СПЕКТРАЛЬНО-КОРРЕЛЯЦИОННЫЙ АНАЛИЗ ТЕЧЕНИЙ ПО ДАННЫМ ИЗМЕРЕНИЙ НА АВТОНОМНЫХ БУЙКОВЫХ СТАНЦИЯХ

Н.Г. Хоролич
Морское отделение Украинского научно-исследовательского гидрометеорологического института
г. Севастополь, ул. Советская, 61
А.Х. Дегтерев
Морской гидрофизический институт НАН Украины
г. Севастополь, ул. Капитанская, 2
E-mail: ongf@alpha.mhi.iuf.net

Для изучения закономерностей изменчивости морских течений как двухмерного векторного процесса обычно используется информация о временных изменениях модуля и направления скорости в одной или нескольких точках исследуемой акватории (на автономных буйковых станциях) в виде векторных временных рядов **V**(t). Анализировать такие ряды довольно затруднительно, и поэтому приходится использовать декартовы координаты, представляя пульсации вектора скорости в виде его проекций на два ортогональных направления. Однако оценки векторного временного ряда, полученные для его проекций на декартовы оси координат, будут малоинформативны, так как являются неинвариантными (т.е. зависят от выбора системы координат). Поэтому в течение последних 20-30 лет появилось много работ, посвященных разработке и применению новых методов анализа, свободных от перечисленных выше и других недостатков. К настоящему времени наиболее разработанными и распространенными являются метод "вращательных компонент" [8,9] и векторно-алгебраический метод [1,4], которые нашли широкое применение при анализе векторных временных рядов в океанографии и гидрометеорологии [3,5-7].

Метод "вращательных компонент" основан на представлении процесса **V**(t) в виде суперпозиции круговых противоположно направленных колебаний, а вектора в виде комплексного числа. В векторно-алгебраическом методе процесс **V**(t) представляется в виде вектор-функции со значениями в евклидовом пространстве. Корреляционная функция и спектральная плотность определяются как диадные тензоры. Именно почти полное отсутствие элементов субъективизма со стороны исследователя при анализе векторного временного процесса **V**(t) способствовало дальнейшему совершенствованию метода и его широкому применению в гидрометеорологии.

Однако первые результаты, полученные исследователями в области картирования переменной составляющей полей скоростей течений и ветра ("эллипсов" их дисперсии) с помощью данного метода, какими бы впечатляющими они ни были, заставили нас (впрочем, и самих этих исследователей) усомниться в правильности интерпретации отдельных результатов анализа, в частности, в ортогональности ориентации продольной оси этих "эллипсов" направлению среднего переноса вод [5,6].

Мы полагаем, что такая ориентация продольных осей "эллипсов" дисперсии указанных полей могла быть следствием, по крайней мере, трех причин, причем некоторые из них являются главенствующими. Во-первых, данный эффект мог быть обусловлен влиянием какого-нибудь гидродинамического фактора (длинных волн, вихрей и т.д.). Во-вторых, некоторые исследователи, на наш взгляд, некорректно интерпретировали лишь формально правильные отдельные моменты метода в силу ряда неточностей, которые были допущены самими его авторами в известных работах [1,4]. И, наконец, в третьих, в цитированных работах нечетко дается определение ориентации главных осей (направлений), относительно которых определяется ориентация большой и малой осей кривых второго порядка, являющихся геометрическим образом симметричных частей диадных тензор-функций, характеризующих поведение вектора скорости **V**(t) (так называемая проблема нахождения собственных векторов и собственных чисел симметричной части диадного тензора в линейной алгебре). Это и явилось, пожалуй, основным источником некоторых неточностей, полученных в ряде работ.

Поэтому и неудивительно, что эти отдельные неточности сразу же проявились при анализе массового материала наблюдений, выполненного с помощью данного метода.

Целью данной работы является установление и устранение некоторых противоречивых моментов и неточностей, возникающих при использовании векторно-алгебраического метода в [1,4].

Информация о свойствах морских течений содержится прежде всего в диадных тензорах дисперсии, корреляционной и спектральной вектор-функций [1,4]. Тензору дисперсии, который является симметричным, и симметричным частям двух последних тензор-функций можно поставить в соответствие центральную кривую второго порядка (эллипс, окружность, гиперболу). В линейной алгебре [2] характеристики этой кривой принято определять с помощью коэффициентов квадратичной формы (см. ниже). Однако авторы [1,4] ошибочно отождествили эти коэффициенты с аналогичными (совпадающими с ними лишь по форме представления, но не по физическому смыслу) компонентами матрицы, соответствующей симметричной части этих тензоров. Таким образом, парадокс возникшей ситуации заключается в том, что определяемая с помощью принятого в [1,4] подхода кривая не принадлежит симметричной части анализируемых тензоров.

Ориентация большой оси такой кривой, отражающая прежде всего направленность изменений анализируемого процесса, совпадает, как известно [2], с осью ординат в новой системе координат (в которой кривая может быть приведена к канонической форме).

Эта неточность, на наш взгляд, в основном и явилось источником ошибочных выводов, полученных практически во всех работах по данному вопросу.

Коротко остановимся на ходе рассуждений авторов [1,4].

Из линейной алгебры известно [2], что симметричная билинейная форма в двухмерном пространстве в общем случае может быть представлена в виде диагональной матрицы, для которой справедливо следующее выражение:

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = \lambda_1\xi_1^2 + \lambda_2\xi_2^2, \qquad (1)$$

где a_{11}, a_{12}, a_{22} - компоненты симметричного тензора (например, корреляционного или спектрального [1,4]), λ_1, λ_2 - главные компоненты, или собственные числа данного тензора (причем $\lambda_1 \geq \lambda_2$), а ξ_1, ξ_2 характеризуют такие направления для λ_1, λ_2, при которых недиагональные компоненты двухмерной матрицы, соответствующей (1), будут равны нулю.

Заметим, что λ_1 и λ_2 являются инвариантами:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = a_{11} + a_{22}, \qquad \lambda_1\lambda_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}^2. \qquad (2)$$

Однако ориентация β главной оси, соответствующей λ_1, относительно исходной системы координат, обычно определяемая выражением [1,4]:

$$tg2\beta = \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}}, \qquad (3)$$

не является инвариантной величиной, поскольку сама исходная система координат выбирается, вообще говоря, произвольно. В гидрометеорологии, как правило, оси координат принято ориентировать в меридиональном и зональном направлениях, причем направления на север и восток принимаются за положительные (т.е. принята левая система координат).

Формула (3) отражает тот простой факт, что в результате поворота осей исходной системы координат на угол β исчезает член, содержащий произведение координат в (1), поскольку члены с $\xi_1\xi_2$, образующиеся вследствие преобразования координат, взаимно уничтожатся.

Ориентация (угол) β главной оси, соответствующей λ_1, отличается на угол 90° от ориентации α большой оси кривой второго порядка, соответствующей (1). А поскольку ориентация β в (3), вообще говоря, определяется с точностью $\pm 90° k$ (k - целое), т.е. в принципе не может быть однозначно определена без некоторых дополнительных условий, то именно это обстоятельство и породило, на наш взгляд, вторую неточность в ряде работ по данному вопросу. Формулу (3) можно использовать лишь при условии, что знак числителя (знаменателя) совпадает со знаком синуса (косинуса) угла 2β. Это условие, вообще говоря, действительно выполняется для кривых второго порядка (1), если в качестве угла ориентации для оси абсцисс системы координат, в которой эти кривые принимают каноническую форму, берется угол ориентации их малой оси, ближайший к оси абсцисс исходной системы координат. Но на этом условии авторы [1,4] не останавливаются, представляя его тем самым как бы в виде доказанного положения линейной алгебры без соответствующей на то ссылки, если не считать приведенные аналогичную формулу (полученную, впрочем, из предположений метода "вращательных компонент", а не по правилам линейной алгебры) и фрагментов модулей программ расчета на ЭВМ спектрально-корреляционных характеристик вектора $\mathbf{V}(t)$.

Формальное использование формулы (3) в отдельных случаях (например, при некорректном задании в ней знаков коэффициентов), может привести к неправильному результату. В частности, можно показать [7]), что, по крайней мере, в случае, когда кривая второго порядка, соответствующая (1), является эллипсом, то

$$a_{12} = -2AB\sin 2\alpha,$$

$$a_{11} - a_{22} = -4AB\cos 2\alpha,$$

где A, B - модули комплексных векторов с разнонаправленным вращением, результирующий вектор которых описывает данный эллипс, а $\alpha = \beta + 90°$.

Таким образом, если изменить на противоположный знаки числителя и знаменателя в рассматриваемом нами простом примере, то вместо угла β можно получить другой угол, даже не подозревая, что он отличается на 90° от истинного угла.

Поэтому во избежание затруднений, возникающих при использовании формулы (3), следует использовать подход, подробно изложенный, например, в [2], где дается ряд ценных советов и рекомендаций для вычисления λ_1 и λ_2 и других параметров. В частности, исходную квадратичную форму (1) рекомендуется трансформировать так, чтобы выполнялось главное требование анализа, а именно: $\lambda_1 \ge \lambda_2$. Кроме того, ориентацию β главной оси λ_1 следует вычислять с помощью сравнительно простой формулы, следующей из метода главных компонент [2]:

$$tg\beta = \frac{\lambda_1 - a_{11}}{a_{12}}, \qquad (4)$$

для которой с помощью незначительного преобразования осей исходной системы координат можно добиться выполнения следующих условий: $a_{11} > a_{22}$, $a_{12} > 0$. В этом случае искомый угол β для ориентации главной оси, соответствующей λ_1, будет принадлежать первой четверти (в преобразованной системе координат). Возвращаясь к исходной системе координат, получим искомый результат.

Совместный анализ параметров кривой второго порядка, сответствующей квадратичной форме (1), и компонент матрицы симметричной части исследуемых тензоров, выполненный нами для всего диапазона изменчивости угла β главной оси λ_1, т.е. для четырех вариантов изменчивости этих компонент:

1) $a_{11} \ge a_{22}$, $a_{12} > 0$; 2) $a_{11} < a_{22}$, $a_{12} > 0$;
3) $a_{11} \ge a_{22}$, $a_{12} < 0$; 4) $a_{11} < a_{22}$, $a_{12} < 0$

показал, что данный угол следует определять по формулам (3) и (4), в которых параметры a_{11} и a_{22} необходимо заменить на a_{22} и a_{11} соответственно.

Выводы:

Принятый в океанографии и гидрометеорологии метод нахождения главных направлений симметричной части диадных тензоров векторного временного ряда $\mathbf{V}(t)$ с помощью симметричной билинейной формы в двухмерном пространстве некорректен. Поэтому его необходимо заменить на предложенный в данной работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Белышев А.П., Клеванцов Ю.П., Рожков В.А. Вероятностный анализ морских течений.-Л.: Гидрометеоиздат,1983.-264 с.
2. Бугров Я.С. Никольский С.М. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии.-М.: Наука, 1980.- 248 с.
3. Герман В.Х., Цвецинский А.С. Спектральный и взаимный спектральный анализ векторных временных рядов скоростей течений // Тр. ГОИН, 1979.-Вып. 144.-С. 71-81.
4. Методическое письмо по вероятностному анализу векторных временных рядов скоростей течений и ветра.-Л.:Гидрометеоиздат, 1984.-61 с.
5. Режимообразующие факторы, гидрометеорологические и гидрохимические процессы в морях СССР.-Л.: Гидрометеоиздат, 1988.-301 с.
6. Режимообразующие факторы, информационная база и методы ее анализа.-Л.: Гидрометеоиздат,1989.- 315 с.
7. Филонов Е.А. Инвариантные спектральные характеристики флуктуаций течения на полигоне ТРОПЭКС - 74 // Тр. ГОИН, 1979.-Вып. 146.-С. 81-91.
8. Gonella J.A. A rotary-component method for analysing meteorological and oceanographic vector time series // Deep-Sea Res., 1972.-Vol. 19.-. N12.-P. 833-846.
9. Mooers C.N.K. A technique for the cross spectrum analysis of pairs of complex-valued time series with emphasis on properties of polarized components and rotational invariants // Deep-Sea Res., 1973.-Vol. 20.- N12.-P. 1129-1141.