, T_4)$, волновой процесс можно считать установившимся, так как в этом случае амплитуда свободной волны будет, по крайней мере, в сто раз меньше амплитуды вынужденной волны. Как следует из (8), учет диссипативных сил приводит к тому, что амплитуда волны остается конечной при любых значениях частоты возмущающих давлений. В то же время пренебрежение диссипативными силами приводит к тому, что амплитуда волны обращается в бесконечность, когда частота возмущающих давлений совпадает с частотой свободных колебаний ($\sigma = \beta$). Не менее важным обстоятельством является и то, что в случае пренебрежения диссипативными силами свободная волна не затухает со временем. В итоге волновой процесс не устанавливается, что не согласуется с данными наблюдений в реальных условиях. Таким образом, исследование процесса развития волн, возникающих под действием периодической по времени вынуждающей силы, без учета диссипативных сил приводит в рассматриваемом случае к ошибочным выводам: колебательный процесс не устанавливается, амплитуда волн может расти неограниченно.

С использованием формул (8)–(10), (13) были проведены численные эксперименты для следующих значений параметров:

$$a=1900 \text{ км}, \ h_0 = 1500 \text{ м}, \ b_1 = 0{,}1/a, \ d_0 = 0{,}5 \text{ м}. \qquad (14)$$

При таком выборе b_1 и d_0 перепад давления над поверхностью бассейна ($-a<x<a$) составляет 10 мбар. Расчеты проводились для $f=f_1=8{,}75\cdot10^{-5}$ c^{-1} ($\varphi = 37°$ с.ш.) и $f=0$. Временные изменения уровня изучались на границе бассейна ($x=a$) для $\mu=0{,}1\beta$, $\sigma = \{0{,}9;\ 0{,}95;\ 0{,}99;\ 1{,}0\}\beta$. Колебания считались установившимися, когда амплитуда свободных колебаний не превышала 10% ($\varepsilon=0{,}1$) амплитуды вынужденных колебаний. Проведенные эксперименты показали, что в случае $f=f_1$ для $\sigma = \{0{,}9;\ 0{,}95\}\beta$ амплитуда колебаний при $t<T_3$ сначала возрастает, затем немного убывает и для $t \geq T_3$ остается постоянной. В случаях $\sigma=\{0{,}99;\ 1{,}00\}\beta$ экстремальные значения $|\zeta(a,t)|$ монотонно возрастают с течением времени ($t<T_3$). При этом максимальные значения уровня установившихся колебаний увеличиваются с приближением σ к частоте свободных колебаний β от 12,3 см при $\sigma = 0{,}9\ \beta$ до 17,4 см при $\sigma = \beta$.

Из анализ полученных результатов следует, что качественно картины развития колебаний при $f=0$ и $f=f_1$ не отличаются, однако время выхода колебаний на установившийся режим, когда f учитывается, на 50–53% меньше, чем при $f=0$. Кроме того, $\max|\zeta(a,t)|$ при $f=0$ в 2 раза больше, чем при $f=f_1$ и возрастает от

24,6 см (σ=0,9 β) до 35,9 см (σ=β).

В приведенной ниже таблице даны значения времени выхода колебаний на установившийся режим T_3 (здесь $\varepsilon_2=\sigma/\beta$, ε% составляет амплитуда свободной волны от амплитуды вынужденной волны). Анализ приведенных в ней данных показывает, что с ростом ε_2 от 0,9 до 1,1 величина T_3 при f=0 сначала убывает менее чем на 0,1%, а затем на столько же возрастает. При $f=f_1$ T_3 одинаково (с точностью до 0,5 минуты) для ε_2 = {0,9; 0,95; 0,99; 1,00; 1,01} и возрастает менее чем на 0,1% при ε_2 = {1,05; 1,1}.

Таблица.

Время выхода на режим установившихся колебаний

f, c^{-1}	ε, %	ε_2						
		0.9	0.95	0.99	1.0	1.01	1.05	1.1
0	10	22 сут 15 ч 42 мин	22 сут 15 ч 40 мин	22 сут 15 ч 39 мин	22 сут 15 ч 39 мин	22 сут 15 ч 39 мин	22 сут 15 ч 42 мин	22 сут 15 ч 44 мин
	1	26 сут 21 ч 26 мин	26 сут 21 ч 24 мин	26 сут 21 ч 22 мин	26 сут 21 ч 22 мин	26 сут 21 ч 23 мин	26 сут 21 ч 25 мин	26 сут 21 ч 27 мин
f_1	10	14 сут 20 ч 17 мин	14 сут 20 ч 17 мин	14 сут 20 ч 17 мин	14 сут 20 ч 17 мин	14 сут 20 ч 17 мин	14 сут 20 ч 18 мин	14 сут 20 ч 20 мин
	1	18 сут 3 ч 8 мин	17 сут 16 ч 48 мин	17 сут 16 ч 48 мин	17 сут 16 ч 48 мин	17 сут 16 ч 49 мин	17 сут 16 ч 50 мин	17 сут 16 ч 51 мин

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В.* Теоретическая гидромеханика: В 2-х т. – М.: Гостехиздат.–Т.1.– 1955.– 560 с.
2. *Коновалов А.В., Черкесов Л.В.* Исследование генерации нестационарных нелинейных длинных волн колебаниями атмосферного давления// Морской гидрофизический журнал.– 1993.– № 5, стр. 31–41
3. *Губанова О.В., Хилько Н.В., Черкесов Л.В.* Генерация волн в двумерном бассейне переменной глубины периодическими возмущениями атмосферного давления// Морской гидрофизический журнал.– 1997.– № 5, стр. 3–10
4. *Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.* Численные методы.– М.: Наука. Гл.ред.физ.-мат. лит.,1987.– 600 с.