ВЫНУЖДЕННЫЕ ВОЛНЫ В КОЛЬЦЕВОМ БАССЕЙНЕ ПЕРЕМЕННОЙ ГЛУБИНЫ

Н.А. Миклашевская, Л.В. Черкесов

Морской гидрофизический институт НАН Украины
г. Севастополь, ул. Капитанская, 2
E-mail: ocean@alpha.mhi.iuf.net

В рамках линейной теории длинных волн с учетом влияния силы Кориолиса проводится исследование вынужденных длинноволновых колебаний жидкости в кольцевом бассейне переменной глубины. Параметры бассейна (ширина кольца, профиль дна) приближенно соответствуют району Антарктики между 60 и 70° ю.ш. С использованием численных методов определяются волновые скорости волн и структура мод возвышений свободной поверхности.

1. Введение. В предположениях общей линейной теории волн в работе [1] выполнено исследование свободных колебаний однородной невязкой жидкости в невращающемся кольцевом бассейне постоянной глубины. Изложение этого исследования приведено в монографии [2]. Решение аналогичной задачи для идеальной однородной жидкости, заполняющей круговой бассейн, в рамках теории длинных волн и общей линейной теории получено в [2–5]. С использованием численных методов в работах [6–8] изучалось влияние силы Кориолиса на свободные колебания невязкой жидкости в кольцевом бассейне переменной глубины. В данной работе продолжено исследование колебаний в кольцевом бассейне переменной глубины. При этом геометрические параметры бассейна выбирались характерными для района Антарктики [9, 10].

2. Постановка задачи. Исследуем вынужденные колебания (ВК) жидкости в кольцевом бассейне переменной глубины. Примем во внимание действие силы Кориолиса и будем предполагать волны длинными, колебания малыми, жидкость однородной и невязкой, глубину зависящей только от одной пространственной координаты r.

Колебания жидкости вызваны периодическими по времени возмущениями атмосферного давления вида

$$p(r,\theta,t) = p_0\psi(r)\sin(s\theta+\sigma t), \qquad (1)$$

где p_0 – амплитуда возмущений атмосферного давления, σ – частота вынужденных колебаний.

Уравнения движения жидкости в полярных координатах записываются следующим образом [3]:

$$u_t - fv = -g\zeta_r - \frac{1}{\rho}p_r, \qquad (2)$$

$$v_t + fu = -\frac{1}{r}\left(g\zeta_\theta - \frac{1}{\rho}p_\theta\right), \qquad (3)$$

$$\zeta_t = -\frac{1}{r}[(hur)_r + hv_\theta]. \qquad (4)$$

На вертикальных боковых стенках $r=a_1$, $r=a_3$ потребуем выполнения условий непротекания:

$$u(a_1,\theta,t)=0,\ \ u(a_3,\theta,t)=0. \qquad (5)$$

Здесь $\zeta(r,\theta,t)$ – возвышение свободной поверхности, $u(r,\theta,t)$ – радиальная составляющая скорости жидкости, $v(r,\theta,t)$ – касательная составляющая, $h(r)$ – глубина бассейна, остальные обозначения общепринятые.

Будем искать решение системы уравнений (2)–(4) в виде функций

$$\zeta(r,\theta,t)=\bar\zeta(r)\sin(s\theta+\sigma t),$$

$$u(r,\theta,t)=\bar u(r)\cos(s\theta+\sigma t), \qquad (6)$$

$$v(r,\theta,t)=\bar v(r)\sin(s\theta+\sigma t),$$

где σ – частота колебаний, s – волновое число (s=0, ±1, ±2,...).

Рассмотрим случай осесимметричных волн (s=0; ζ, u, v не зависят от θ). Обозначим

$$\bar p(r) = \frac{1}{\rho}p_0\psi(r). \qquad (7)$$

Тогда (1)–(6) можно записать так:

$$p(r,t) = \rho\,\bar p(r)\sin\sigma t, \qquad (8)$$

$$u_t - 2\omega v = -g\zeta_r - \frac{1}{\rho}\bar p_r, \qquad (9)$$

$$v_t + 2\omega u = 0, \qquad (10)$$

$$\zeta_t = -\frac{1}{r}(hur)_r, \qquad (11)$$

$$u(a_1,t)=0,\ \ u(a_3,t)=0, \qquad (12)$$

$$\zeta(r,t)=\bar\zeta(r)\sin\sigma t,$$

$$u(r,t)=\bar u(r)\cos\sigma t, \qquad (13)$$

$$v(r,t)=\bar v(r)\sin\sigma t.$$

Подставив (8), (13) в (9), (10) и решив полученную систему, найдем выражения для амплитуд радиальной и касательной составляющих скорости жидкости:

$$\bar u(r) = \sigma\frac{g\bar\zeta_r+\bar p_r}{\sigma^2-4\omega^2},\ \ \bar v(r) = -2\omega\frac{g\bar\zeta_r+\bar p_r}{\sigma^2-4\omega^2}. \qquad (14)$$

Из (14) и уравнения неразрывности (4) получим для нахождения амплитуды возвышения

свободной поверхности $\bar{\zeta}(r)$ следующее дифференциальное уравнение:

$$r^2 h\bar{\zeta}_{rr} + (rh + r^2 h_r)\bar{\zeta}_r + \frac{\sigma^2 - 4\omega^2}{g} r^2 \bar{\zeta} =$$

$$= -\frac{1}{g}\left[r^2 h\bar{p}_{rr} + (rh + r^2 h_r)\bar{p}_r\right] \qquad (15)$$

Граничные условия (5) с учетом (14) принимают вид:

$$\left(\bar{\zeta}_r + \frac{1}{g}\bar{p}_r\right)_{r=a_1} = 0, \quad \left(\bar{\zeta}_r + \frac{1}{g}\bar{p}_r\right)_{r=a_2} = 0. \quad (16)$$

Общее решение краевой задачи (15), (16) имеет вид

$$\bar{\zeta}(r) = c_1\,\bar{\zeta}_1(r) + c_2\,\bar{\zeta}_2(r) + \bar{\zeta}_3(r), \qquad (17)$$

где $\bar{\zeta}_1(r)$, $\bar{\zeta}_2(r)$ – фундаментальные решения однородного дифференциального уравнения, соответствующего (15); $\bar{\zeta}_3(r)$ – частное решение уравнения (15); c_1, c_2 – произвольные постоянные, которые находятся из граничных условий (16).

Краевую задачу (15), (16) сводим к задаче Коши, для решения которой используем метод Рунге–Кутта четвертого порядка точности [11].

3. Численное моделирование. По приведенной выше модели был проведен ряд численных экспериментов для бассейна переменной глубины, параметры которого соответствуют району Антарктики между 60° и 70°ю.ш. Ширина кольца l ($l=a_3-a_1$) принималась равной 1000 км (a_1=1500 км, a_3=2500 км), глубина у внутренней и внешней вертикальных боковых стенок h_1=0,2 км, h_2=4 км соответственно. В месте излома дна, при $r=a_2$ (a_2=1700 км), глубина составляет 3 км. Параметр Кориолиса $f = -1{,}32\cdot10^{-4}\,c^{-1}$ (φ = 65°ю.ш.). Перепад давления на границах бассейна равен 5 гПа.

Расчеты проводились для периодов ВК ($\tau_{ВК}$), близких к периодам свободных линейных колебаний (СЛК), полученным в [8]. При этом $\tau_{ВК} = \tau_{СЛК} \pm j\Delta\tau$, где $\tau_{СЛК}$ – период СЛК i-й моды (i=1,...,4); $\Delta\tau$ – шаг по периоду; j = 1,...,7 – количество шагов. Шаг по периоду $\Delta\tau$ принимал следующие значения:

$$\Delta\tau = \begin{cases} \{0{,}5;\ 1{,}0;\ 2{,}0;\ 3{,}0;\ 5{,}0;\ 10{,}0;\ 11{,}0;\ 12{,}0; \\ 13{,}0;\ 14{,}0;\ 15{,}0\}\ \text{мин при} \\ \tau_{1ВК} = \tau_{1СЛК} + j\Delta\tau; \\ \{0{,}5;\ 1{,}0;\ 2{,}0;\ 3{,}0;\ 5{,}0;\ 10{,}0;\ 15{,}0;\ 20{,}0; \\ 30{,}0;\ 40{,}0;\ 45{,}0;\ 50{,}0;\ 60{,}0\}\ \text{мин при} \\ \tau_{1ВК} = \tau_{1СЛК} - j\Delta\tau; \end{cases}$$

$$\Delta\tau = \begin{cases} \{10;\ 15;\ 30\}\ \text{с}; \\ \{1{,}00;\ 1{,}50;\ 2{,}00;\ 2{,}25;\ 2{,}50;\ 2{,}75;\ 3{,}00\} \\ \text{мин при}\ \tau_{iВК} = \tau_{iСЛК} \pm j\Delta\tau,\ \text{где}\ i = 2,..,4. \end{cases}$$

Столь большой разброс в выборе шага по периоду $\Delta\tau$ объясняется стремлением как можно полнее определить временные интервалы $[\tau_{ai}, \tau_{bi}]$, внутри которых профили свободной поверхности и СЛК, и ВК будут иметь одинаковое количество узловых точек i (i=1,..,4). В таблице 1 приведены граничные значения интервалов τ_{ai} и τ_{bi} для всех указанных выше i, полученные в результате численных экспериментов. Из таблицы видно, что при $\tau_{ВК}$ $\in$[44 мин 57 с, 57 мин 50 с] $\zeta_{ВК}$, как и $\zeta_{СЛК}$, имеют четыре узловых точки, при $\tau_{ВК}$ $\in$[57 мин 57 с, 1 ч 22 мин 35 с] – три, при $\tau_{ВК}$ $\in$[1 ч 23 мин 20 с, 1 ч 52 мин 22 с] – две, а при $\tau_{ВК}$$\in$[1 ч 53 мин 22 с; 9 ч 57 мин 14 с] – одну.

Таблица 1

Граничные значения временных интервалов, внутри которых профили свободной поверхности ВК и СЛК имеют одинаковое количество узловых точек

i	τ_{ai}	τ_{bi}
1	1 ч 53 мин 22 с	9 ч 57 мин 14 с
2	1 ч 23 мин 20 с	1 ч 52 мин 22 с
3	57 мин 57 с	1 ч 22 мин 35 с
4	44 мин 57 с	57 мин 50 с

В таблицах 2–5 приведены периоды вынужденных колебаний, максимальные значения амплитудных функций $\zeta(r)$ и $u(r)$ и координаты точек максимумов этих функций для случаев, когда профили свободной поверхности $\zeta_{ВК}$ имеют одну узловую точку (табл.2), две (табл.3), три (табл.4) и четыре (табл.5) узловых точки. Анализ таблиц показывает, что максимальные отклонения свободной поверхности от невозмущенного уровня для всех приведенных в табл.2–5 периодов имеют место на внутренней границе бассейна. Однако численные расчеты показали, что для некоторых $\tau_{iВК}$ (i=1,..,4) $r=a_1$ не единственная точка экстремума: второй максимум достигается сравнительно недалеко (в 0,9–7,0 км) от первого. Из табл.2 видно, что при $\tau_{1ВК}$$\in$[1 ч 53 мин 22 с; 2 ч 52 мин 14 с] амплитуды $|\zeta|$ увеличиваются с приближением $\tau_{1ВК}$ к резонансному периоду $\tau_{1рез}$= $\tau_{1СЛК}$= 2 ч 57 мин 14 с от 2,6 до 45,8 см, а $max|u|$ – от 0,13 до 1,85 см/с. В случае, когда период вынужденных колебаний больше $\tau_{1рез}$ и $\tau_{1ВК}$$\in$[3 ч 02 мин 14 с; 9 ч 57 мин 14 с], с увеличением периодов ВК $max|\zeta|$ убывают от 49,9 до 3,0 см, а максимальные значения радиальной составляющей скорости $|u(r)|$ – от 1,9

до 0,04 см/с. Таким образом, из табл.2 видно, что с удалением $\tau_{1ВК}$ от резонансного периода в сторону уменьшения ($\tau_{1ВК}<\tau_{1СЛК}$) амплитуды $|\zeta|$ убывают значительно быстрее, а $|u_{max}|$ медленнее, чем при увеличении $\tau_{1ВК}$ ($\tau_{1ВК}>\tau_{1СЛК}$). Координаты точек экстремума радиальной составляющей скорости u смещаются вправо с увеличением периодов ВК. Так, при $\tau_{1ВК}$ = 1 ч 53 мин 22 с max $|u|$ достигается в точке r = 1585,8 км, а при $\tau_{1ВК}$ = 9 ч 57 мин 14 с – на 355,7 км правее, в точке r = 1941,5 км.

Таблица 2

Периоды, амплитуды и точки максимумов ВК вблизи первой моды СЛК

$\tau_{ВК}$	max $\|\zeta\|$, м	r_{max}, км	max $\|u\|$, м	r_{max}, км
1 ч 53 мин 22 с	0,026	1500,0	0,0013	1585,8
2 ч 12 мин 14 с	0,037	1500,0	0,0019	1896,3
2 ч 21 мин 14 с	0,049	1500,0	0,0024	1905,6
2 ч 27 мин 14 с	0,062	1500,0	0,0029	1910,3
2 ч 31 мин 14 с	0,074	1500,0	0,0034	1913,4
2 ч 36 мин 14 с	0,096	1500,0	0,0042	1915,0
2 ч 42 мин 14 с	0,141	1500,0	0,0060	1918,1
2 ч 45 мин 14 с	0,181	1500,0	0,0076	1919,7
2 ч 47 мин 14 с	0,220	1500,0	0,0092	1919,7
2 ч 49 мин 14 с	0,280	1500,0	0,0115	1921,2
2 ч 51 мин 14 с	0,379	1500,0	0,0154	1921,2
2 ч 52 мин 14 с	0,458	1500,0	0,0185	1922,8
2 ч 57 мин 14 с	165,872	1500,0	6,5121	1924,4
3 ч 02 мин 14 с	0,499	1500,0	0,0190	1924,4
3 ч 04 мин 14 с	0,361	1500,0	0,0136	1925,9
3 ч 06 мин 14 с	0,285	1500,0	0,0107	1925,9
3 ч 09 мин 14 с	0,219	1500,0	0,0080	1925,9
3 ч 15 мин 14 с	0,152	1500,0	0,0054	1927,5
3 ч 22 мин 14 с	0,115	1500,0	0,0040	1929,0
3 ч 32 мин 14 с	0,088	1500,0	0,0029	1930,6
3 ч 42 мин 14 с	0,073	1500,0	0,0023	1932,2
4 ч 07 мин 14 с	0,055	1500,0	0,0015	1933,7
5 ч 12 мин 14 с	0,039	1500,0	0,0009	1938,4
6 ч 17 мин 14 с	0,034	1500,0	0,0006	1940,0
7 ч 27 мин 14 с	0,031	1500,0	0,0005	1940,0
8 ч 12 мин 14 с	0,030	1500,0	0,0004	1941,5
9 ч 57 мин 14 с	0,030	1500,0	0,0004	1941,5

В табл.3, как и в табл.2, приведены периоды вынужденных колебаний, для которых $2,5 \le |\zeta_{max}| \le 50,0$ см. При $\tau_{2ВК} \in$ [1 ч 30 мин 52 с, 1 ч 35 мин 32 с] максимальные значения $|\zeta|$ возрастают от 2,6 до 44,6 см с ростом $\tau_{2ВК}$, а амплитуды радиальной составляющей скорости $u(r)$ при этом изменяются от 0,13 до 2,41 см/с. При $\tau_{2ВК}>\tau_{2рез}$ ($\tau_{2рез}$ = $\tau_{2СЛК}$ =1 ч 35 мин 52 с) максимальные значения $|\zeta|$ и $|u|$ убывают от 50,0 см и 2,71 см/с соответственно ($\tau_{2ВК}$ = 1 ч 36 мин 12 с) до 2,6 см и 0,13 см/с ($\tau_{2ВК}$ = 1 ч 52 мин 22 с). Радиальная составляющая скорости достигает своего максимального значения в точке r = 1547,5 км при $\tau_{2ВК}$=1 ч 30 мин 52 с. С ростом $\tau_{2ВК}$ координаты точек максимума смещаются вправо на 37,4 км (при $\tau_{2ВК}$=1 ч 52 мин 22 с максимум u получен в точке r =1584,9 км).

Таблица 3

Периоды, амплитуды и точки максимумов ВК вблизи второй моды СЛК

$\tau_{ВК}$	max $\|\zeta\|$, м	r_{max}, км	max $\|u\|$, м	r_{max}, км
1 ч 30 мин 52 с	0,026	1500,0	0,0014	1547,5
1 ч 32 мин 52 с	0,046	1500,0	0,0025	1551,5
1 ч 33 мин 22 с	0,056	1500,0	0,0030	1552,4
1 ч 33 мин 52 с	0,071	1500,0	0,0038	1553,2
1 ч 34 мин 22 с	0,097	1500,0	0,0052	1554,1
1 ч 34 мин 52 с	0,148	1500,0	0,0080	1555,4
1 ч 35 мин 02 с	0,178	1500,0	0,0096	1555,4
1 ч 35 мин 12 с	0,224	1500,0	0,0121	1555,9
1 ч 35 мин 22 с	0,299	1500,0	0,0162	1556,3
1 ч 35 мин 32 с	0,446	1500,0	0,0241	1556,8
1 ч 35 мин 52 с	11,650	1500,0	0,6306	1557,2
1 ч 36 мин 12 с	0,500	1500,0	0,0271	1558,1
1 ч 36 мин 22 с	0,331	1500,0	0,0180	1558,5
1 ч 36 мин 32 с	0,249	1500,0	0,0135	1559,0
1 ч 36 мин 37 с	0,222	1500,0	0,0120	1559,0
1 ч 36 мин 52 с	0,168	1500,0	0,0091	1559,4
1 ч 37 мин 07 с	0,136	1500,0	0,0074	1559,8
1 ч 37 мин 37 с	0,099	1500,0	0,0054	1561,2
1 ч 38 мин 07 с	0,079	1500,0	0,0043	1562,0
1 ч 38 мин 52 с	0,062	1500,0	0,0034	1563,8
1 ч 39 мин 52 с	0,049	1500,0	0,0027	1565,6
1 ч 44 мин 52 с	0,030	1500,0	0,0016	1574,8
1 ч 52 мин 22 с	0,026	1500,0	0,0013	1584,9

Анализ табл. 4 показывает, что с увеличением $|\zeta|$ в 20 раз (от 2,5 до 50,0 см) при $\tau_{3ВК}<\tau_{3рез}$ ($\tau_{3рез}$ = $\tau_{3СЛК}$ =1 ч 06 мин 50 с) амплитуды касательной составляющей скорости u возрастают в 18,4 раза и изменяются от 0,19 до 3,50 см/с. С удалением $\tau_{3ВК}$ от резонансного периода при $\tau_{3ВК}>\tau_{3рез}$ амплитуды $|\zeta|$ и $|u|$ уменьшаются от 51,5 до 2,5 см и от 3,58 до 0,16 см/с соответственно. Из табл.4 видно, что с увеличением периода ВК координаты точек максимума касательной составляющей скорости сначала возрастают от 1540,9 км при $\tau_{3ВК}$ = 1 ч 00 мин 50 с до 1541,4 км при $\tau_{3ВК}$ = 1 ч 03 мин 50 с, а затем уменьшаются до 1539,6 км при $\tau_{3ВК}$ = 1 ч 11 мин 50 с, тогда как из табл.2–3 следует, что r_{max} возрастают с ростом $\tau_{ВК}$ (i=1; 2).

Данные, аналогичные приведенным в табл. 2–4, для случая, когда профиль свободной поверхности имеет четыре узловых точки, содержатся в табл. 5 Из нее видно, что даже для периодов вынужденных колебаний, находящихся достаточно близко от резонансного периода $\tau_{рез}$=50 мин 27 с, максимальные амплитуды отклонения свободной поверхности от невозмущенного уровня не превышают

45,0 см. При этом амплитуды радиальной составляющей скорости больше, чем $\max|u_i|$ (i=1,..,3) при $45{,}0 \le \max|\zeta_i| \le 50{,}0$ см. Координаты точек максимума радиальной составляющей скорости с увеличением периода от 48 мин 42 с до 53 мин 27 с смещаются вправо на 7,0 км.

Таблица 4

Периоды, амплитуды и точки максимумов ВК вблизи третьей моды СЛК

$\tau_{ВК}$	max $\lvert\zeta\rvert$, м	r_{max} км	max $\lvert u\rvert$, м	r_{max} км
1 ч 00 мин 50 с	0,025	1500,0	0,0019	1540,9
1 ч 03 мин 50 с	0,045	1500,0	0,0033	1541,4
1 ч 04 мин 50 с	0,065	1500,0	0,0047	1541,4
1 ч 05 мин 20 с	0,086	1500,0	0,0062	1541,4
1 ч 05 мин 50 с	0,128	1500,0	0,0091	1541,4
1 ч 06 мин 00 с	0,153	1500,0	0,0109	1541,4
1 ч 06 мин 10 с	0,191	1500,0	0,0135	1540,9
1 ч 06 мин 20 с	0,253	1500,0	0,0178	1540,9
1 ч 06 мин 30 с	0,377	1500,0	0,0265	1540,9
1 ч 06 мин 35 с	0,500	1500,0	0,0350	1540,9
1 ч 06 мин 50 с	27,649	1500,0	1,9301	1540,9
1 ч 07 мин 05 с	0,515	1500,0	0,0358	1540,9
1 ч 07 мин 10 с	0,384	1500,0	0,0266	1540,9
1 ч 07 мин 20 с	0,254	1500,0	0,0176	1540,9
1 ч 07 мин 30 с	0,190	1500,0	0,0131	1540,9
1 ч 07 мин 40 с	0,151	1500,0	0,0104	1540,9
1 ч 08 мин 00 с	0,107	1500,0	0,0073	1540,9
1 ч 08 мин 50 с	0,062	1500,0	0,0042	1540,5
1 ч 10 мин 50 с	0,031	1500,0	0,0020	1540,0
1 ч 11 мин 50 с	0,025	1500,0	0,0016	1539,6

Таблица 5

Периоды, амплитуды и точки максимумов ВК вблизи четвертой моды СЛК

$\tau_{ВК}$	max $\lvert\zeta\rvert$, м	r_{max} км	max $\lvert u\rvert$, м	r_{max} км
48 мин 42 с	0,027	1500,0	0,0022	1528,6
49 мин 27 с	0,049	1500,0	0,0041	1529,9
49 мин 42 с	0,067	1500,0	0,0056	1530,4
49 мин 57 с	0,102	1500,0	0,0085	1530,8
50 мин 07 с	0,156	1500,0	0,0130	1530,8
50 мин 12 с	0,209	1500,0	0,0174	1531,2
50 мин 17 с	0,314	1500,0	0,0262	1531,2
50 мин 20 с	0,450	1500,0	0,0375	1531,2
50 мин 27 с	41,284	1500,0	3,4469	1531,2
50 мин 37 с	0,329	1500,0	0,0275	1531,7
50 мин 42 с	0,221	1500,0	0,0184	1531,7
50 мин 47 с	0,167	1500,0	0,0139	1531,7
50 мин 57 с	0,113	1500,0	0,0094	1532,1
51 мин 07 с	0,086	1500,0	0,0072	1532,6
51 мин 27 с	0,059	1500,0	0,0050	1533,0
51 мин 47 с	0,046	1500,0	0,0039	1533,4
52 мин 27 с	0,033	1500,0	0,0028	1534,3
53 мин 27 с	0,025	1500,0	0,0021	1535,6

Как показал анализ численных экспериментов, максимальные значения радиальной и касательной составляющих скорости достигаются в одних и тех же точках для всех периодов, представленных в табл.2–5. Амплитуды касательной составляющей скорости $|v(r)|$ не приведены в этих таблицах, так как они не превышают 0,44 см/с для всех периодов, исключая резонансные.

В табл.2–5 также не включены периоды, близкие к резонансным, для которых $|\zeta_{max}| > 50{,}0$ см. Для случая, когда профиль свободной поверхности при вынужденных колебаниях имеет одну узловую точку, временной интервал, содержащий такие периоды, составляет 10 мин ($\tau_{1ВК} \in$(2 ч 52 мин 14 с; 3 ч 02 мин 14 с)), для $\tau_{2ВК}$ и $\tau_{3ВК}$ он уменьшается до 40 с и 30 с соответственно ($\tau_{2ВК} \in$[1 ч 35 мин 32 с, 1 ч 36 мин 12 с); $\tau_{3ВК} \in$[1 ч 06 мин 35 с, 1 ч 07 мин 05 с)), для $\tau_{4ВК}$ он не достигает и 17 с.

ЛИТЕРАТУРА

1. Geppert H. Die permanenten wellen in ringformigen Kanälen. Mathematische Annalen, 101, 1929, 424–445.

2. Сретенский Л.Н. Теория волновых движений жидкости.– М.; Л.: ОНТИ, 1936.– 304 с.

3. Ламб Г. Гидродинамика.– М.; Л.: Гостехиздат, 1947.– 928 с.

4. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика: В 2-х т. – М.: Гостехиздат, 1955.– 560 с.

5. Ле Блон П., Майсек Л. Волны в океане: В 2-х т.– М.: Мир, 1981.– Т.1. 680 с.

6. Миклашевская Н.А., Черкесов Л.В. Сейши в кольцевом бассейне переменной глубины//Морской гидрофизический журнал.– 1999.– № 1.– С.11–20.

7. Губанова О.В., Миклашевская Н.А., Черкесов Л.В. Исследование пространственной структуры и изменчивости сейшевых колебаний в бассейне переменной глубины//Доповіді Національної Академії наук України.–2000.– №5.–С.114–118.

8. Маркова Н.В., Миклашевская Н.А., Черкесов Л.В. Влияние геометрии кольцевого бассейна на характеристики сейш// Морской гидрофизический журнал. – 2001. – №3. – С.16–23.

9. Саруханян Э.И., Смирнов Н.Н. Водные массы и циркуляция Южного океана. – Л.: Гидрометеоиздат, 1986.

10. Regional atlas of the world.– Edinburgh, 1948, 160 p.

11. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – М.: Наука. Гл. ред. физ.– мат. лит.,1987. – 600 с.