

**ВЫНУЖДЕННЫЕ ВОЛНЫ В
ПРЯМОУГОЛЬНОМ БАССЕЙНЕ,
ЗАПОЛНЕННОМ
СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ
ЖИДКОСТЬЮ**

П. В. Рублёв, Л. В. Черкесов

Морской гидрофизический институт НАН
Украины
г. Севастополь, ул. Капитанская, 2
E-mail: oaoi@alpha.mhi.iuf.net

В рамках общей линейной теории изучаются волны, генерируемые поверхностными давлениями в прямоугольном бассейне постоянной глубины, заполненном экспоненциально стратифицированной жидкостью.

1. Исследуем вынужденные колебания непрерывно стратифицированной жидкости в прямоугольном бассейне постоянной глубины (рис. 1).

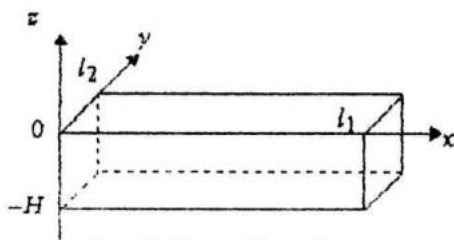


Рис. 1. Схема бассейна

Колебания вызываются изменениями давлений на свободной поверхности. Действие силы Кориолиса не учитывается, но учитывается влияние диссипативных сил. Жидкость предполагается невязкой, колебания малыми. При этих условиях движение жидкости описывается уравнениями [1]

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_1}{\partial x} - \mu u, \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_1}{\partial y} - \mu v, \\ \frac{\partial w}{\partial t} &= -g \frac{\rho_1}{\rho_0} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_1}{\partial z} - \mu w, \\ \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + w \frac{d\rho_0}{dz} &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

с граничными условиями:

$$\begin{aligned} u &= 0 \text{ при } x=0, x=l_1, \\ v &= 0 \text{ при } y=0, y=l_2, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\left(\frac{1}{g\rho_0} \frac{\partial p_1}{\partial t} - w \right)_{z=0} = \frac{1}{g\rho_0} \frac{\partial p_0}{\partial t}, \quad (3)$$

$w = 0$ при $z = -H$.

Здесь u, v, w - проекции скорости на оси x, y, z соответственно, p_0 - давление на свободной поверхности, p_1 - динамическая составляющая давления, $\rho_0(z)$ - плотность жидкости в невозмущённом состоянии, $\rho^0 = \rho_0(0)$, ρ_1 - динамическая составляющая плотности жидкости, g - ускорение свободного падения, μ - коэффициент диссипации.

Пусть

$$p_0(x, y, t) = \bar{p}_0 \cos \delta_1 j x \cos \delta_2 k y \sin \sigma t,$$

где $\delta_1 j = \pi j / l_1, j = 1, 2, 3, \dots$

$$\delta_2 k = \pi k / l_2, k = 1, 2, 3, \dots$$

Для решения системы уравнений (1) с граничными условиями (2), (3) воспользуемся методом комплексных амплитуд и будем искать неизвестные функции в виде

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= \bar{u}(z) \sin \delta_1 j x \cos \delta_2 k y \exp i \sigma t, \\ \tilde{v} &= \bar{v}(z) \cos \delta_1 j x \sin \delta_2 k y \exp i \sigma t, \\ \tilde{w} &= \bar{w}(z) \cos \delta_1 j x \cos \delta_2 k y \exp i \sigma t, \\ \tilde{p}_1 &= \bar{p}_1(z) \cos \delta_1 j x \cos \delta_2 k y \exp i \sigma t, \\ \tilde{p}_0 &= \bar{p}_0(z) \cos \delta_1 j x \cos \delta_2 k y \exp i \sigma t. \end{aligned} \quad (4)$$

Давление на свободной поверхности также представим в комплексном виде:

$$\tilde{p}_0(x, y, t) = \bar{p}_0 \cos \delta_1 j x \cos \delta_2 k y \exp i \sigma t. \quad (5)$$

При этом искомые функции являются минимумами частями выражений (4), $u(x, y, z, t)$ и $v(x, y, z, t)$ удовлетворяют граничным условиям (2). Будем также рассматривать амплитуду вертикального смещения $\zeta(x, y, z, t)$, определяемую из условия $\partial \zeta / \partial t = w$. В комплексном виде она представляется так:

$$\tilde{\zeta} = \bar{\zeta}(z) \cos \delta_1 j x \cos \delta_2 k y \exp i \sigma t.$$

Далее черточки над $u, v, w, \zeta, p_1, p_0, \rho_1$ и индексы j, k и $\delta_{1,2}$ для простоты письма опускаем.

Подставляя (4), (5) в (1), (3) и полагая $\mu = \sigma\mu_1$, имеем для определения $w(z)$ уравнение

$$\frac{d^2 w}{dz^2} + b^2 w = 0 \quad \left(b = \sqrt{(\delta_1^2 + \delta_2^2) \left(\frac{N^2}{\alpha \sigma^2} - 1 \right)} \right) \quad (6)$$

с граничными условиями:

$$\left(\frac{\alpha \sigma^2}{g(\delta_1^2 + \delta_2^2)} \frac{dw}{dz} - w \right)_{z=0} = \frac{i \sigma p_0}{g \rho^0}, \quad (7)$$

$$(w)_{z=-H} = 0. \quad (8)$$

Здесь $N = (-g \rho_0^{-1} d\rho_0/dz)^{1/2}$ — частота Вайселя-Брента, $\alpha = 1 - \mu_1$. Функции u, v, ζ, p_1, P_1 определяются через w следующим образом:

$$\begin{aligned} u &= -\frac{\delta_1}{\delta_1^2 + \delta_2^2} \frac{dw}{dz}, & v &= \frac{\delta_2}{\delta_1} u, \\ \zeta &= \frac{w}{i\sigma}, & p_1 &= -\frac{w}{i\sigma} \frac{d\rho_0}{dz}, \\ P_1 &= -\frac{i\sigma \alpha p_0}{\delta_1^2 + \delta_2^2} \frac{dw}{dz}. \end{aligned} \quad (9)$$

Итак, исходная задача (1) - (3) сведена к решению уравнения (6) с крайними условиями (7), (8).

2. Пусть

$$\rho_0 = \rho^0 \exp(-\gamma z), \quad \gamma > 0. \quad (10)$$

Тогда частота Вайселя-Брента постоянна ($N = \sqrt{g\gamma}$). Решение уравнения (6), удовлетворяющее граничному условию (8), имеет вид

$$w = A \sin b(z + H). \quad (11)$$

Удовлетворяя граничному условию (7), находим

$$A = i \sigma p_0 (\delta_1^2 + \delta_2^2) / \rho^0 \Delta, \quad (12)$$

где

$$\Delta = b \alpha \sigma^2 \cos bH - g(\delta_1^2 + \delta_2^2) \sin bH. \quad (13)$$

3. Проведем анализ полученного решения для следующих значений исходных параметров:

$$l_1 = 40 \text{ км}, l_2 = 150 \text{ км}, H = 100 \text{ м},$$

$$\gamma = 3 \cdot 10^{-5} \text{ м}^{-1} \quad (\tau_{BB} = 6 \text{ мин } 6 \text{ с}),$$

$$\rho^0 = 1000 \text{ кг/м}^3, \rho_0 = 10 \text{ гПа},$$

$$\varphi = 1,5^\circ \text{ с. ш. (инерционный)}$$

$$\text{период } \tau_H = 19 \text{ сут } 1 \text{ ч } 1 \text{ мин},$$

$$\tau_{BB} \leq \tau \ll \tau_H$$

Они соответствуют озеру Альберт в Африке.

Периоды свободных колебаний τ_c находятся из уравнения $\Delta(\sigma) = 0$. Корни этого уравнения комплексные. Действительная часть является частотой свободных колебаний, а мнимая — декрементом затухания. Резонансные периоды $\tau_u, \tau_v, \tau_w, \tau_\zeta$ — это периоды возмущающих давлений, при которых соответствующие функции $u_m(\tau), v_m(\tau), w_m(\tau), \zeta_m(\tau)$ достигают максимумов ($u_m(z) = \max |u(z, \tau)|$ при $-H \leq z \leq 0$, остальные обозначаются аналогично). Будем называть эти функции амплитудными. Любая из данных амплитудных функций с ростом τ последовательно то возрастает, достигая максимума, то убывает, доходя до минимума; она всегда больше нуля. С удалением от τ_{BB} её значения в точках максимумов уменьшаются. Как известно, чем больше действие диссипативных сил в колебательной системе, тем меньше амплитуда вынужденных колебаний при одинаковом процессе внешнего воздействия. Поэтому одно и то же значение амплитудной функции в точках максимумов будет достигаться при разных параметрах диссипации μ_1 , и чем дальше максимум отстоит от τ_{BB} , тем меньше должно быть μ_1 . Зададимся предельными значениями амплитуд колебаний: $u_m \text{ доп} = v_m \text{ доп} = 0,3 \text{ м/с}$, $|\zeta(0, \tau)|_{\text{доп}} = 0,5 \text{ м}$, $\zeta_m \text{ доп} = 5 \text{ м}$. Они обеспечивают выполнение условия малых колебаний. Исходя из этого ограничения находим значения μ_1 , резонансные периоды, резонансные значения амплитудных функций и периоды свободных колебаний для различных комбинаций параметров j и k . Все эти данные приведены в табл. 1-2. Каждый максимум амплитудной функции соответствует своей вертикальной моде волны. Волны в окрестности самого низкочастотного ($n=0$) резонанса носят баротропный характер, а большие периоды возбуждают бароклинные волны. Поэтому остальные максимумы ($n=1, 2, 3$) обусловлены бароклинными резонансами.

Таблица 1

Значения резонансных периодов и резонансные значения амплитудных функций для баротропной волны ($\mu_1 = 0,21$, $\zeta_m = 0,5$ м, $\gamma = 3 \cdot 10^{-5}$ м⁻¹)

Параметры	$j=1, k=1$	$j=1, k=2$	$j=2, k=1$	$j=2, k=2$
τ_ζ	41 мин 59 с	38 мин 21 с	21 мин 33 с	21 мин 0 с
τ_u, τ_v, τ_w	41 мин 33 с	37 мин 57 с	21 мин 19 с	20 мин 47 с
$u_m, \text{м/с}$	0,15	0,14	0,15	0,15
$v_m, \text{м/с}$	$4,0 \cdot 10^{-2}$	$7,3 \cdot 10^{-2}$	$2,1 \cdot 10^{-2}$	$4,0 \cdot 10^{-2}$
$w_m, \text{м/с}$	$1,3 \cdot 10^{-3}$	$1,4 \cdot 10^{-3}$	$2,5 \cdot 10^{-3}$	$2,5 \cdot 10^{-3}$
τ_c	41 мин 46 с	38 мин 9 с	21 мин 26 с	20 мин 53 с

Таблица 2

Значения параметров бароклинных волн ($\zeta_m = 5$ м, $\gamma = 3 \cdot 10^{-5}$ м⁻¹)

№ горизонтальных мод	Параметры	$n=1$	$n=2$	$n=3$
	μ_1	$1,3 \cdot 10^{-2}$	$6,5 \cdot 10^{-3}$	$4,3 \cdot 10^{-3}$
$j=1$ $k=1$	$u_m, \text{м/с}$	$8,4 \cdot 10^{-2}$	$8,3 \cdot 10^{-2}$	$8,3 \cdot 10^{-2}$
	$v_m, \text{м/с}$	$2,2 \cdot 10^{-2}$	$2,2 \cdot 10^{-2}$	$2,2 \cdot 10^{-2}$
	$w_m, \text{м/с}$	$2,2 \cdot 10^{-4}$	$1,1 \cdot 10^{-4}$	$7,4 \cdot 10^{-5}$
	$\tau_u, \tau_v, \tau_w, \tau_c$	1 сут 15 ч 20 мин	3 сут 6 ч 40 мин	4 сут 21 ч 59 мин
$j=1$ $k=2$	$u_m, \text{м/с}$	$7,6 \cdot 10^{-2}$	$7,6 \cdot 10^{-2}$	$7,6 \cdot 10^{-2}$
	$v_m, \text{м/с}$	$4,1 \cdot 10^{-2}$	$4,0 \cdot 10^{-2}$	$4,1 \cdot 10^{-2}$
	$w_m, \text{м/с}$	$2,4 \cdot 10^{-4}$	$1,2 \cdot 10^{-4}$	$8,2 \cdot 10^{-5}$
	$\tau_u, \tau_v, \tau_w, \tau_c$	1 сут 11 ч 56 мин	2 сут 23 ч 50 мин	4 сут 11 ч 45 мин
$j=2$ $k=1$	$u_m, \text{м/с}$	$8,6 \cdot 10^{-2}$	$8,5 \cdot 10^{-2}$	$8,6 \cdot 10^{-2}$
	$v_m, \text{м/с}$	$1,1 \cdot 10^{-2}$	$1,1 \cdot 10^{-2}$	$1,1 \cdot 10^{-2}$
	$w_m, \text{м/с}$	$4,4 \cdot 10^{-4}$	$2,2 \cdot 10^{-4}$	$1,4 \cdot 10^{-4}$
	$\tau_u, \tau_v, \tau_w, \tau_c$	20 ч 10 мин 49 с	1 сут 16 ч 21 мин	2 сут 12 ч 31 мин
$j=2$ $k=2$	$u_m, \text{м/с}$	$8,4 \cdot 10^{-2}$	$8,3 \cdot 10^{-2}$	$8,3 \cdot 10^{-2}$
	$v_m, \text{м/с}$	$2,2 \cdot 10^{-2}$	$2,2 \cdot 10^{-2}$	$2,2 \cdot 10^{-2}$
	$w_m, \text{м/с}$	$4,5 \cdot 10^{-4}$	$2,2 \cdot 10^{-4}$	$1,5 \cdot 10^{-4}$
	$\tau_u, \tau_v, \tau_w, \tau_c$	19 ч 40 мин 17 с	1 сут 15 ч 20 мин	2 сут 11 ч 0 мин

Проведём анализ данных, приведённых в табл. 1–2. Значения параметра диссипации μ_1 , при которых волны имеют предельную амплитуду, не зависят от j и k . Чем дальше отстоит максимум амплитудной функции от τ_{BE} (т. е. чем больше n), тем меньше μ_1 .

Все резонансные периоды и периоды свободных колебаний хотя и различаются (подчас незначительно), но с ростом n увели-

чиваются все. При $n=2$ или $n=3$ и $j = \text{const}$ (а также при $n=1$ и $j=1$), $k = \text{const}$ эти различия не превышают 1 мин; при $n=1$ и $j=2$, $k = \text{const}$ они менее 4 с. Причём в случае $j, k = \text{const}$ и $n \geq 1$ $\tau_w < \tau_{\zeta, u, v} < \tau_c$, а при $n=0$

$\tau_{u, v, w} < \tau_c < \tau_\zeta$. Для баротропной моды ($n=0$) и $k = \text{const}$ периоды отличаются друг от друга менее чем на 27 с при $j=1$ и 15 с при $j=2$. С

Значения параметров бароклинических волн ($\zeta_m = 5$ м, $\gamma = 2 \cdot 10^{-5} \text{ м}^{-1}$)

№ горизонтальных мод	Параметры	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$
	μ_1	$1,3 \cdot 10^{-2}$	$6,5 \cdot 10^{-3}$	$4,3 \cdot 10^{-3}$
$j = 1$ $k = 1$	$u_m, \text{ м/с}$	$6,8 \cdot 10^{-2}$	$6,8 \cdot 10^{-2}$	$6,8 \cdot 10^{-2}$
	$v_m, \text{ м/с}$	$1,8 \cdot 10^{-2}$	$1,8 \cdot 10^{-2}$	$1,8 \cdot 10^{-2}$
	$w_m, \text{ м/с}$	$1,8 \cdot 10^{-4}$	$9,1 \cdot 10^{-5}$	$6,1 \cdot 10^{-5}$
	$\tau_u, \tau_v, \tau_w, \tau_c$	2 сут 0 ч 11 мин	4 сут 0 ч 20 мин	6 сут 0 ч 30 мин
$j = 1$ $k = 2$	$u_m, \text{ м/с}$	$6,2 \cdot 10^{-2}$	$6,2 \cdot 10^{-2}$	$6,2 \cdot 10^{-2}$
	$v_m, \text{ м/с}$	$3,3 \cdot 10^{-2}$	$3,3 \cdot 10^{-2}$	$3,3 \cdot 10^{-2}$
	$w_m, \text{ м/с}$	$2,0 \cdot 10^{-4}$	$9,9 \cdot 10^{-5}$	$6,7 \cdot 10^{-5}$
	$\tau_u, \tau_v, \tau_w, \tau_c$	1 сут 20 ч 0 мин	3 сут 15 ч 59 мин	5 сут 11 ч 58 мин
$j = 2$ $k = 1$	$u_m, \text{ м/с}$	$7,0 \cdot 10^{-2}$	$7,0 \cdot 10^{-2}$	$7,0 \cdot 10^{-2}$
	$v_m, \text{ м/с}$	$9,3 \cdot 10^{-3}$	$9,3 \cdot 10^{-3}$	$9,3 \cdot 10^{-3}$
	$w_m, \text{ м/с}$	$3,6 \cdot 10^{-4}$	$1,8 \cdot 10^{-4}$	$1,2 \cdot 10^{-4}$
	$\tau_u, \tau_v, \tau_w, \tau_c$	1 сут 0 ч 43 мин	2 сут 1 ч 25 мин	3 сут 2 ч 7 мин
$j = 2$ $k = 2$	$u_m, \text{ м/с}$	$6,8 \cdot 10^{-2}$	$6,8 \cdot 10^{-2}$	$6,8 \cdot 10^{-2}$
	$v_m, \text{ м/с}$	$1,8 \cdot 10^{-2}$	$1,8 \cdot 10^{-2}$	$1,8 \cdot 10^{-2}$
	$w_m, \text{ м/с}$	$3,6 \cdot 10^{-4}$	$1,8 \cdot 10^{-4}$	$1,2 \cdot 10^{-4}$
	$\tau_u, \tau_v, \tau_w, \tau_c$	1 сут 0 ч 5 мин	2 сут 0 ч 10 мин	3 сут 0 ч 15 мин

ростом k периоды уменьшаются (для $j = 1$ на 8%, для $j = 2$ на 3%). С ростом j они тоже уменьшаются (для $k = 1$ на 49%, для $k = 2$ на 45%).

При $n = 0$ u_m меняется с изменением j и k не более чем на 1 см/с, а при $n \geq 1$ и $j, k = \text{const}$ — менее чем на 1 мм/с. Для бароклинических резонансов с ростом k u_m убывает (на 7 см/с для $j = 1$ и на 2 мм/с для $j = 2$), а с ростом j — увеличивается (на 2 мм/с для $k = 1$ и на 7 мм/с для $k = 2$).

При $n \geq 1$ и $j, k = \text{const}$ v_m , также как и u_m , меняются меньше, чем на 1 мм/с, а при изменении j или k и $n = 0$ — значительно сильнее — почти в 2 раза. С ростом k v_m увеличивается (на 3,3 см/с для $j = 1, n = 0$; на 1,9 см/с для $j = 2, n = 0$; на 1,9 см/с для $j = 1, n \geq 1$; на 1,1 см/с для $j = 2, n \geq 1$). С ростом j значение v_m падает (на 1,9 см/с для $k = 1, n = 0$; на 3,3 см/с для $k = 2, n = 0$; на 1,1 см/с для $k = 1, n \geq 1$; на 1,9 см/с для $k = 2, n \geq 1$).

С увеличением номера вертикальной моды n и при $j, k = \text{const}$ w_m уменьшается. С ростом k w_m увеличивается (для $j = 2$ не так за-

метно, как для $j = 1$), а с ростом j — тоже увеличивается.

Табл. 3 содержит те же данные, что и табл. 2, но для $\gamma = 2 \cdot 10^{-5} \text{ м}^{-1}$. Из их сравнения видно, что с уменьшением γ в 1,5 раза амплитудные функции u_m, v_m, w_m уменьшаются в 1,2 раза, резонансные периоды и периоды собственных колебаний увеличиваются на 22%, μ_1 не меняется. Для баротропных волн изменений не происходит, если не считать увеличения резонансных периодов и периодов свободных колебаний на величину, не превышающую полсекунды.

Таким образом, чем больше порядок вертикальной моды внутренней волны, тем сильнее на такую волну оказывает своё влияние диссипация.

ЛИТЕРАТУРА

1. Черкесов Л. В., Иванов В. А., Хартнев С. М. Введение в гидродинамику и теорию волн. — С-Пб.: Гидрометеоназдат, 1992. — 264 с.