

ВЛИЯНИЕ ПОЛУСУТОЧНОГО БАРОКЛИННОГО ПРИЛИВА НА ДИФФУЗИЮ ТРЕХМЕРНОГО ПЯТНА ПРИМЕСИ

Е. В. Иванчук

МГИ НАН Украины
г. Севастополь, ул. Капитанская, 2
E-mail: oaoi@alpha.mhi.iuf.net

Изучается воздействие бароклинной приливной волны на диффузию трехмерного пятна примеси в непрерывно стратифицированной жидкости. Уравнение турбулентной диффузии решается численно с учетом составляющих волновой скорости. Находятся зависимости характеристики процесса диффузии от параметров полусуточного бароклинного прилива.

1. Введение. Впервые численный метод расчета диффузии примеси в море был применен в [1]. За прошедшее с тех пор время накопилась обширная литература по этой тематике, например [2-4]. Данная работа продолжает цикл исследований, посвященных численному изучению влияния изменчивости поля осредненной скорости жидкости на турбулентную диффузию пассивной субстанции. Была рассмотрена динамика трехмерной области ("облака") примеси при наличии внутренней приливной волны.

2. Математическая постановка задачи. Пусть $\phi(x, y, z, t)$ – интенсивность субстанции, распространяющейся в жидкости. Решение задачи определено в цилиндрической области G с поверхностью S , состоящей из боковой поверхности Σ , нижнего основания Σ_{-n} (при $z = -H$) и верхнего основания Σ_0 (при $z = 0$). Ось z направлена вертикально вверх, плоскость $z = 0$ совпадает с невозмущенной свободной поверхностью. Так как предполагается, что диффундирующая примесь не оказывает влияния на динамику вод, то уравнение диффузии решается отдельно с использованием полученных в гидродинамической задаче значений составляющих вектора скорости \vec{U} :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \operatorname{div}(\vec{U} \phi) = \mu \Delta \phi + \nu \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \quad (1)$$

Здесь $\mu \geq 0$, $\nu \geq 0$ – соответственно горизонтальный и вертикальный коэффициенты турбулентной диффузии, $\Delta \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}$.

В начальный момент времени задается поле концентрации примеси $\phi_0(x, y, z)$, воз-

никшее в результате действия некоторого источника:

$$\phi = \phi_0 \text{ при } t = 0. \quad (2)$$

В качестве граничных условий принимаются задание концентрации на боковой поверхности Σ и отсутствие потоков примеси на свободной поверхности и на дне:

$$\phi = \phi_L \text{ на } \Sigma, \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \text{ на } \Sigma_0, \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \text{ на } \Sigma_{-n}. \quad (3)$$

Итак, задача переноса-диффузии примеси формулируется следующим образом: уравнение (1) с начальным условием (2) и граничными условиями (3). При сложной структуре поля скорости найти аналитическое решение поставленной задачи не удается. Поэтому был использован численный подход.

3. Метод решения. Из совокупности методов, которые можно использовать при расчетах распространения примеси был выбран метод расщепления [4] по физическим процессам с последующим покомпонентным расщеплением. Вообще говоря, поставленная задача представляет собой математическое описание совместного действия двух физических процессов, один из которых является процессом переноса субстанции с ее сохранением вдоль траекторий частиц жидкости и представляет собой задачу:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{U} \phi &= 0, \\ \phi = \phi_0 &\text{ при } t = 0, \\ \phi = \phi_S &\text{ на } S. \end{aligned} \quad (4)$$

Второй физический процесс связан с диффузией и сводится к решению уравнения:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \mu \Delta \phi + \nu \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}, \quad (5)$$

со следующими условиями:

$$\begin{aligned} \phi = \phi_0 &\text{ при } t = 0, \\ \phi = \phi_S &\text{ на } S, \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} &= 0 \text{ на } \Sigma_{-n}. \end{aligned}$$

В [4] показано, что последовательное решение задач (4) и (5) на одном и том же малом интервале времени τ дает решение исходной задачи при соответствующих условиях гладкости.

Далее задачи (4), (5) сводятся к системе одномерных разностных уравнений, решаемых методом прогонки. Применение схемы Кранка-Николсона обеспечивает второй порядок аппроксимации по времени, а по пространственным координатам выдерживается

второй порядок точности. В итоге получаем последовательность краевых задач для трехточечных разностных уравнений с переменными коэффициентами. Для их решения применялся метод прогонки, представляющий собой метод исключения Гаусса для решения систем линейных алгебраических уравнений.

4. Численный эксперимент. С помощью предложенной модели были проведены численные эксперименты по исследованию динамики облака нейтрально взвешенной примеси в поле приливных бароактивных волн. Составляющие волновой скорости для экспоненциально стратифицированной жидкости определялись [5] с помощью следующих выражений:

$$u_n = \frac{a_n \sigma n\pi}{m_n H} \cos \frac{n\pi}{H} (z + H) \cos(m_n x - \sigma t),$$

$$v_n = \frac{a_n f n\pi}{m_n H} \cos \frac{n\pi}{H} (z + H) \sin(m_n x - \sigma t),$$

$$w_n = a_n \sigma \sin \frac{n\pi}{H} (z + H) \sin(m_n x - \sigma t).$$

Здесь n – номер моды, a_n – амплитуда волны n -й моды, σ – частота ($\sigma = 2\pi/T$, где T –

$$\text{период волны}), m_n = \frac{n\pi}{H} \sqrt{\frac{\sigma^2 - f^2}{gk - \sigma^2}}, H -$$

глубина бассейна, f – параметр Корнолиса, k – параметр стратификации ($kH = \Delta\rho_0/\rho^0$, $\Delta\rho_0 = \rho_0(-H) - \rho^0$, $\rho^0 = \rho_0(0)$, $\rho_0(z) = \rho^0 \exp(-kz)$ – распределение плотности жидкости в невозмущенном состоянии).

Численные расчеты проводились при следующих значениях параметров: $\Delta x = \Delta y = 200$ м – шаги расчетной сетки в горизонтальных направлениях (вдоль координатных осей x и y), $\Delta z = 10$ м – шаг сетки в вертикальном направлении (вдоль оси z), $T = 12,4$ ч, $t = T/50$ (шаг по времени), $H = 200$ м, $k = 1,5 \cdot 10^{-3}$ м⁻¹. Коэффициенты турбулентной диффузии равнялись $\mu = 1$ м²/с, $v = 10^{-3}$ м²/с [6]. Поле примеси в начальный момент времени задавалось в виде

$$\phi(x, y, z, 0) = \begin{cases} 1 - r & \text{при } r \leq 1, \\ 0 & \text{при } r > 1, \end{cases}$$

$$r = \left(\frac{x - x_0}{r_x} \right)^2 + \left(\frac{y - y_0}{r_y} \right)^2 + \left(\frac{z - z_0}{r_z} \right)^2,$$

где (x_0, y_0, z_0) – координаты точек максимума концентрации при $t = 0$, r_x, r_y, r_z – полуоси заданного эллипсоида. В рассматриваемом случае $x_0 = K\Delta x/2$, $y_0 = L\Delta y/2$, $z_0 = -M\Delta z/3$

($K \times L \times M$ – размерность расчетной сетки), $r_x = r_y = 4\Delta x$, $r_z = 4\Delta z$. Выбор начальных координат точек максимума концентрации определяется структурой волнового поля первой моды бароактивного прилива – пятно располагается под свободной поверхностью.

5. Анализ результатов. Исследуем влияние 1-й моды бароактивного полусуточного прилива на динамику трехмерной области пассивной субстанции в зависимости от амплитуды волны ($a = 0; 5; 10; 15$ м).

5.1 Одной из основных характеристик облака примеси является изменение со временем максимума концентрации

$$\tilde{\Phi}(t) = \max_{x, y, z} \Phi(x, y, z, t). \text{На рисунках 1 и 2 кри-}$$

вая 1 соответствует ситуации отсутствия волновых скоростей ($a = 0$, "чистая" диффузия), кривые 2–4 характеризуют случаи воздействия 1-й моды бароактивной приливной волны с амплитудами 5, 10, 15 м на турбулентную диффузию субстанции. Из анализа поведения кривых на рисунке 1 следует, что функция $\tilde{\Phi}(t)$ свойственно резкое убывание в течение первого периода (первых 12 часов). При $t = T$ ($T = 12,4$ ч) $\tilde{\Phi}(T) = 0,65$, что составляет 65% от $\tilde{\Phi}(0)$. Как видно, различий между кривыми на этом этапе ($0 < t \leq T$) практически нет. Они появляются с течением времени, когда воздействие волн приводит к ускорению процесса падения максимума концентрации в пятне. Так, в случае "чистой"

диффузии $\tilde{\Phi}(3T) = 0,33$, при воздействии внутреннего прилива с амплитудой $a = 5$ м $\tilde{\Phi}(3T) = 0,31$, при $a = 10$ м $\tilde{\Phi}(3T) = 0,26$ и

при $a = 15$ м $\tilde{\Phi}(3T) = 0,2$. Видно, что с увеличением амплитуды волны разница в поведении кривых при $t > T$ становится более существенной. Так, при $t = 3T$ количественные отличия между кривыми 1 и 2 достигают 6 %, между кривыми 1 и 3 – 21%, между кривыми 1 и 4 – 39%. Это означает, что при наличии волновых скоростей функция $\tilde{\Phi}(t)$ быстрее убывает до принятого предельного

значения $\Phi_{\text{пр}} = \tilde{\Phi}(0)/10 = 0,1$. Выбирая условие десятикратного убывания максимальной концентрации в пятне, исходим из следующего предположения: максимум начальной концентрации таков, что уменьшение его со временем в 10 раз приводит к допустимому значению концентрации примеси в воде

$\Phi_{\text{пр}} = 0,1$. В случае "чистой" диффузии для достижения функцией $\tilde{\Phi}(t)$ предельного значения $\Phi_{\text{пр}}$ (что означает "исчезновение"

пятна) необходимо $8,5T$ (105,4 ч), при $a = 5\text{м}$ – $8T$ (99,2 ч), при $a = 10\text{ м}$ – $6,5T$ (80,6 ч), при $a = 15\text{ м}$ – $5T$ (62 ч).

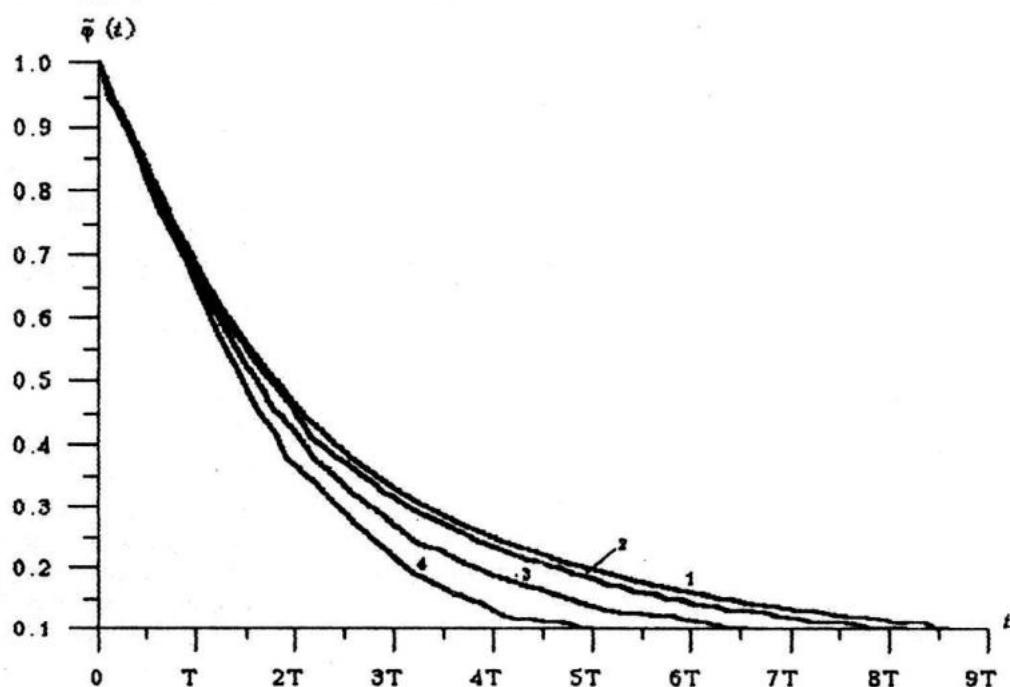


Рис. 1. Изменение с течением времени функции максимальной концентрации $\tilde{\Phi}(t)$: 1 – при $a = 0$ м, 2 – $a = 5$ м, 3 – $a = 10$ м, 4 – $a = 15$ м

5.2 Следующая важная характеристика трансформации облика примеси – изменение со временем его объема $V(t)$. Под объемом

пятна подразумевается объем фигуры, ограниченной изоповерхностью, на которой концентрация примеси равна $\Phi_{\text{пр}} = 0,1$.

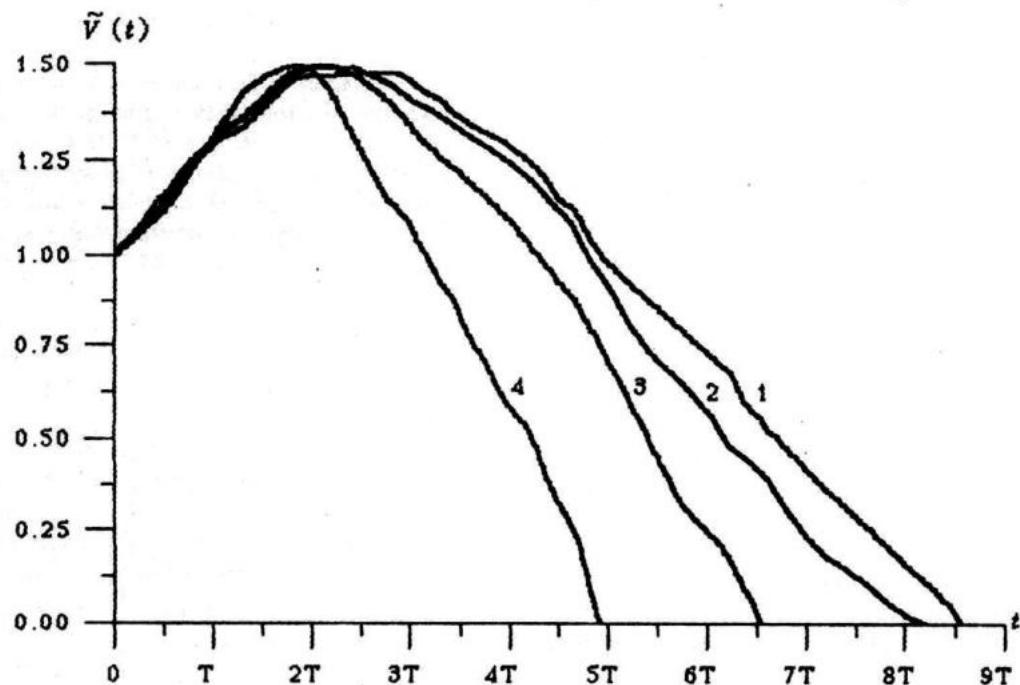


Рис. 2 Изменение со временем нормированной функции объема $\tilde{V}(t)$: 1 – случай "чистой" диффузии ($a = 0$ м), 2 – $a = 5$ м, 3 – $a = 10$ м, 4 – $a = 15$ м

На рис.2 представлены графики функции $V(t)$, нормированной на величину объема пятна в начальный момент времени

($\tilde{V}(t) = V(t)/V(0)$). Как видно, в течение первых двух периодов объем пятна при воздействии внутренних волн с различной амплитудой возрастает примерно в полтора раза по сравнению с $V(0)$. При этом воздействие прилива приводит к чуть более ускоренному росту объема. Все кривые достигают максимума в окрестности $t = 2T$ (24,8 ч). Далее с течением времени $\tilde{V}(t)$ убывает. На этой стадии видны существенные отличия в поведении кривых. Так, $\tilde{V}(4T)$ для кривой 1 ("чистая" диффузия) равно 1,28, для кривой 2 ($a = 5$ м) – 1,24, для кривой 3 ($a = 10$ м) – 1,08, для кривой 4 ($a = 15$ м) – 0,57. При $a = 15$ м уменьшение объема облака субстанции происходит наиболее быстрыми темпами, интервал времени, в течение которого "исчезает" пятно, равен 62 ч. Для $a = 10$ м этот интервал составляет 80,6 ч, для $a = 5$ м – 99,2 ч и для случая отсутствия прилива – 105,4 ч.

5.3 В процессе "чистой" диффузии можно выделить две стадии трансформации пятна. Первая - увеличиваются его горизонтальные размеры от начальных (при $t = 0$) до максимально возможных (при $t = t_{\text{кр}}, t_{\text{кр}} = 24,8$ ч). В вертикальном направлении пятно сразу начинает уменьшаться, что связано с разницей в несколько порядков между величинами коэффициентов турбулентной диффузии μ и v . Вторая стадия ($t_{\text{кр}} \leq t \leq t_{\text{пред}}$) - пятно, достигнув наибольшей величины ($t = t_{\text{кр}}$), уменьшается и с течением времени "исчезает", когда концентрация примеси во всех точках расчетной сетки становится меньше предельного значения ($\phi_{\text{пред}} = 0,1, t_{\text{пред}} = 8,5T$).

Учет воздействия приливной волны приводит к тому, что диффундирующее облако пассивной субстанции еще и перемещается как единое целое, претерпевая некоторые деформации своей формы. Охарактеризовать смещение области, занимаемой примесью, можно, проследив за передвижением точки максимума концентрации. Заметим, что при отсутствии волн эта точка остается неподвижной. Как оказалось, изменения со временем R_x (смещение точки максимума вдоль оси x , определяемое действием компоненты u вектора скорости) и R_y (смещение точки максимума вдоль оси y за счет компоненты v вектора скорости) носят колебательный характер. Что же касается вер-

тикальных смещений, то они не превосходят $2\Delta z$. Для данного численного эксперимента $\max R_x = 800, 1400, 2000$ м, $\max R_y = 200, 400, 600$ м для $a = 5, 10, 15$ м соответственно. Рассматриваемые характеристики важны еще и тем, что позволяют оценить размеры области возможного загрязнения. При отсутствии волнения размеры области рассеяния примеси составили 1800 м \times 1800 м \times 80 м. При наличии волн значительно увеличивается область возможного загрязнения за счет смещения облака примеси, вызываемого действием волновых скоростей. В этом случае ее размеры равны $2,5 \cdot 10^3$ м \times $2 \cdot 10^3$ м \times 100 м для $a = 5$ м, $3,4 \cdot 10^3$ м \times $2,1 \cdot 10^3$ м \times 100 м для $a = 10$ м, $4,6 \cdot 10^3$ м \times $2,2 \cdot 10^3$ м \times 100 м для $a = 15$ м. Учитывая возможность противоположной фазы приливной волны, горизонтальные размеры этой области следует удвоить.

Итак, используемая модель позволяет детально исследовать процесс трансформации трехмерного пятна примеси и его перемещение под действием баротропного прилива. Наличие волн приводит к более быстрому падению максимума концентрации в пятне и уменьшению объема пятна пассивной субстанции. Дополнительное воздействие волнения на диффундирующую облако примеси приводит к его значительному горизонтальному смещению от начального положения, что существенно увеличивает область возможного загрязнения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Озмидов Р.В. Горизонтальная турбулентная диффузия пятен примеси в море // Труды ИОАН. - 1960. - т.37. - С. 164-181.
2. Шкодова Г.Я. Метод расчета переноса примеси загрязняющих веществ от источника различного типа в мелком баротропном море // Труды ГОИн. - 1977. - вып.141. - С.133-146.
3. Михайлова Э.Н., Шапиро Н.Б., Ющенко С.А. Моделирование распространения пассивной примеси в севастопольских бухтах // МГЖ-1999. - № 3. - С. 29-42.
4. Марчук Г.И. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. - М.: Наука, 1982. - 320 с.
5. Черкесов Л.В., Иванов В.А., Хартнев С.М. Введение в гидродинамику и теорию волн. - Санкт-Петербург: Гидрометеонздат, 1992.-264 с.
6. Озмидов Р.В. Диффузия примеси в океане. - Л.: Гидрометеонздат, 1986. - 280 с.