НЕКОТОРЫЕ АСПЕКТЫ ОПТИМАЛЬНОГО ОЦЕНИВАНИЯ КАЧЕСТВА ПРОГНОЗА ДИСКРЕТНЫХ ПРОЦЕССОВ

В.Л. Посошков

Морской гидрофизический институт
НАН Украины
Г. Севастополь, ул. Капитанская, 2
E-mail: vao@alpha.mhi.iuf.net

Рассматривается принцип формирования универсального числового критерия для оценивания качества прогноза дискретных переменных, состоящих из двух или трех категорий, основанный на концепции счетной матрицы. Числовой критерий в случае бинарного процесса получен на основании одних лишь необходимых условий. Предложен более общий вид достаточных условий для определения элементов счетной матрицы в случае процесса из трех категорий.

Многие числовые критерии достоверности прогноза в метеорологии, используемые для оценки качества предсказания дискретных величин, являются неоптимальными, в том смысле, что постоянный прогноз некоторых событий приводит к лучшим числам, чем постоянный прогноз других событий. Такие меры успеха могут спровоцировать прогнозистов предпочесть некоторые прогнозируемые события в ущерб другим событиям, образуя, таким образом, прогноз, обладающий систематическим смещением или другими нежелательными характеристиками.

Этот недостаток отсутствует в количественной оценке оправдываемости прогноза, именующейся в западной литературе как Equitable True Score (ETS), или True Skill Statistic (TSS) [1]. Эта мера качества выводится из достаточно общих и разумных в метеорологическом смысле соображений [2]. В данной статье предлагается альтернативный подход в определении элементов весовой матрицы, использующейся для конструирования числовой меры качества.

Сформулируем основные принципы, использующиеся для определения класса чисел, служащих мерой качества прогноза переменных, представляющих собой категории, или события.

Обозначив прогноз через f, наблюдение (наблюденное событие или наблюденная величина интересующего нас события) через x, предположим, что P(f,x) представляет собой совместное распределение f и x. Это распределение содержит в себе информацию о прогнозе, о наблюдении и о связи, соотношении между прогнозом и наблюдением [3].

Простейшей ситуацией верификации является та, которая включает в себя прогноз одного из двух взаимоисключающих событий, таких как 'дождь/нет дождя'. Обозначим

$$f = \begin{cases} 0, \textit{если нет дождя} \\ 1, \textit{если дождь} \end{cases} \qquad (1)$$

и соответственно

$$x = \begin{cases} 0, \textit{если сухо} \\ 1, \textit{если выпал дождь} \end{cases} \qquad (2)$$

Совместное распределение f и x можно изобразить в терминах таблицы 2 X 2, содержащей относительные частоты, при которых элементы (f, x) равны (0,0); (0,1); (1,0); (1,1), а сами элементы распределения такой «таблицы контингентности» (или, как принято в западной литературе C-матрицы) равны p_{ij} (i,j=1,2). Элементы совместного распределения вероятностей p_{ij} означают, что происходит j-тое событие, когда прогнозируется событие i . Более распространено использование таблицы C в виде

$$C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad (3)$$

где a – число нулей, предсказанных как «0», b – число единиц, предсказанных как «1» (misses), c – число нулей, предсказанных как «1» (false alarm) и d – число единиц, предсказанных как «1» (hits) или число корректных значащих прогнозов.

С помощью матрицы C в метеорологии за последние 100 лет выработано множество критериев, определяющих меру успеха прогноза [1,4]. Возьмем, к примеру, такое число, как FRC (fraction correct, или доля угаданных событий). Оно определяется как

$$FRC = \frac{a+d}{N}. \qquad (4).$$

Очевидно, в случае идеального прогноза a+d=N и $FRC_{ид}=1$. В случае абсолютно неверного прогноза получим величину, равную –1. Наихудший случай соответствует случайному прогнозу типа «орел-решка», когда a+d=b+c и $FRC_r=0.5$, т.е., ничего не представляя о процессе мы можем с вероят ностью 50% делать корректный прогноз. Недобросовестный пргнозист может добиться еще лучших результатов, если оба события существенно разновероятны. Пусть, к примеру, вероятность события "сухо" P_1 в 9 раз превышает вероятность P_2 события «дождь». Если это отнести к летним условиям Севастополя, то это еще не самый экстремальный случай (дождливый день может произойти раз в 2-3 месяца). Тогда, делая постоянный прогноз «сухо» для всех N дней, очевидно, мы получим число (a=0.9N, d=0) FRC=90%, хотя проку от такого прогноза мало.

Таким образом, мы приходим к задаче оптимального оценивания качества прогноза или поиску таких числовых критериев, которые были бы сбалансированы в том смысле, что качество прогноза не зависело бы от климатической вероятности события.

По существу, С-таблица содержит всю необходимую информацию о прогнозе и наблюдении, однако на практике вместо 4-х чисел, содержащихся в таблице, используют, количественные критерии, состоящие из одного числа. Одна из концепций для оценивания качества прогноза событий, основана на счетной, или весовой матрице.(примером другой можно указать корреляционную функцию или число Брайера [5]). Эта матрица **S** представляет собой квадратное множество чисел, s_{ij} (i,j =1,n, где n число категорий) которые присваиваются каждой возможной комбинации прогнозируемого и наблюдаемого событий.

Совместное распределение вероятностей «прогноз-наблюдение» можно представить в виде n x n характеристической матрицы **P**$=(p_{ij})$ $(p_{ij} \ge 0, \sum_i \sum_j p_{ij} = 1; i = 1,...,n)$,

где p_{ij} обозначают относительные частоты случаев, когда предсказывается i-тое событие, а j-тое событие наблюдается. Далее, пусть p$=(p_j)$ является вектором климатической вероятности, где $p_j = \sum_i p_{ij}, (j = 1,...,n)$ суть выборочная климатологическая вероятность появления j-того события, и пусть q$=(q_i)$ представляет собой вектор прогностической вероятности, где $q_i = \sum_j p_{ij} (i = 1,...,n)$ является выборочной предиктивной вероятностью i-того прогноза.

Допустим, что элементы S не зависят от элементов P, т.е. предполагается, что базовые числа, присваиваемые различным сочетаниям предсказуемых и наблюдаемых событий, не зависят от относительной частоты, с которой эти сочетания реализуются в наблюдениях в процессе верификации выборки данных. Это допущение представляется вполне разумным, с точки зрения желательности разделения задачи прогноза и задачи начисления весов. Следует заметить, однако, что это допущение никоим образом не исключает возможности, что элементы **S** могут зависеть от элементов вектора климатологической вероятности P.

Наконец, пусть S обозначает число на шкале достоверности, связанное с характеристической матрицей **P** и счетной матрицей **S.** Если предположить, что S – линейная комбинация их элементов, то можно написать:

$$S = \sum_j \sum_i p_{ij} s_{ij} . \qquad (5)$$

Таким образом, S представляет собой взвешенное среднее s_{ij}, где веса суть вероятности взаимных возможных комбинаций прогнозов и совершенных событий.

Как определяется весовая матрица? Самый простой способ состоит в следующем. Всем правильно предсказанным событиям присваивается число 1, а ошибочным число 0. Итог нормируется на длину выборки данных N. В нашем случае

$$S = \frac{a \cdot 1 + b \cdot 0 + c \cdot 0 + d \cdot 1}{N} = \frac{a + d}{N} = FRC \qquad (6)$$

Как уже видели, это число чувствительно к соотношению климатических вероятностей p_1/p_2 Поэтому счетная матрица, основанная на идентичной, или кронекеровской матрице приводит к преимуществу при прогнозировании более вероятных событий в ущерб маловероятным.

Этот пример иллюстрирует принципиальные недостатки несбалансированных числовых мер. Такие числа (оценки) не только ведут к ошибочным заключениям в отношении чисел, используемых различными прогнозистами, но могут также вдохновить (спровоцировать) отдельных прогнозистов – и даже разработчиков методов прогноза – давать прогнозы, смещенные в сторону одних событий в ущерб другим событиям. Следовательно, надо наложить ограничения на числовые меры качества, чтобы обеспечить их равнопригодность.

Основная концепция выработки оптимальной оценки качества прогноза переменных, представляющих собой дискретные числа, относящиеся к двум и более категориям (событиям), состоит в том, чтобы постоянный прогноз – так же как и прогноз, основанный на случайности – достигал одинакового ожидаемого числа (которое может быть выбрано нулевым). Более того, можно показать, что числовая матрица, связанная со сбалансированным критерием обладает другими полезными свойствами: Например, числа, присваиваемые корректным прогнозам событий, возрастают по мере уменьшения климатологической вероятности данного события. Следует отметить, что меры успеха, основанные на идентичной счетной матрице, могут так же быть сбалансированными в частном случае бинарной ситуации, когда в климатологическом смысле оба события равновероятны. Так, в бинарной ситуации в метеорологии, иногда разумно присваивать правильным событиям идентичные числа, когда эти события равновероятны (в климатологическом смысле), но они вряд ли хорошо применимы, когда вероятность одного события много больше другого.

Все числовые меры качества обладают областью числовых значений, с началом (нулевой точкой) и масштабом (единицей измерения шкалы). При этом выбор начала отсчета и шкалы произвольны. Выберем в качестве α начало шкалы (α определим позднее). Выберем для S положительную ориентацию, т.е. будем считать, что большие числа лучше. Тогда будем говорить, что числа меньше α обладают отрицательной оправдываемостью, а больше α - положительной.

Фундаментальная концепция состоит в том, что постоянный прогноз любого события, равно как и прогноз, основанный на случайных посылках, достигал бы на шкале качества одинакового уровня достоверности. Этот уровень достоверности представляет собой начало отсчета (нулевую точку) на шкале и обозначается здесь через α.

Пусть S_i обозначает ожидаемую отметку для постоянного прогноза события i (i=1,..n); тогда

$$S_i = \sum_j p_j s_{ij} = \alpha \quad ((i = 1,..n). \qquad (7)$$

Предположение, заложенное в (7) подразумевает также, что ожидаемое число для случайного прогноза S_r также равно α, а именно:

$$S_r = \sum_i \sum_j q_i p_j = \alpha . \qquad (8)$$

Из (7) следует, что

$$S_r = \sum_i q_i S_i = \alpha . \qquad (9)$$

Пусть S_p обозначает ожидаемое число для совершенного (идеального) прогноза. Тогда максимальная величина на шкале чисел (обозначим ее через β) будет равна S_p.

$$S_p = \sum_j p_j s_{jj} = \beta . \qquad (10)$$

В результате имеется n+1 предположений и n^2 неизвестных . В общем случае $n^2 > n+1$ при $(n \geq 2)$. В случае бинарного прогноза ($n = 2$) имеем $n^2 = 4, n = 3$ и недостает одного условия для однозначного решения задачи. Это условие не является необходимым, но оно достаточно для решения линейной системы. В работе [2] в качестве недостающего используется предположение о симметричности счетной матрицы. Такое предположение в общем случае снижает число неизвестных с n^2 до $\frac{n(n+1)}{2}$.

Случай двух событий. При n=2 число неизвестных в точности равно числу уравнений. Полагая $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $p = (p_1, p_2)$; $q = (q_1, q_2)$, . получим:

$$p_1 s_{11} + p_2 s_{12} = 0, \qquad (11)$$

$$p_1 s_{21} + p_2 s_{22} = 0, \qquad (12)$$

$$p_1 s_{11} + p_2 s_{22} = 1. \qquad (13)$$

При условии $s_{21} = s_{12}$ [2] из системы (11) – (13) легко получается искомая величина S:

$$S = (p_{11} p_{22} - p_{12} p_{21}) / (p_1 p_2) . \qquad (14)$$

При этом $s_{11} = p_2 / p_1, s_{22} = p_1 / p_2$, а $s_{12} = s_{21} = -1$. Таким образом, поощрается угадывание маловероятных событий в большей степени, чем более вероятных и штрафуется одинаково некорректный прогноз как одних, так и других событий. Легко видеть, что совершенный прогноз соответствует числу S=1, постоянный или случайный прогноз соответствует числу S=0, а при полностью неправильном прогнозе S= -1. Очевидно, последний случай эквивалентен идеальному прогнозу.

Интересно, что полученное нами число идентично числу, первоначально введенному Пирсом [6] в 1884г. и часто идентифицирующемуся в наши дни как *индекс эффективности* Купера [7,8],. Эта ожидаемая величина также линейно связана с мерой S', определенной Грингортеном [2] (S'=S+1).

Тот факт, что числа счетной матрицы чувствительны к климатологическим вероятностям событий, предполагает, что сбалансированные меры успеха могут оказаться полезными в случаях редких событий, в которых важно поощрять прогноз этих событий и соответствующим образом 'награждать' правильные прогнозы этих событий.

Остается неопределенность в выработке достаточных условий для нахождения элементов S-матрицы. Эта двусмысленность, или степень свободы дает исследователю возможность изменять счетную матрицу – и соответствующий критерий качества – в зависимости от возникающих задач.

Условие симметричности счетной матрицы, взятое как недостающее достаточное условие и положенное в основу вывода формулы (14), являясь красивым с точки зрения математики, представляется несколько искусственным с позиций здравого смысла. Представляется не вполне логичным, что система штрафов за некорректный прогноз обладает симметрией, невзирая на величину климатического отношения вероятностей событий p_1/p_2. Логичнее предположить, что система штрафов (иными словами величина элементов счетной матрицы s_{12} и s_{21}) также зависит от этого отношения. В качестве первого шага к обобщению предположим, что

$$s_{21} = \varepsilon(p_2 / p_1)\, s_{12}, \qquad (15)$$

где $\varepsilon(1) = 1$. Рассмотрим частный случай. Пусть

$$\varepsilon(p_1 / p_2) = p_2 / p_1 \qquad (16)$$

При этом счетная матрица будет равна

$$\left(\left(s_{ij}\right)\right) = \begin{pmatrix} 1/2p_1 & -1/2p_2 \\ -1/2p_1 & 1/2p_2 \end{pmatrix}. \qquad (17)$$

Мы видим, что в этом случае весовая матрица обладает внутренней симметрией, наиболее полно и логично отражающей связь ее элементов с климатологией, когда и поощрение за правильный прогноз и система штрафов за ошибочный в одинаковой мере зависят от климатической повторяемости событий. Соответствующий критерий качества будет иметь вид

$$S = \frac{1}{2p_1}(a - c) + \frac{1}{2p_2}(d - b); \qquad (18)$$

Несмотря на разные подходы к наложению достаточного условия на счетную матрицу S, можно легко показать, что это оценочное число тождественно равно определяемому формулой (14). Более того, покажем, что для получения (12) вообще нет необходимости делать дополнительное допущение о симметричности счетной матрицы

Итак, обозначим элемент s_{12} через k. Тогда, разрешая систему (11) - (13) относительно оставшихся элементов весовой матрицы и образуя число S согласно формуле (5), получим (с учетом того, что $p_{11} = \dfrac{a}{N}$ и т. д.)

$$\begin{aligned} N p_1 p_2 S = -c p_2 + d p_1 + \\ k p_2 (N_1 p_2 - N_2 p_1) \end{aligned}. \qquad (19)$$

Легко показать, что

$$-c p_2 + d p_1 = \frac{ad - bc}{N}, \qquad (20)$$

а

$$N_1 p_2 - N_2 p_1 = 0. \qquad (21)$$

Таким образом, вновь приходим к формуле (14).

<u>Связь с традиционной корреляционной функцией.</u> Выведем теперь традиционный коэффициет корреляции между прогнозируемым и наблюденным двоичным процессом, т. е. временными рядами x и f, принимающими значения "0" и "1" и имеющие длину выборки N. Пусть N_1 и N_2 обозначают соответствеено число наблюденных событий «0» и «1», а P_1 и P_2 – соответствующие величины для прогнозируемых событий. Очевидно средние величины будут равны $x_{cp}=N_2/N$, $f_{cp}=P_2/N$. Используя С-таблицу, запишем корреляционную функцию в следующем виде:

$$C_{xf} = \begin{bmatrix} d(1 - \frac{N_2}{N}) - \\ b\frac{P_2}{N}(1 - \frac{N_2}{N}) - \\ c\frac{N_2}{N}(1 - \frac{P_2}{N}) + \\ aN_2\frac{P_2}{N^2} \end{bmatrix} / N, \qquad (22)$$

а дисперсии соответствующих процессов будут равны

$$\sigma_x^2 = \left[N_1(1-\frac{N_1}{N})^2 + N_1(\frac{N_2}{N})^2 \right], \quad (23)$$

$$\sigma_f^2 = \left[P_2(1-\frac{P_2}{N})^2 + P_1(\frac{P_2}{N})^2 \right]. \quad (24)$$

Коэффициент корреляции находим обычным образом

$$\rho = \frac{C_{xf}}{\sigma_x \sigma_f}, \quad (25)$$

где σ_x и σ_f -соответствующие среднеквадратичные отклонения процессов x и f. Проведя алгебраические преобразования, окончательно находим

$$\rho = \frac{ad - bc}{\sqrt{N_1 N_2 P_1 P_2}}. \quad (26)$$

Из формул (26) и (14) видно, что коэффициент корреляции и число Хансена-Купера пропорциональны детерминанту С-матрицы и различаются лишь знаменателями. Более того, эти оценки в точности равны, если прогнозируемые и наблюдаемые события имеют одинаковую частоту, т.е. $P_1=N_1$, $P_2=N_2$. Сразу же бросается в глаза несбалансированность формулы (23) в том смысле, о котором говорилось выше. Поскольку сумма $P_1+P_2 = N$ - величина постоянная, то наибольшего значения произведение P_0P_1 достигает при $P_0=P_1$. По мере приближения фактора P_0/P_1 к нулю или единице оценка (26) растет по сравнению с оценкой (14)

<u>Случай трех событий.</u> Вместо (11) будем иметь

$$S_1 = p_1 s_{11} + p_2 s_{12} + p_3 s_{13} = 0, \quad (27)$$

$$S_2 = p_1 s_{21} + p_2 s_{22} + p_3 s_{23} = 0, \quad (28)$$

$$S_3 = p_1 s_{31} + p_2 s_{32} + p_3 s_{33} = 0, \quad (29)$$

$$p_1 s_{11} + p_2 s_{22} + p_3 s_{33} = 1. \quad (30)$$

Остается 5 неопределенных связей. Введем 3 дополнительных условия:

$$p_j s_{ij} = p_i s_{ji}. \quad (31)$$

Тогда диагональные элементы матрицы S определяются из соотношений

$$p_1 s_{11} = -p_2 s_{12} - p_3 s_{13}, \quad (32)$$

$$p_2 s_{22} = -p_2 s_{12} - p_3 s_{23}, \quad (33)$$

$$p_3 s_{33} = -p_3(s_{13} + s_{23}), \quad (34)$$

а «косые» элементы связаны условием

$$-\frac{1}{2} = p_2 s_{12} + p_3(s_{13} + s_{23}) \quad (35)$$

Остаются еще две свободные связи, т.е. два неопределенных элемента числовой матрицы из трех: s_{12}, s_{13} *и* s_{23}. Мы рассмотрим случай упорядоченных событий. Например, события «1», «2» и «3» можно трактовать как «осадки ниже нормы», «около нормы» и «выше нормы». При этом, если делается ошибочный прогноз на две категории. то на такой прогноз должно начисляться меньшее число, чем на ошибку в одну категорию. В Советском Союзе для оценивания такого прогнозирования использовалась следующая счетная матрица [9]

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \quad (36)$$

Числовая матрица сконструирована разумно. Прогноз можно считать успешным, если критерий S (формула (5)) превышает величину 0.5 (нулевой уровень на шкале достоверности). Однако, легко видеть, что если принять $p_1 = p_2 = p_3 = 1/3$, то при случайном прогнозе, когда $p_{ij} = q_i p_j = 1/9$ (i,j = 1,2,3), число $S = 5/9 = 0.56$, т.е. превышает ожидаемую отметку 0.50.

Сохраним условие, положенное в основу (36), а именно: что ошибка в прогнозе на две категории штрафуется больше, чем ошибка на одну категорию, но видоизменим его в соответствии с (31). Тогда одно издвух недостающих условий будет выглядеть как

$$\frac{p_3}{p_1} s_{13} = 2\frac{p_3}{p_2} s_{23} \quad (37)$$

или

$$p_2 s_{13} = p_1 s_{23}, \quad (37а)$$

а один элемент матрицы S (пусть это будет элемент s_{12}) оставим произвольным, обозначив его символом k. После соответствующих преобразований получим

Пусть, далее, в соответствии с формулой (31), учитывающей, в отличие от условия симметрии счетной матрицы неравноценность ошибок прогнозирования существенно разновероятных событий

$$\frac{p_3}{p_2} s_{23} = \frac{p_2}{p_1} s_{13}. \quad (38)$$

Это последнее из условий, замыкающих линейную систему уравнений для определения всех 9-ти элементов весовой матрицы **S**.

Опуская громоздкие алгебраические преобразования, выпишем окончательно эти элементы в явном виде через климатические вероятности p_1, p_2, p_3.

$$S = \frac{1}{3p_1 + p_2}\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\frac{p_1}{p_2} & -\frac{p_1}{p_3} \\ -\frac{1}{2}\frac{p_1+p_2}{2p_2} & -\frac{1}{2}\frac{p_2}{p_3} \\ -1 & -\frac{1}{2} & \frac{2p_1+p_2}{2p_3} \end{pmatrix}. \quad (39)$$

Наконец, рассмотрим случай, когда категории «1» - «3» построены таким образом, что климатические вероятности всех трех событий равны, т.е. $p_1 = p_2 = p_3 = 1/9$. Тогда счетная матрица будет иметь вид:

$$S = \frac{3}{4}\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}. \quad (40)$$

Полученное выражение весьма емко отражает логику учета положительных и негативных сторон результата прогноза. Легко проверить, что как при постоянном прогнозе какой-либо одной категории, так и при совершенно случайном, ожидаемый критерий качества S=0. Идеальный прогноз дает S=1, в то время как при совершенно некорректном прогнозе S= 1. Далее, ошибка на одну категорию (элементы s_{12}, s_{21}, s_{23}, s_{32}) штрафуется в два раза меньше ошибки на две категории (элементы s_{13}, s_{31}). Наконец, неравенство элементов главной диагонали (которое не задавалось априори) отражает неравноценность коррекного прогноза событий, относящихся к разным (упорядоченным) категориям. Поскольку степень «риска» прогнозирования крайних категорий «1» и «3» больше (в два раза больше штрафуется некорректный прогноз), то и поощрение такого предсказания должно осуществляться в большей степени. Это отражается в том, что элемент s_{22} в полтора раза меньше элементов s_{11} и s_{33} матрицы **S**.

<u>Заключение</u> Предложенны s_{12}, й вариант формирования количественной оценки качества прогноза дискретных переменных, представляющих собой два или три взаимоисключающих события, основывается на известных требованиях к универсальности такого оценивания по отношению к климатической повторяемости этих событий. В отличие от предшествующих работ вывод числового критерия проведен на основании более общих соображений о структуре матрицы весовых коэффициентов. В случае бинарных событий числовой критерий качества получен без использования условия симметричности счетной матрицы. Более общие условия, чем симметрия, использовались и при нахождении элементов весовой матрицы в случае событий, состоящих из трех категорий. Использование такого рода подходов, связанных с отказом от слишком жестких априорных предположений о структуре весовой матрицы (например, предположение о симметрии) дает надежду на формулирование иного класса критериев качества прогноза, эффективных с точки зрения пользователя.

ЛИТЕРАТУРА

1.Marzban C. and Stumpf G.G. A Neural Network for Damaging Wind Prediction // Wea. Forcasting.-1998.-13.-151-163.

2. Gandin, L.S., and A.H. Murphy. Equitable Skill Scores for Categorical Forecasts // Mon. Wea. Rev.-1992.- 120.- pp.361-370

3. Murphy, A.H., and R.L.Wincler. A General Framework for Forecast Verification. // Mon. Wea. Rev.- 1987. –115- pp.1330-1338

4. Hamill T.M. Hypothesis Tests for Evaluating Numerical Precipitation Forecasts // Wea. Forecasting. –1999.- pp.155-167.

5. Brier, G.W. Verification of forecasts expressed in terms of probabilities // Mon. Wea. Rev-1950.- 78.- pp.1-3.

6. Peirce, C.S. The numerical measure of the success of predictions // Science.-1884.- 4.- pp.453-454

7. Hansen,A.W., and W.J.A. Kuipers. On the relationship between the frequency of rain and various meteorological parameters. //Koninclijk Nederlands Meteorologisch Institut, Meded.Verhand.-1965.- 81.- pp.2-15.

8. Daan, H. Sensitivity of the verification scores to classification of the predictand // Mon. Wea. Rev –1985.- 113.- pp.1384-1392

9. Gandin, L.S. On methodologically unbiased estimates of the successfulness of three-category forecasts // Trudi, Main Geophys. Observ.- 1977.- No 397.-pp. 130-136.