

ДОЛГОВЕЧНОСТЬ ИЗБЫТОЧНЫХ СИСТЕМ

В.А.Гайский

Морской гидрофизический институт
НАН Украины
г. Севастополь, ул. Капитанская, 2
E-mail: oaoi@alpha.mhi.iuf.net

Существующие системы различного назначения обычно сохраняют свою пригодность для использования при отказе некоторого количества входящих в них элементов, т.е. имеют избыточность, которая часто вводится в них целенаправленно для повышения надежности. Это структурная избыточность в измерительной и другой аппаратуре, избыточная сетка станций при съемке или контроле полей окружающей среды, избыточные базы данных, сохраняющие или восстанавливающие гарантированное качество при длительном хранении и т.д. Основными количественными оценками роли избыточности обычно являются вероятность безотказной работы во времени $p(t)$ и среднее время безотказной работы T_{cp} , характеризующее долговечность системы. Точные формулы для расчета долговечности различного типа избыточных систем были получены в [1] и частично опубликованы в [2]. Поскольку потребность в точных расчетах долговечности избыточных систем не отпала, эти результаты приводятся в данной работе в полном виде.

1. Общий метод анализа

Система состоит из n элементов, каждый из которых может быть в множестве $\{A\}$ мощностью a^n состояний с экспоненциальным временем пребывания. Как известно, такое

поведение системы можно представить графом переходов и описать однородным марковским процессом [3, 4]. Для каждого i -го состояния (или подмножества состояний) системы справедливо дифференциальное уравнение

$$p'_i(t) = -p_i(t) \sum_{j \in Q} \lambda_{ij} + \sum_{s \in S} p_s(t) \lambda_{si} \quad (1)$$

где λ_{ij} - интенсивность перехода из состояния (подмножества состояний) i в состояние (подмножество) j , S множество состояний (подмножество) системы (источников), из которых возможен непосредственный переход в состояние (подмножество) i , а Q - множество состояний (подмножеств) системы (потребителей), в которые возможен непосредственный переход из состояний (подмножества) i .

Определим среднее время пребывания системы в состоянии (подмножестве) i . Для чего проинтегрируем уравнение (1) и учтем начальные условия $p_0(0) = 1$; $p_i(0) = 0$; $i \neq 0$. Получим

$$\tau_0 = \frac{1}{\sum_{j \in Q} \lambda_{0j}}, \quad (2)$$

$$\tau_i = \frac{\sum_{s \in S} \tau_s \lambda_{si}}{\sum_{j \in Q} \lambda_{ij}}, \quad i \neq 0 \quad (3)$$

Если B есть множество рабочих состояний (подмножеств) системы, то среднее время работы системы до отказа определяется выражением

$$T = \sum_{i \in B} k_i \tau_i. \quad (4)$$

где k_i - количество состояний в i -ом подмножестве.

2. Структуры и цепи с двумя типами отказов.

Допустим имеется электрическая цепь из n последовательно (параллельно) соединенных элементов, переходящих в состояния короткого замыкания и обрыва с интенсивностями λ_1 и λ_0 соответственно (рис. 1). Цепь может находиться в

$$\tau_m = \frac{m \tau_{m-1} \lambda_1}{(n-m)(\lambda_0 + \lambda_1)} = \frac{m! \lambda_1^m}{(\lambda_0 + \lambda_1)^{m+1} \prod_{j=0}^m (n-j)} \quad (5)$$

Учитывая, что количество состояний k_m подмножества B_m будет равно C_n^m , для среднего времени работы цепи до отказа получим

$$T(n) = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{\lambda_1^m}{(n-m)(\lambda_0 + \lambda_1)^{m+1}} \quad (6)$$

Для параллельной цепи вместо λ_1 в числителе формулы ставится λ_0 . Примем для коэффициента асимметрии отказов $\xi = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_0} = \frac{\lambda_1}{\lambda}$ и можем записать

$$T(n) = \frac{1}{\lambda} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{\xi^m}{n-m} \quad (7)$$

Можем записать: $\sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{2^m (n-m)} = \frac{1}{n} + \frac{1}{2(n-1)} + \frac{1}{4(n-2)} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}$ (8)

Поскольку $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n \frac{1}{2^i} = 2$, то легко показать, что любой член ряда (8) больше суммы последующих членов. Следовательно, можем записать

$$\sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{2^m (n-m)} < \frac{2}{n} \quad \text{при } n > 1, \quad (9)$$

$$T(n) < \frac{1}{2} \quad \text{при } \xi = 0,5$$

3" состояниях, причем наличие хотя бы одного обрыва (короткого замыкания) приводит к отказу цепи. Для времени пребывания τ_m в подмножестве состояний B_m , содержащем m допустимых отказов, (например КЗ), можем записать

$$\frac{1}{1-\xi} \quad \text{и будет максимальной при } \xi \approx 1.$$

Таким образом, $0,5 \leq \xi \leq 1$ для последовательной цепи и $0 \leq \xi < 0,5$ для параллельной цепи. Если $n \rightarrow \infty$, то сумма в последнем выражении не превысит суммы геометрической прогрессии со знаменателем ξ , т.е.

Покажем, что при $\xi = 0,5$ избыточная цепь не может быть долговечнее одного элемента.

3. Системы со "скользящим" резервом (избыточные коды).

Система содержит n элементов и сохраняет работоспособность при отказе ρ любых элементов. Из выражения (7) при $\xi = 1$ получим

$$T_\rho(n) = \frac{1}{\lambda} \sum_{m=0}^{\rho} \frac{1}{n-m} \quad (10)$$

Этот случай в гораздо более общем виде (при различных режимах резерва и процедурах восстановления) доста-

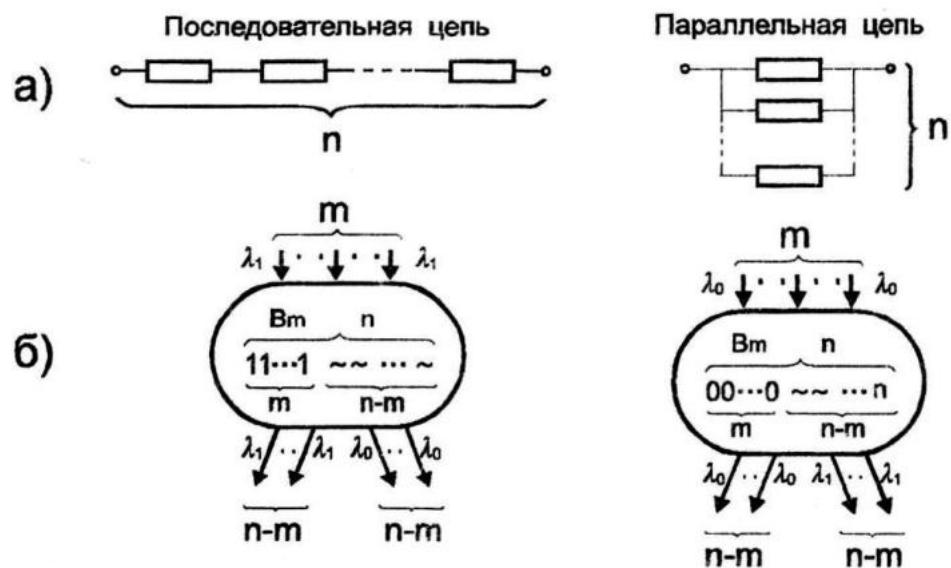


Рис. 1 Структуры избыточных цепей (а) и соответствующие им узлы графов переходов (б) при отказах

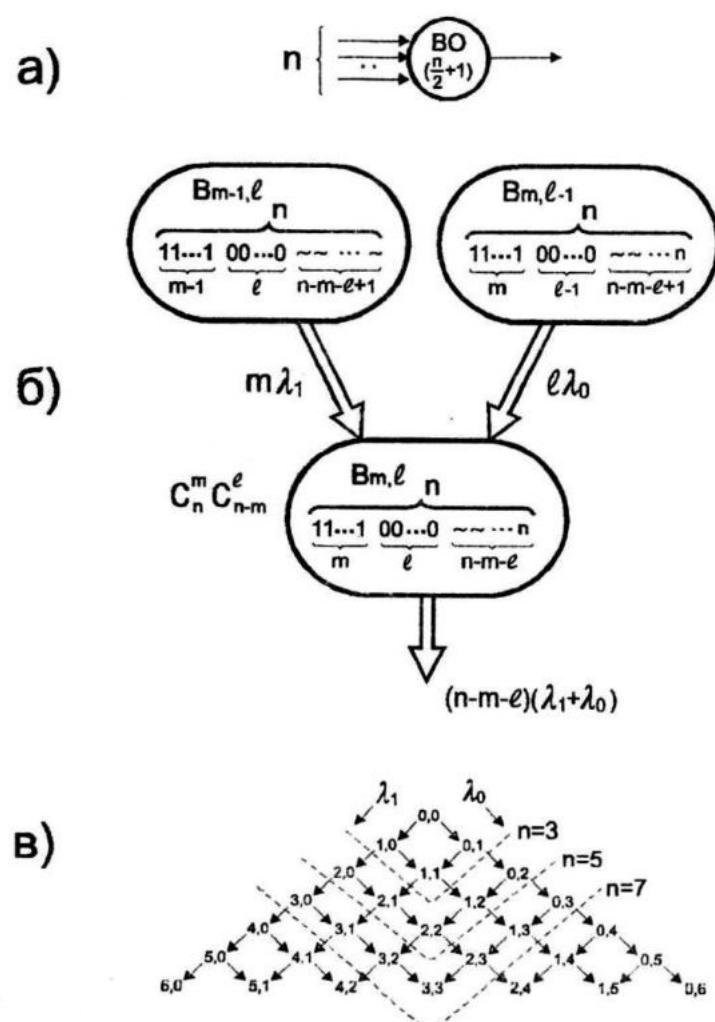


Рис. 2 Структура мажоритарного восстанавливающего органа (а) и соответствующие ему узел графа переходов (б) и граф переходов (в) при отказах

точно полно исследован, например в [3, 4]. Поэтому мы ограничимся приведением асимптотических оценок величины $n\lambda T_p(n)$ для некото-

рых ρ , представленных в следующей таблице 1.

Таблица 1

ρ	1	2	3	4	5
$n\lambda T_p(n)$	2	$\frac{5}{2}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{65}{24}$	$\frac{163}{60}$

Поскольку коэффициент избыточности, равный $\frac{n}{n-\rho}$, при больших n близок к единице, то очевидно, что "скользящий" резерв является очень экономичным методом повышения T .

4. Структуры с мажоритарными восстанавливающими органами с двумя типами отказов входов.

Надежность избыточных структур с голосующими восстанавливающими органами исследуется во многих работах, например, в [4]. Однако, по параметру среднего времени безотказной работы эти структуры исследованы недостаточно полно. Рассмотрим двоичный восстанавливающий орган, имеющий m входов и один выход и выдающий сигнал на выходе, соответствующий большинству сигналов на входе (рис. 2а). Предположим, что для входов справедливо экспоненциальное распределение времени работоспособности и они отказывают, переходя в состояния 1 или 0 с интенсивностями λ_1 и λ_0 . Обозначим подмножество состояний системы, содержащих m отказов типа 1 и l отказов типа 0, через $B_{m,l}$. Граф переходов для подмножества $B_{m,l}$ представлен на рис 2б, состояния входов ВО обозначены вектором из символов (1, 0, n). Для среднего времени пребыва-

ния системы в одном состоянии подмножества $B_{m,l}$ можем записать

$$\tau_{m,l} = \frac{m\lambda_1 \tau_{m-1,l} + l\lambda_0 \tau_{m,l-1}}{(n-m-l)(\lambda_1 + \lambda_0)} \quad (11)$$

Поскольку в подмножестве $B_{m,l}$ будет $k_{m,l} = C_n^m C_{n-m}^l$ состояний, что для вычисления среднего времени работы системы до отказа справедливо выражение (4). Получим конечные выражения T для конкретных значений $n = 3, 5, 7$, представляющих практический интерес. Для определения подмножеств рабочих состояний воспользуемся графом переходов системы в множестве рабочих состояний, представленном на рис. 2в. Окончательные результаты выкладок представлены в таблице 2, анализ которой показывает, что максимальное возрастание среднего времени безотказной работы (столбец 5) избыточной системы имеет место при симметричных отказах ($\xi = 0,5$), при полностью асимметричных отказах ($\xi = 0; \xi = 1$) избыточная система хуже неизбыточной (столбец 4), а граница выигравша определяется критическим значением ξ_{kp} (для $n=3$ $\xi_{kp} = 0,5 \pm 0,4$).

5. Системы из N блоков, содержащих резервные элементы.

Известно, что раздельное дублирование N блоков вместо общего

Таблица 2

n	$T_n(\lambda_0, \lambda_1)$	$T_n(\xi)$	$T_n \min$ при $\xi = 0; \xi = 1$	$T_n \max$ при $\xi = 0,5$
3	$\frac{5(\lambda_1 + \lambda_0)^2 + 12\lambda_1\lambda_0}{6(\lambda_1 + \lambda_0)^3}$	$\frac{5 + 2(1 - \xi)\xi}{6\lambda}$	$\frac{5}{6\lambda}$	$\frac{4}{3\lambda}$
5	$\frac{47(\lambda_1 + \lambda_0)^4 + 90\lambda_1\lambda_0[(\lambda_1 + \lambda_0)^2 + 4\lambda_1\lambda_0]}{60(\lambda_1 + \lambda_0)^5}$	$\frac{47 + 90(1 - \xi)\xi + 360(1 - \xi^2)\xi^2}{60\lambda}$	$\frac{47}{60\lambda}$	$\frac{23}{15\lambda}$
7	$\frac{319}{420(\lambda_1 + \lambda_0)} + \frac{4\lambda_1\lambda_0}{3(\lambda_1 + \lambda_0)^3} + \frac{5\lambda_1^2\lambda_0^2}{(\lambda_1 + \lambda_0)^5} + \frac{20\lambda_1^3\lambda_0^3}{(\lambda_1 + \lambda_0)^7}$	$\frac{319}{420\lambda} + \frac{4(1 - \xi)\xi}{3\lambda} + \frac{5(1 - \xi^2)\xi^2}{\lambda} + \frac{20(1 - \xi^3)\xi^3}{\lambda}$	$\frac{319}{420\lambda}$	$\frac{4329}{2520\lambda}$

дублирования системы дает выигрыш в среднем времени безотказной работы порядка $\frac{1}{2}\sqrt{N}$. Точные оценки, даже при малых N и числе резервных блоков $(M-1)N$ отсутствуют. Поскольку общее число возможных рабочих состояний будет $(2^M - 1)^N$, то перебор их по графу переходов для получения конечного выражения $T_{\text{ср}}$ практически ограничен системами малой сложности ($MN \leq 6$).

Для однородных систем можно воспользоваться методом, предполагающим объединение состояний в подмножества однотипных и рассмотрение переходов между подмножествами [5]. При этом перебор может быть существенно сокращен и составлять не более $(M-1)N$. Подмножество рабочих состояний системы, содержащей ρ ность множества состояний B_ρ равна

отказов обозначим B_ρ , $\rho = 0, (M-1)N$. Очевидно, что система из подмножества $B_{\rho-1}$ переходит в состояние подмножества B_ρ и в среднем пребывает в нем время τ_ρ , определяемое выражением

$$\tau_\rho = \frac{\rho \tau_{\rho-1}}{\lambda(MN - \rho)} \quad (12)$$

$$\text{или } \tau_\rho = \frac{\rho!}{\lambda \prod_{i=0}^{\rho} (MN-i)} = \frac{1}{\lambda(MN - \rho) C_{MN}^\rho} \quad (13)$$

Поскольку число возможных физических состояний системы с ρ отказами на поле MN элементов равно C_{MN}^ρ , но при $\rho \geq M$ $C_N^1 C_{(N-1)M}^{\rho-M}$ из них являются нерабочими, то мощ-

$$k_\rho = \begin{cases} C_{MN}^\rho, & \text{при } \rho < M \\ C_{MN}^\rho - C_N^1 C_{(N-1)M}^{\rho-M}, & \text{при } \rho \geq M \end{cases} \quad (14)$$

Если $\lambda = \frac{\lambda_N}{N}$, где λ_N - интенсивность отказов 1, N системы (нерезервированной), то выигрыш для среднего времени работы MN -системы составит

$$V_{MN} = \lambda_N T_{MN} = N \left\{ \sum_{\rho=0}^{M-1} \frac{1}{(MN-\rho)} + \sum_{\rho=M}^{(M-1)N} \frac{1}{(MN-\rho)} W \right\} \quad (15)$$

$$\text{где } W = 1 - \frac{\rho! N! \{ MN - \left[\frac{\rho}{M} \right] M \}!}{(MN)! \left[\frac{\rho}{M} \right]! \left\{ N - \left[\frac{\rho}{M} \right] \right\}! \left\{ \rho - \left[\frac{\rho}{M} \right] M \right\}!}$$

В таблице 3 представлены значения V_{MN} для $M=2 \div 5$ и $N=10 \div 100$.

Поскольку для $2, N$ -систем (дублированной) $k_\rho = 2^\rho C_N^\rho$, то можем записать

$$V_{2N} = \lambda_N T_{2N} = \frac{N \cdot N!}{(2N)!} \sum_{\rho=0}^N \frac{2^\rho (N-\rho-1)!}{(N-\rho)!} \quad (16)$$

В таблице 4 представлены значения для V_{2N} для $N=10 \div 100$.

Аналогичным образом получим формулы для "холодного" резерва

$$V_{3N} = \lambda_N T_{3N} = N \left\{ \sum_{\rho=0}^2 \frac{1}{(3N-\rho)} + \sum_{\rho=3}^{2N} \frac{1}{3N-\rho} \left[1 - \frac{\rho! N! \left(3N - \left[\frac{\rho}{3} \right] 3 \right)!}{(3N)! \left[\frac{\rho}{3} \right]! (N - \left[\frac{\rho}{3} \right] 3)! (\rho - \left[\frac{\rho}{3} \right] 3)!} \right] \right\} \quad (18)$$

В таблице 6 показаны значения V_{3N} для $N=10 \div 100$.

Для системы из N блоков, в каждом из которых по k рабочих и m резервных элементов, образующих скользящий резерв в блоке, можем записать

$$\tau_\rho = \frac{1}{\lambda [N(k+m)-\rho] C_{N(k+m)}^\rho}, \quad k_\rho = C_{N(k+m)}^\rho \quad (19)$$

Таблица 3

Относительное увеличение V_{MN} времени безотказной работы системы из N блоков, каждый из которых содержит $(M-1)$ элементов в "горячем" резерве

M	N	V_{MN}
2	10	7,5
	20	14,6
	30	21,5
	40	28,4
	50	35,4
	60	42,3
	70	49,3
	80	56,2
	90	63,1
	100	70,0
3	10	11,6
	20	22,6
	30	33,6
	40	44,6
	50	55,6
	60	66,6
	70	77,6
	80	88,6
	90	99,5
	100	110,5
4	10	14,5
	20	28,4
	30	42,2
	40	56,1
	50	69,9
	60	83,8
	70	97,7
	80	111,5
	90	125,4
	100	139,3
5	10	16,7
	20	32,8
	30	48,9
	40	65,0
	50	81,1
	60	97,2
	70	113,3
	80	129,4
	90	145,5
	100	161,5

7	10	20,0
	20	39,5
	30	58,9
	40	78,4
	50	97,9
	60	117,3
	70	136,8
	80	156,2
	90	175,7
	100	195,2
8	10	21,4
	20	42,2
	30	62,9
	40	83,7
	50	104,5
	60	125,3
	70	146,1
	80	166,9
	90	187,7
	100	208,5
9	10	22,5
	20	44,5
	30	66,5
	40	88,4
	50	110,4
	60	132,4
	70	154,4
	80	176,3
	90	198,3
	100	220,3
10	10	23,6
	20	46,6
	30	69,6
	40	92,7
	50	115,7
	60	139,4
	70	161,7
	80	184,8
	90	207,8
	100	230,8

Таблица 4

Относительное увеличение V_{2N} среднего времени безотказной работы системы из N дублированных блоков с "горячим" резервом

N	V_{2N}
1	1,5
2	1,8
3	2,1
4	2,3
5	2,5
6	2,7
7	2,9
8	3,0
9	3,2

10	3,3
20	4,5
30	5,4
40	6,1
50	6,8
60	7,4
70	7,9
80	8,4
90	8,9
100	9,4

Таблица 5

Значения $V_{MN,x}$ относительного увеличения среднего времени безотказной работы системы из N блоков, каждый из которых содержит $(M-1)$ элементов в "холодном" резерве

M	N	$V_{MN,x}$
2	10	10,7
	20	20,9
	30	30,9
	40	40,9
	50	51,0
	60	61,0
	70	71,0
	80	81,0
	90	91,0
	100	101,0
3	10	21,0
	20	41,0
	30	61,0
	40	81,0
	50	101,0
	60	121,0
	70	141,0
	80	161,0
	90	181,0
	100	201,0

4	10	31,0
	20	61,0
	30	91,0
	40	121,0
	50	151,0
	60	181,0
	70	210,0
	80	241,0
	90	271,0
	100	301,0
5	10	41,0
	20	81,0
	30	121,0
	40	161,0
	50	201,0
	60	241,0
	70	281,0
	80	321,0
	90	361,0
	100	401,0

Таблица 6

Верхнее значение V_{3N} относительного увеличения среднего времени безотказной работы системы из N мажоритарных блоков с тремя входами

N	V_{3N}
10	11,6
20	22,6
30	33,6
40	44,6
50	55,6
60	66,6
70	77,6
80	88,6
90	99,5

100	110,5
200	220,4
300	330,3
400	440,1
500	550,0
600	659,8
700	769,7
800	879,6
900	989,4
1000	1099,3

Таблица 7

Относительное увеличение среднего времени $V_{(k+m)N}$ безотказной работы системы из N блоков, каждый из которых содержит по k рабочих и m резервных в "скользящем", "горячем" резерве

k	m	N	$V_{(k+m)N}$
8	1	1	1,9
		10	10,4
	2	100	95,2
		500	472,1
		1000	943,2
	3	1	2,7
		10	18,8
		100	179,4
		500	893,5
		1000	1786,0
	4	1	3,4
		10	26,3
		100	255,6
		500	1274,7
		1000	2548,5
	5	1	4,1
		10	33,3
		100	325,2
		500	1622,7
		1000	3244,6
16	1	1	1,9
		10	10,7
	2	100	98,0
		500	486,0
		1000	971,0
	3	1	2,8
		10	19,8
		100	189,4
		500	943,2
		1000	1885,5
	4	1	3,7
		10	28,4
		100	275,9
		500	1375,7
		1000	2750,5
	5	1	4,5
		10	36,6
		100	357,9
		500	1786,0
		1000	3571,2
24	1	1	5,2
		10	44,4
		100	436,0
		500	2176,4
		1000	4351,8
	2	1	2,0
		10	10,8
		100	99,0
		500	490,8
		1000	980,7

		1000	1922,0
3	1	1	3,8
	10	10	29,2
	100	100	283,6
	500	500	1414,3
	1000	1000	2827,7
4	1	1	4,6
	10	10	37,9
	100	100	370,9
	500	500	1850,7
	1000	1000	3700,5
5	1	1	5,5
	10	10	46,3
	100	100	455,1
	500	500	2271,8
	1000	1000	4542,7
32	1	1	2,0
		10	10,8
		100	99,5
		500	493,3
		1000	985,7
	2	1	2,9
		10	20,4
		100	195,0
		500	971,0
		1000	1941,9
	3	1	3,8
		10	29,6
		100	287,7
		500	1434,8
		1000	2868,5
	4	1	4,7
		10	38,6
		100	377,9
		500	1885,5
		1000	3770,0
	5	1	5,6
		10	47,4
		100	465,5
		500	2323,8
		1000	4646,8
	46	1	2,0
		10	10,9
		100	99,9
		500	495,6
		1000	990,3
	2	1	2,9
		10	20,6
		100	196,8
		500	979,9
		1000	1958,7
	3	1	3,8
		10	30,0
		100	291,6
		500	1454,1
		1000	2907,2
	5	1	5,7
		10	48,4
		100	475,6
		500	2374,2
		1000	4747,4

$$V_{(k+m)N} = \lambda_N T_{(k+m)N} = kN \left\{ \sum_{\rho=0}^m \frac{1}{(N(k+m)-\rho)} + \sum_{\rho=m+1}^{mN} \frac{1}{N(k+m)-\rho} [1 - \right. \\ \left. - \frac{\rho! N! \left(N(m+k) - [\frac{\rho}{m+1}](m+1) \right)!}{(N(m+k))! [\frac{\rho}{m+k}]! (N - [\frac{\rho}{m+1}])! (\rho - [\frac{\rho}{m+1}](m+1))!} \right] \right\} \quad (20)$$

В таблице 7 приведены значения $V_{(k+m)N}$ для $k = 8+32$, $m=1+5$, $n=1+1000$.

Для n, N -системы, содержащей N мажоритарных восстанавливавших органов на n входов каждый, получим оценки

$$T\left(\frac{n-1}{2} + \frac{n+1}{2}\right)N < T_N < T(1+(n-1))N, \quad (21)$$

где $T\left(\frac{n-1}{2} + \frac{n+1}{2}\right)N$ - из выражения (20) при $k = \frac{n-1}{2}$, $m = \frac{n+1}{2}$;

$T(1+(n-1))N$ - из выражения (20) при $k = 1$, $m = n-1$;

причем $\lambda_N = (\lambda_0 + \lambda_1)N$.

Полученные выражения для точного расчета среднего времени безотказной работы сложных избыточных систем из однородных элементов могут быть использованы вместо асимптотических оценок.

Автор выражает признательность Глуховой А.Р. за расчет таблиц.

ЛИТЕРАТУРА

- Гайский В.А. Основы обеспечения точности автоматизированных систем сбора и переработки гидрофизической информации. Диссертация на соискание ученой степени доктора технических наук. МГИ НАНУ, 1981.
- Гайский В.А. Точный расчет среднего времени безотказной работы избыточных систем из однородных элементов с экспоненциальным распределением времени жизни. В кн.: Аннотации сообщений VII-го Всесоюзного совещания по проблемам управления. Минск, 1977.
- Васильев Ю.А., Козлов Б.А. Резервированная система - система стареющая. В кн.: Теория надежности и массовое обслуживание. М., "Наука", 1969.
- Козлов Б.А., Ушаков И.А. Справочник по расчету надежности аппаратуры радиоэлектроники и автоматики". М., Сов. радио, 1975.
- Кемени Дж., Внелл Дж. Конечные цепи Маркова. Пер. с англ. Под ред. А.А.Юшкевича, М., "Наука", 1970.