

# АНТИЭЛАЙЗИНГ: КОРРЕКЦИЯ НАЛОЖЕНИЯ ЧАСТОТ В СПЕКТРЕ РАВНОМЕРНО ДИСКРЕТИЗИРОВАННОГО ПРОЦЕССА

В.А.Гайский, П.В.Гайский

Морской гидрофизический институт НАН Украины

г. Севастополь, ул. Капитанская, 2  
E-mail: [oaoi@alpha.mhi.iuf.net](mailto:oaoi@alpha.mhi.iuf.net)

*Рассматривается способ восстановления гармоник при наличии наложения частот в спектре равномерно дискретизированного процесса, основанный на решении системы уравнений, полученных при многократном изменении частоты дискретизации путем прореживания отсчетов и вычисления совокупности частных дискретных спектров. Показано, что количество восстанавливаемых гармоник равно сумме делителей и числа делителей числа отсчетов процесса и потенциально растет в логарифмической зависимости от числа отсчетов.*

Принципиальная возможность восстановления амплитуд частот наложения как отдельных гармоник, так и частот, лежащих справа от частоты свертки (половина частоты отсчетов), была показана в [1, 2].

В данной работе более подробно рассматривается способ реализации этой возможности. Как известно, например [3], элайзингом (aliasing) называют появление в спектре дискретизированного процесса кажущихся частот в полосе от нуля до частоты свертки в результате "наложения" частот процесса, лежащих выше частоты свертки (если таковые имеются в непрерывном процессе). В общем случае, элайзинг приводит к искажениям вычисляемого спектра процесса в полосе от нуля до половины частоты дискретизации, не устранимым при любых линейных способах фильтрации, поскольку процесс и шум наложения оказываются в одной полосе частот.

Погрешность от элайзинга может быть вычислена при известной функции спектральной плотности процесса. Как показано ниже, более детальный анализ механизма наложения частот при различных частотах дискретизации позволяет восстановить амплитуды гармоник с частотами в полосе от нуля до частот выше частот свертки и дискретизации. Процедуру восстановления пораженных наложением частот гармоник назовем антиэлайзингом. Во временной области при представлении процесса рядом Фурье антиэлайзинг дает дополнительные члены ряда и корректирует значение коэффициентов начальных членов ряда, т.е. повышает точность представления и восстановления процесса.

Рассмотрим общую схему преобразования представлений непрерывного процесса  $x(t)$ . Предположим, что процесс  $x(t)$  существует на интервале времени  $[0, T]$  и отвечает известным условиям преобразования Фурье. Тогда он может быть представлен с заданной достаточной точностью рядом Фурье

$$x_T(t) = \sum_{k=0}^n a_k \varphi_k(t), \quad (1)$$

где  $\{\varphi_k\}$  - базис ортогональных функций,  $n+1$  - число членов ряда,  $a_k$  - коэффициенты разложения по базису ортогональных функций,

$$a_k = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \varphi_k(t) dt \quad (2)$$

Поскольку элайзинг достаточно полно изучен только для гармонических спектров, то далее будем рассматривать базис тригонометрических функций  $\cos k\omega t$ ,  $\sin k\omega t$ , для которого запишем

$$x_T(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos k\omega t + \sum_{k=1}^n b_k \sin k\omega t, \quad (3)$$

где коэффициенты разложения определяются по формулам Эйлера:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt, \quad (4)$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos k\omega t dt,$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin k\omega t dt, \quad (5)$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \quad k = \overline{1, n}$$

Коэффициенты  $a_k$  и  $b_k$  - являются значениями амплитуды  $\cos$  и  $\sin$  составляющих гармоник дискретного спектра  $X(f)$  непрерывного процесса,  $n$  - число гармоник в дис-

кретном спектре непрерывного сигнала (без  $f = 0$ ).

Процесс  $x(t)$  дискретизируется равномерно с интервалом  $\tau_0$  и представляется последовательностью мгновенных отсчетов  $x_T(i\tau_0)$   $i = 0, \overline{M}$ , где  $\overline{M} = \overline{f_0 \cdot T} = \overline{0, M}$ , где  $M + 1$  - число отсчетов процесса на интервале  $0, T$  с частотой  $f_0$ .

Представляем дискретный процесс  $x_T(i\tau_0)$  рядом Фурье

$$x_T^*(t) = a_0^k + \sum_{k=1}^m a_k^* \cos k\omega t + \sum_{k=1}^m b_k^* \sin k\omega t \quad (6)$$

где коэффициенты определяются по формулам Бесселя

$$a_0^* = \frac{1}{M+1} \sum_{i=0}^M x(i\tau_0) \quad (7)$$

$$a_k^* = \frac{2}{M+1} \sum_{i=0}^M x(i\tau_0) \cos k\omega(i\tau_0),$$

$$b_k^* = \frac{2}{M+1} \sum_{i=0}^M x(i\tau_0) \sin k\omega(i\tau_0), \quad (8)$$

$$m = \frac{M}{2} = \frac{f_0 T}{2}, \quad k = \overline{1, m}$$

где  $a_0^*$  - постоянная составляющая или амплитуда нулевой гармоники;  
 $a_k^*$  и  $b_k^*$  амплитуды ортогональных составляющих комплексного дискретного спектра  $X_C^*(f)$ ,  $X_S^*(f)$ ;

$m$  - число гармоник в дискретном спектре дискретного сигнала (без нулевой).

В дальнейшем используем нормированную шкалу частот, полученную делением

$$k\omega = \frac{2\pi k}{T} \text{ на } \frac{2\pi}{T}, \text{ т.е. с } k \text{ точками. При этом}$$

$$X^*(0) = X(0) + \sum_{i=1}^{\infty} X(ik_0) + \sum_{i=1}^{\infty} X(ik_0) = X(0) + 2 \sum_{i=1}^{\infty} X(ik_0) \quad (11)$$

амплитудные спектры составляющих в шкале нормированной частоты  $k$  будут  $X_C(k)$  и  $X_S(k)$  для дискретного спектра непрерывного сигнала ( $k = \overline{0, n}$ ) и  $X_C^*(k)$  и  $X_S^*(k)$  для дискретного спектра дискретного сигнала ( $k = \overline{0, m}$ ;  $m = \frac{M}{2}$ ).

Если  $m < n$ , то имеет место наложение верхних и нижних частот. Это справедливо для обоих ортогональных составляющих спектра  $a_k^*$  и  $b_k^*$ . Графики спектров и схема наложения частот представлена на рис. 1. Дискретный спектр  $X(k)$  непрерывного процесса  $x_T(t)$  содержит  $n + 1$  точек (рис. 1а) и при дискретизации с частотой  $k_0 = \frac{M}{T} = 10$  сворачивается по схеме на рис. 1б в вычисляемый дискретный спектр  $X^*(k)$  дискретного процесса в полосе  $[0, \frac{k_0}{2}]$ , т.е.  $[0, 5]$  (рис. 1в).

Здесь  $k_0$  - нормированная частота дискретизации.

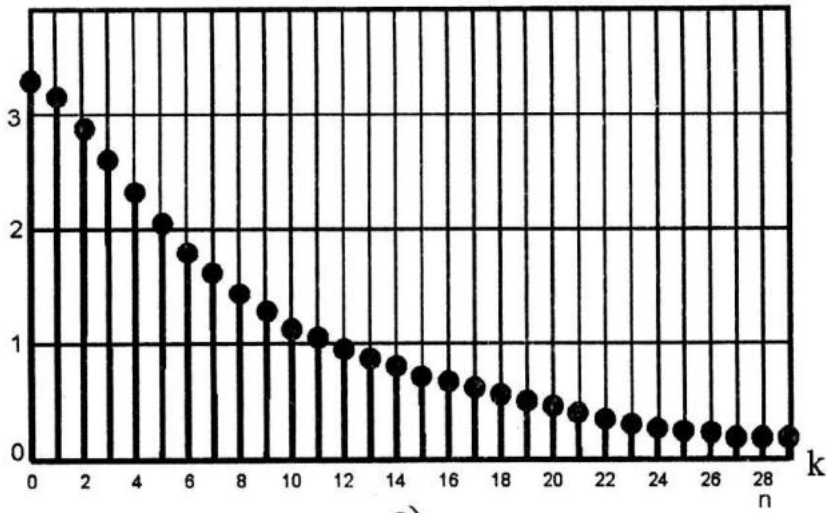
Действительно, известно, например [3], что

$$X^*(k) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} X(ik_0 \pm k) \quad (9)$$

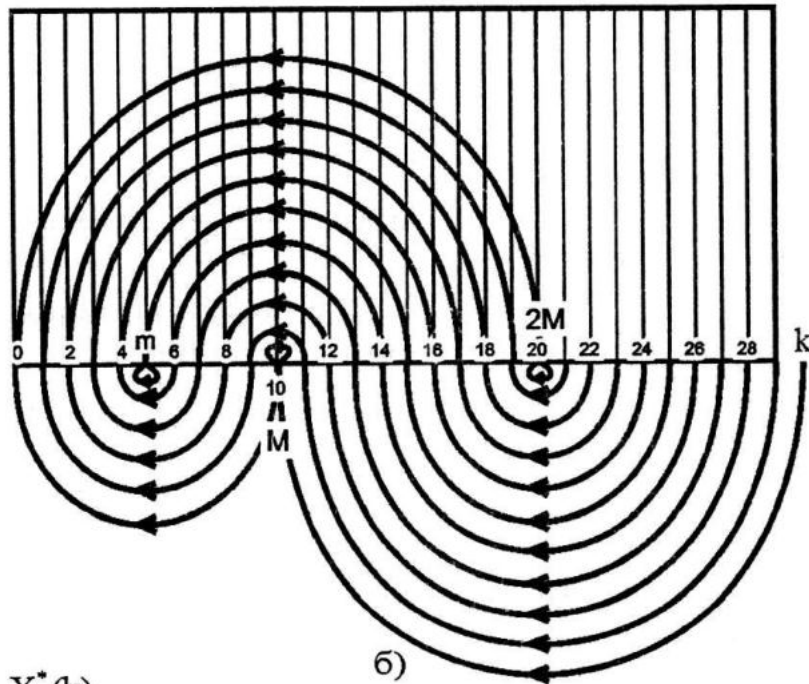
и для  $k$  в полосе  $[0, \frac{k_0}{2}]$  можем записать

$$X^*(k) = X(k) + \sum_{i=1}^{\infty} X(ik_0 + k) + \sum_{i=1}^{\infty} X(ik_0 - k) \quad (10)$$

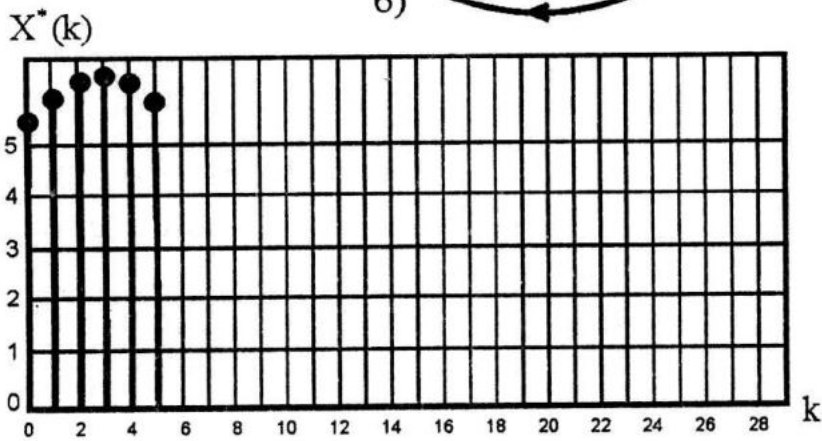
Для значений  $k = 0$  и  $k = \frac{k_0}{2}$  получим:



а)



б)



в)

а - дискретный спектр непрерывного процесса  
 б - схема наложения после дискретизации  
 в - дискретный спектр с наложением частот

Рисунок 1 - Схема наложения частот при вычислении дискретного спектра дискретизированного процесса

$$X^*\left(\frac{k_0}{2}\right) = X\left(\frac{k_0}{2}\right) + \sum_{i=1}^{\infty} X\left[\frac{k_0}{2}(2i-1)\right] + \sum_{i=1}^{\infty} X\left[\frac{k_0}{2}(i+1)\right] = 2 \sum_{\substack{\text{нечет} \\ i \geq 1}}^{\infty} X\left(i \frac{k_0}{2}\right) \quad (12)$$

Поскольку истинный спектр  $X(k)$  сигнала  $x_T(t)$  ограничен нормированной частотой  $k = n$ , то суммы в выражениях (9-12) будут ограниченными, из условия  $ik_0 + k \geq n$  тогда

$$i \geq \frac{n-k}{k_0}. \quad (13)$$

Обозначим  $\max i = \ell$ .

Тогда можем записать

$$X^*(k) = X(k) + \sum_{i=1}^{\ell} X(ik_0 + k) + \sum_{i=1}^{\ell} X(ik_0 - k) \quad (14)$$

для  $k = 0, \frac{k_0}{2}$  образующих исходную шкалу частот.

Суммы членов в правой части выражения (14) являются составляющими частот наложения. Имеются  $2\ell$  частоты наложения и, следовательно, в уравнении (14) содержится  $2\ell + 1$  неизвестных (с учетом  $X(0)$ ). Учитывая, что всего уравнений  $k = 0, \frac{k_0}{2}$  всего будет

$2\ell\left(\frac{k_0}{2} + 1\right)$  неизвестных. Новые уравнения могут быть получены при других частотах дискретизации  $k_0$ . Одним из способов изменения  $k_0$  является прореживание последовательности отсчетов  $x_T(i\tau_0)$  через  $p$  отсчетов ( $p = 1$  без прореживания). При этом для каждого  $p$  получим новую последовательность отсчетов  $x_T(i\tau_0)$  с интервалом  $p\tau_0$  и частотой дискретизации  $\frac{f_0}{p}$  или нормированной частотой  $\frac{k_0}{p}$ . При этом считаем, что  $p$  является множителем числа  $k_0$  и, следовательно, не все последовательные числа натурального ряда могут быть равны  $p$ . Для каждой из последо-

вательностей  $x_T(i\tau_0)$  будет своя шкала вычисляемых частот в полосе  $[0, \frac{k_0}{2p}]$ . Следовательно, для спектра  $X_p^*(k)$  каждой из последовательностей  $x_T(i\tau_0)$  можно записать  $(\frac{k_0}{2p} + 1)$  уравнений вида (14)

$$X_p^*(k) = X(k) + \sum_{i=1}^{\ell_p} X\left(i \frac{k_0}{p} + k\right) + \sum_{i=1}^{\ell_p} X\left(i \frac{k_0}{p} - k\right), \quad (15)$$

где

$$\min \ell_p \geq \frac{(n-k)S}{k_0}, \quad p = \{2, 3, \dots\} \quad (16)$$

Таким образом может быть сформирована система из  $N$  уравнений, где

$$N = \sum_p \left(\frac{k_0}{2p} + 1\right) \quad (17)$$

При этом неизвестные при вычислении спектров прореженных рядов будут повторяться и их число не изменится. Если  $N > 2\ell\left(\frac{k_0}{2} + 1\right)$ , то решением системы (15) могут быть найдены истинные амплитуды  $X(k)$  всех  $n$  гармоник дискретного спектра  $X(k)$ ,  $k = \overline{0, n}$ .

Оценим максимально возможное число уравнений, которое может быть получено если все числа из натурального ряда от 1 до  $\frac{M}{2}$  ( $M$  – число отсчетов) в последовательности  $x_T(i\tau_0)$ , будут равны  $p$ .

Тогда можем записать

$$N = \sum_{p=1}^{M/2} \left[ \frac{M}{2p} + 1 \right] = \left(1 + \frac{M}{2}\right) + \left(1 + \frac{M}{2 \cdot 2}\right) + \left(1 + \frac{M}{2 \cdot 3}\right) + \dots + \left(1 + \frac{M}{2 \cdot \frac{M}{2}}\right) =$$

$$= \frac{M}{2} + \frac{M}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{\frac{M}{2}}\right) \approx \frac{M}{2} + \frac{M}{2} \cdot \ln \frac{M}{2} \approx \frac{M}{2} \cdot \ln \frac{M}{2} \approx \frac{Tf_0}{2} \cdot \ln \frac{Tf_0}{2} \quad (18)$$

Учитывая, что начальная спектральная шкала (при  $p=1$ ) ограничена справа частотой  $f_0/2$  и содержит  $(\frac{M}{2} + 1)$  (вместе с  $f=0$ ) частот, расширение полосы частот вычисляемого спектра составит примерно в  $\ln \frac{M}{2}$  или

$\ln \frac{Tf_0}{2}$  раз. Это означает, что для сигнала

$X_T(t)$  с ограниченной частотой  $f_n$  спектром достаточно частоты дискретизации не  $2f_n$  в соответствии с теоремой отсчетов, а  $f_0$  из выражения  $f_n \approx \frac{Tf_0}{2} \cdot \ln \frac{Tf_0}{2}$ , или

$$\left( \frac{Tf_0}{2} \right)^{\frac{Tf_0}{2}} \approx e^{f_n}. \quad (19)$$

Это означает расширение вправо вычисляемого дискретного спектра дискретного сигнала в  $\ln \frac{Tf_0}{2}$  раз по сравнению с традиционным спектральным анализом, т.е. реализацию широкоформатного спектрального анализа.

Уравнения вида (15) при различных  $p$  и  $k$  образуют систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), неизвестными в которых являются амплитуды COS или SIN - составляющих  $N$  гармоник, входящих в уравнения с весами 0, 1 и 2. Причем в каждое уравнение для  $X_p^*(f)$  с весом 1 входят амплитуды гармоник

наложения с частотами  $k, i \frac{k_0}{p} - k$  и  $i \frac{k_0}{p} + k$

(или  $f, i \frac{f_0}{p} - f, i \frac{f_0}{p} + f$ ), с весом 2 входят в

$X_p^*(0)$  амплитуды гармоник наложения всех  $i \frac{k_0}{p}$  (или  $i \frac{f_0}{p}$ ) и в  $X_p^*(\frac{k_0}{2p})$  (или  $X_p^*(\frac{f_0}{2p})$ )

амплитуды гармоник наложения  $j \frac{k_0}{2p}$  (или

$j \frac{f_0}{2p}$ ) для нечетных  $j \geq 1$ .

Амплитуды всех остальных гармоник полной спектральной шкалы входят в каждое уравнение  $X_p^*(k)$  (или  $X_p^*(f)$ ) с весом 0.

На рис. 2 представлена схема формирования спектральных шкал и систем уравнений для дискретных спектров  $X_p^*(k)$  при  $p$ -прореживании ряда с параметрами  $M=24$  и при  $T=8, f_0=24$ .

Начальная спектральная шкала вычисляемых гармоник содержит 12 частот. Набор делителей искомого числа 24 частот составит  $\{12, 8, 6, 4, 3, 2, 1\}$ , каждый из делителей дает ширину новой шкалы частот вычисляемых гармоник. Общее число формируемых уравнений составит

$$N = 12+8+6+4+3+2+1=36$$

На рис. 2 показана шкала частот искомого гармоник 24, шкалы частот вычисляемых гармоник 12,8,6 схема формирования системы уравнений, где неизвестными являются истинные амплитуды гармоник на шкале 24, входящие в уравнения для дискретных спектров  $X_p^*(k)$  с указанными в матрице весами. Дискретные спектры  $X_p^*(k)$  вычисляются для каждой из частотных шкал традиционным способом (уравнения 4, 5).

Далее решение полученной системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) не является тривиальным. Во-первых, проверка ранга матрицы и расширенной матрицы СЛАУ показывает совместность уравнений. Во-вторых определитель системы равен нулю. Можно исследовать различные способы решения системы с учетом разреженности матриц, избыточности уравнений, возможностью усреднения решений из нескольких СЛАУ и т.д.

В рассматриваемом примере использовано приближенное вычисление нормального решения системы линейных уравнений с вырожденной матрицей [6]. Полученное решение показано на рис.3. Оно демонстрирует принципиальную возможность восстановления пиков в спектре с наложением, хотя точность такой коррекции оставляет желать лучшего. Оставим эту задачу на способ решения СЛАУ с вырожденной матрицей.

Для заданного  $M$  возможно априорно рассчитать все весовые коэффициенты  $d_{jk}$  в мат-



Число гармоник в спектре	№ гармоники (частоты)	Матрица наложения (гармоник 1÷24)	Значение в спектре
$\frac{f_0}{2}$	1	1000000000000000000000000010	0.00
	2	0100000000000000000000000100	0.00
	3	00100000000000000000000001000	0.00
	4	000100000000000000000000010000	40.00
	5	0000100000000000000000000100000	0.00
	6	00000100000000000000000001000000	0.00
	7	000000100000000000000000010000000	44.00
	8	0000000100000000000000000100000000	0.00
	9	00000000100000000000000001000000000	48.00
	10	000000000100000000000000010000000000	0.00
	11	0000000000100000000000000100000000000	0.00
	12	000000000002000000000000000000000000	0.00
$\frac{f_0}{3}$	1	1000000000000000010100000000	48.00
	2	0100000000000000010001000000	0.00
	3	001000000000000000100000100000	0.00
	4	000100000000000000000000010000	40.00
	5	0000100000000000000000000001000	0.00
	6	0000010000100000000000000000100	0.00
	7	0000001010000000000000000000010	44.00
	8	0000000200000000000000000000002	0.00
$\frac{f_0}{4}$	1	100000000001010000000000010	0.00
	2	0100000000100001000000000100	0.00
	3	00100000000000000000000001000	48.00
	4	0001000000000000000000000000010000	40.00
	5	00001010000000000000000000000100000	44.00
	6	0000020000000000000000000000000000	0.00

Рисунок 2 - Схема формирования спектральных шкал и систем уравнений для дискретных спектров  $X_p^*(k)$  при  $p$ -прореживании ряда с  $M = 24$

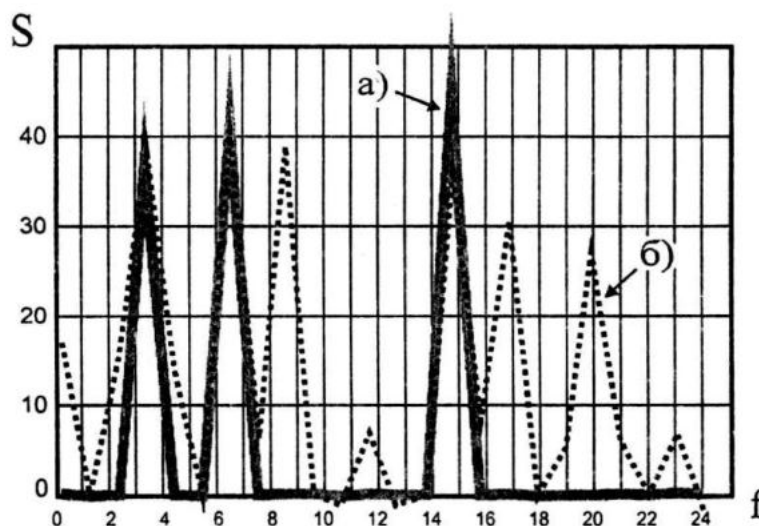


Рисунок 3 - Графики исходного спектра  $2 \cdot f_0 = 48$  гармоник (а) и полученного решением СЛАУ с вырожденной матрицей (б)

рице  $\|d_{jk}\|$  (где  $j = \overline{1, N}$  по всем вычисленным, упорядоченным и пронумерованным по  $j$  спектрам  $X_p^*(k)$  и  $k$  - нормированная частота) уравнения свертки

$$X(k) = \sum_{j=1}^N d_{jk} X_j^* \quad (20)$$

#### К формированию спектральных шкал

Структура спектральных чисел зависит от числа отсчетов  $M+1$  исходной последовательности  $x_T(i\tau_0)$  длительностью  $T = M \cdot \tau_0$ . Для получения целых и кратных частот при  $p$ -прореживании ряда необходимо, чтобы числа  $p$  были делителями числа  $M$ . Тогда общее число восстанавливаемых частот (формируемых уравнений) будет равно сумме всех делителей числа  $M/2$  плюс число делите-

лей числа  $M$ . Из теории чисел известно [4], что сумма делителей числа  $M$  растет быстрее самого числа  $M$  примерно в  $\ln M$  раз. Эта оценка совпадает с полученной ранее верхней оценкой числа восстанавливаемых частот. Представляют интерес числа с максимальными суммами делителей и числа делителей.

Из теории чисел [4] известно, что существуют такие числа, что отношение суммы их делителей к числу может быть сколь угодно большим. Эти числа и представляют наибольший интерес в качестве длин последовательностей отсчетов для реализации антиэйлайнга.

Перебором в таблице 1 представлены для четных чисел от 4 до 100 значения: набор делителей, число делителей, сумма делителей  $\sum d$ , общая сумма  $N$  делителей и числа делителей, отношение общей суммы к числу  $v = \frac{N}{M}$ .

Таблица 1

Число М	Делители числа	$\sum d$	N	v	Число М	Делители числа	$\sum d$	N	v
4	2	2	3	0,75	54	2,3,6,9,18,27	65	71	1,31
6	2, 3	5	7	1,16	56	2,4,7,8,14,28	63	69	1,23
8	2, 4	6	8	1	58	2, 29	31	33	0,57
10	2, 5	7	9	0,9	60	2,3,4,5,6,10,12, 15, 20,30	107	127	2,12
12	2, 3, 4, 6	15	19	1,58	62	2, 31	33	35	0,56
14	2, 7	9	11	0,78	64	2,4,8,16,32	62	68	1,06
16	2, 4, 8	14	17	1,06	66	2,6,11,22,33	74	79	1,20
18	2, 3, 6	11	14	0,78	68	2, 4, 17, 34	57	61	0,9
20	2, 4, 5, 10	21	25	1,25	70	2,3,5,7,10,14,35	73	79	1,13
22	2, 11	13	15	0,68	72	2,3,4,6,8,9,12, 24, 36	122	132	1,83
24	2,3,4,6,8,12	35	44	1,71	74	2, 37	39	41	0,55
26	2, 13	15	17	0,65	76	2, 4, 19, 38	63	67	0,88
28	2, 4, 7	13	16	0,57	78	2,3,6,13,26,39	89	95	1,22
30	2,3,5,6,10,15	41	47	1,57	80	2,4,5,8,10,16, 20, 30	95	103	1,62
32	2, 4, 8, 16	30	34	1,06	82	2, 41	43	45	0,55
34	2, 17	19	21	0,62	84	2,3,4,21,28,42	100	106	1,26
36	2,3,4,6,9,12,18	54	61	1,69	86	2, 43	45	47	0,55
38	2, 19	21	23	0,61	88	2,4,8,11,22,44	91	97	1,10
40	2,4,5,8,10,20	49	55	1,37	90	2,3,6,9,10,15,18, 30, 45	138	147	1,63
42	2,3,6,7,14,21	53	59	1,40	92	2, 4, 23, 46	75	79	0,86
44	2, 4, 11, 22	38	42	0,95	94	2, 47	49	51	0,54
46	2, 23	25	27	0,59	96	2,3,6,8,12,32,48	127	135	1,41
48	2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24	75	83	1,73	98	2, 7, 14, 49	73	77	0,78
50	2, 5, 10, 25	45	48	0,96	100	2,4,5,10,20,25,50	116	124	1,24
52	2, 4, 13, 26	44	48	0,92	120	2,3,4,5,6,8,10,12, 15,20,24,30,40,60	239	253	2,11

Из таблицы 1 видно, что для эффективной реализации антиэлайзинга для  $M$  в пределах  $4 \div 100$  необходимо брать длины  $M$  из следующего набора 12, 20, 24, 30, 36, 48, 60, 72, 90 (20). Наибольшее относительное увеличение  $2\nu = 4,24$  ширины спектра по сравнению с традиционным имеет место при  $M = 60$ .

Таблица 2

№ п/п	Отрезок натурального ряда	M	№ п/п	Отрезок натурального ряда	M
1	2 · 3	6	6	2 · 3 · 4 · 5 · 6 · 7 · 8	40320
2	2 · 3 · 4	24	7	2 · 3 · 4 · 5 · 6 · 7 · 8 · 9	362880
3	2 · 3 · 4 · 5	120	8	2 · 3 · 4 · 5 · 6 · 7 · 8 · 9 · 10	3628800
4	2 · 3 · 4 · 5 · 6	720	9	2 · 3 · 4 · 5 · 6 · 7 · 8 · 9 · 10 · 11	39916800
5	2 · 3 · 4 · 5 · 6 · 7	5040	10	2 · 3 · 4 · 5 · 6 · 7 · 8 · 9 · 10 · 11 · 12	5748019200

Отметим, однако, что число 60, обладающее экстремальной суммой делителей в интервале от 2 до 100 (см. табл.1), не вошло в таблицу 2.

Представляет интерес оценка пригодности для антиэлайзинга типичных рядов обрабатываемых данных с длинами, кратными степени двух обычно удобными для применения быстрого преобразования Фурье.

Таблица 3

M	128	256	512	1024	2048	4096	8192
$\Sigma$	132	261	518	1031	2056	5005	8202
$\ln M/2$	4,15	4,8	5,5	6,2	6,9	7,6	8,3
$N_m$	265	614	1408	3174	7065	15564	33996

Из анализа значений  $\Sigma$  и  $N_m$  в таблице 3 можно сделать вывод, что ряды данных с указанными длинами  $M$  не пригодны для описанной выше процедуры антиэлайзинга.

Можно предположить, что экстремальные значения функция  $N(M)$  будет принимать при  $M = M_1 \cdot M_2$ , где  $M_1$  и  $M_2$  из ряда (20) набора чисел из интервала от 41 до 100, при которых имеют место экстремумы функции  $N(M)$ .

Попарные произведения чисел ряда 20 дают следующий ряд чисел с предполагаемыми экстремальными значениями сумм делителей и числа делителей 240, 288, 360, 400, 480, 576, 600, 720, 864, 960, 1080, 1152, 1200, 1296, 1440, 1728, 1800, 2160, 2304, 2592, 2700, 2880, 3240, 3456, 3600, 4320, 5184, 5400, 6480, 8100.

Нет никаких гарантий, что в этой последовательности есть число, которому соответствует

Предполагаем, что экстремальными суммами делителей будут обладать числа, образованные частными произведениями членов усеченного натурального ряда, представленные в таблице 2.

Значения сумм делителей и числа делителей  $\Sigma$ , оценки потенциальных коэффициентов расширения шкалы частот в  $\ln M/2$  раз и потенциально возможной максимальной ширины шкалы частот  $N_m$  для типичных длин  $M$  представлены в таблице 3.

глобальный максимум функции  $N(M)$  на интервале  $M$  от 4 до 8100.

Задача нахождения таких чисел остается открытой.

#### Коррекция наложения частот при дискретизации процессов со степенными спектрами.

Многие процессы и поля в окружающей среде характеризуются степенными моделями энергетических спектров, спадающих по закону  $S(f) = C_0 |f|^{-m}$ , где  $m = 1,5$ . Требуется определить  $C_0$  и  $m$ .

При дискретизации процесса с частотой  $f_0$  и вычислении дискретного энергетического спектра  $S^*(f)$  аналогично выражению (12), для  $f = f_0/2$  можем записать



$$\begin{aligned}
 S^*(f_0/2) &= 2 \cdot \sum_{\text{нечет } i \geq 1}^{\infty} S(i \frac{S_0}{2}) = 2 \cdot C_0 \cdot \sum_{\text{нечет } i \geq 1}^{\infty} \left| i \frac{f_0}{2} \right|^{-m} = \\
 &= 2 \cdot C_0 \cdot \left[ \frac{f_0}{2}^{-m} + 3^{-m} \cdot \frac{f_0}{2}^{-m} + 5^{-m} \cdot \frac{f_0}{2}^{-m} + \dots \right] = \\
 &= 2 \cdot C_0 \cdot \left( \frac{f_0}{2} \right)^{-m} \cdot [1 + 3^{-m} + 5^{-m} + \dots] = 2 \cdot C_0 \cdot \left( \frac{f_0}{2} \right)^{-m} \cdot A_m
 \end{aligned} \quad (26)$$

где  $A_m = [1 + 3^{-m} + 5^{-m} + \dots]$  (27)

Можем записать, используя справочные данные [5],

при  $m = 1$  :

$$A_1 = (1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots) \rightarrow \infty$$

при  $\frac{1}{n} < \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  - уровень шумов

$$A_1 = (1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{n}) = \frac{1}{2} \ln n \quad (28)$$

при  $m = 2$  :

$$A_2 = (1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots) = \frac{\pi^2}{8} \approx 1,23 \quad (29)$$

при  $m = 3$  :

$$A_3 = (1 + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} + \dots) \approx 1,12 \quad (30)$$

(при линейной интерполяции из  $A_2$  и  $A_4$ )

при  $m = 4$  :

$$A_4 = (1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \dots) = \frac{\pi^4}{96} \approx 1,01 \quad (31)$$

при  $m = 5$  :

$$A_5 = (1 + \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} + \dots) \approx 1,00 \quad (32)$$

(поскольку  $A_5 < A_4$ )

Осуществим процедуру антизлайинга.

Прореживаем исходный ряд  $x(i\tau_0)$ , например, через один отсчет ( $p = 2$ ) и имеем частоты дискретизации  $f_0$  и  $f_{01}$ . По исходному и прореженному рядам вычисляем значение функции спектральной плотности  $S_1^*(f_0/2)$  и

$S_2^*(f_{01}/2)$  при частотах  $f_0/2$  и  $f_{01}/2$ .

Получим

$$\begin{cases} S_1^*(f_0/2) = 2 \cdot C_0 \cdot (f_0/2)^{-m} \cdot A_m \\ S_2^*(f_{01}/2) = 2 \cdot C_0 \cdot (f_{01}/2)^{-m} \cdot A_m \end{cases} \quad (33)$$

Из этих двух уравнений после их деления можем вычислить

$$m = \frac{\ln \left[ \frac{S_1^*(f_0/2)}{S_2^*(f_{01}/2)} \right]}{\ln \left( \frac{f_{01}}{f_0} \right)} \quad (34)$$

Далее по известным  $m$  находим  $A_m$  из выражений (28–32).

Далее из выражения (26) определим  $C_0$  :

$$C_0 = 2^{-m} \cdot f_0^m \cdot A_m^{-1} \cdot S^*(f_0/2) \quad (35)$$

Таким образом найдены  $C_0$  и  $m$  степенного спектра процесса.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Гайский П.В. Наложение высокочастотных составляющих в спектре дискретизованного сигнала. / Системы контроля окружающей среды: Сб. науч. тр. /НАН Украины МГИ: - Севастополь, 1999. С. 97-104.
2. Гайский В.А., Гайский П.В. Погрешности интерполяции процессов с известным спектром. Там же. С. 105-117.
3. Макс. Методы и техника обработки сигналов при физических измерениях. - М.: "Мир", 1983.
4. Г.Хассе. Лекции по теории чисел. И.Л. - М., 1953, 527 с.
5. И.Н.Бронштейн, К.А.Семендяев. Справочник по математике. Изд-во "Наука", - М., 1964. 608 с.
6. В.П.Дьяконов. Справочник по алгоритмам и программам на языке бейсик для персональных ЭВМ. Изд-во "Наука", - М., 1987. 240с.