

**ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ  
ДИССИПАЦИИ НА СВОБОДНЫЕ  
НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ В  
ОГРАНИЧЕННОМ БАССЕЙНЕ  
ПЕРЕМЕННОЙ ГЛУБИНЫ**

*Д. В. Алексеев, Л. В. Черкесов*

Морской гидрофизический институт  
НАН Украины  
г. Севастополь, ул. Капитанская, 2  
E-mail: ocean@alpha.mhi.iuf.net

*В рамках нелинейной теории длинных волн с использованием численных методов изучается влияние диссипативных сил на сейсмические колебания, возникающие в ограниченном бассейне, заполненном однородной жидкостью.*

1. Нелинейные системы уравнений мелкой воды обладают рядом принципиальных отличий по сравнению с линейными системами [1-3]. Даже при сколь угодно гладких начальных условиях их решения могут содержать разрывы, свидетельствующие об обрушении волны и образовании бора [1,2]. Учет диссипативных сил приводит к устранению разрывов, то есть к тому, что нелинейная волна способна распространяться не обрушиваясь вплоть до полного затухания. Естественно, величина и способ аппроксимации диссипативных сил оказывают влияние на характеристики волнового процесса.

Исследуем это влияние на примере свободных нелинейных колебаний однородной несжимаемой жидкости в двумерном ограниченном бассейне, глубина которого изменяется вдоль горизонтальной оси  $x$ . Внешние вынуждающие давления считаем отсутствующими. Ось  $z$  направим вертикально вверх. Тогда система нелинейных уравнений мелкой воды [1] для определения волновой скорости  $u$  и возвышения свободной поверхности  $\zeta$ , являющихся функциями пространственной координаты  $x$  и времени  $t$ , имеет вид

$$u_t + uu_x + g\zeta_x + D = 0, \quad (1)$$

$$\zeta_t = -(uH)_x. \quad (2)$$

Здесь нижний индекс означает дифференцирование по соответствующей переменной;  $g$  - ускорение свободного падения;  $D$  - диссипативное слагаемое;  $H = h + \zeta$ ;  $h = h(x)$  - глубина бассейна. В дальнейшем будем использовать аппроксимации диссипативных сил линейной

$$D = ru \quad (3)$$

и квадратичной

$$D = K|u|u/H \quad (4)$$

функциями скорости ( $r$  и  $K$  - коэффициенты диссипации).

Полагая бассейн ограниченным двумя боковыми вертикальными стенками  $x = 0$  и  $x = l$ , а так же принимая закон изменения  $h$  параболическим, получаем

$$h(x) = A_1 + A_2x + A_3x^2,$$

$$A_1 = h_0,$$

$$A_2 = \frac{2}{l}(h_m - h_0) \left( 1 + \sqrt{\frac{h_m - h_l}{h_m - h_0}} \right), \quad (5)$$

$$A_3 = \frac{A_2^2}{4(h_0 - h_m)}.$$

В (5)  $h_0$  и  $h_l$  - глубины соответственно у левой и у правой стенок,  $h_m$  - максимальное значение  $h(x)$ .

Для заданной геометрии бассейна естественными являются следующие граничные условия:

$$u(t, 0) = u(t, l) = 0. \quad (6)$$

В начальный момент времени скорости и возвышения свободной поверхности выберем соответствующими свободным линейным колебаниям жидкости:

$$u = \bar{u}(x) \sin \sigma t, \quad \zeta = \bar{\zeta}(x) \cos \sigma t \quad (7)$$

при некотором фиксированном значении  $t$ . Частоты  $\sigma$  этих колебаний, а также амплитудные функции  $\bar{u}(x)$  и  $\bar{\zeta}(x)$  находим из уравнений:

$$g(\bar{u}h)_{xx} + \sigma^2 \bar{u} = 0, \quad (8)$$

$$\sigma \bar{\zeta} = (\bar{u}h)_x,$$

которые получаются путем линеаризации системы (1), (2) при  $D = 0$  с последующей подстановкой в нее выражений (7). Данные уравнения с граничными условиями (6) интегрируются численно с помощью метода Рунге-Кутты. Для получения  $\sigma$  используется метод пристрелки [4].

Систему (1), (2) с граничными и начальными условиями (6), (7) также решаем численно. С этой целью построим неявную квазилинейную разностную схему, следуя при этом работе [5]. Введем сетку с шагом  $\Delta x$  по пространственной переменной и с шагом  $\tau$  по времени. Обозначая через  $k$  ( $k = 0; 1; \dots$ ) номер временного шага, запишем дифференциально-разностный аналог уравнения (1):

$$(u^{k+1} - u^k)/\tau + u^k u_x^{k+1} + g\zeta_x^{k+1} + D^{k+1} = 0, \quad (9)$$

где, в зависимости от выбранной аппроксимации диссипативных сил,

$$D^{k+1} = ru^{k+1} \quad (10)$$

или

$$D^{k+1} = K \left| u^k \right| u^{k+1} / H^k \quad (11)$$

Дифференцируя (2) по  $x$  и заменяя затем оператор  $\partial/\partial t$  правой разностной производной [6], имеем

$$\zeta_x^{k+1} = \zeta_x^k - \frac{\tau}{2} \left[ (uH)_x^k + (u^{k+1} H^k)_x \right] \quad (12)$$

Подставляя теперь  $\zeta_x^{k+1}$  из (12) в (9), приходим к выражению для нахождения  $u$  на  $k+1$  шаге:

$$u^{k+1} + \tau u^k u_x^{k+1} - g \frac{\tau^2}{2} (u^{k+1} H^k)_{xx} + \tau D^{k+1} = u^k + g \frac{\tau^2}{2} (uH)_x^k - g \tau \zeta_x^k \quad (13)$$

где пространственные производные аппроксимируются отношениями ( $n$  — номер шага по переменной  $x$ ):

$$f_x(k\tau, n\Delta x) = \frac{f_{n+1}^k - f_{n-1}^k}{2\Delta x} \quad (14)$$

$$f_{xx}(k\tau, n\Delta x) = \frac{f_{n+1}^k - 2f_n^k + f_{n-1}^k}{\Delta x^2}$$

Разностное уравнение (13) с граничными условиями (6) на каждом временном слое решаем методом прогонки [4]. Для определения  $\zeta_x^{k+1}$  воспользуемся разностным аналогом уравнения (2):

$$\zeta_x^{k+1} = \zeta_x^k - \frac{\tau}{2} \left[ (uH)_x^k + (u^{k+1} H^k)_x \right] \quad (15)$$

При отыскании возвышений свободной поверхности на левой и правой вертикальных стенках в (15), вместо центральных (14), используются соответственно правые и левые разностные производные:

$$f_x(k\tau, n\Delta x) = \frac{f_{n+1}^k - f_n^k}{\Delta x} \quad (16)$$

$$f_x(k\tau, n\Delta x) = \frac{f_n^k - f_{n-1}^k}{\Delta x}$$

2. Согласно проведенным предварительным численным экспериментам в бассейнах, размеры которых сравнимы с размерами морей, нелинейные эффекты выражены достаточно слабо. Поэтому применим построенную конечно-разностную модель для расчета нелинейного волнового процесса в двумерных бассейнах шириной  $l = 2$  км и  $l = 4$  км. Глубины у боковых стенок в каждом из них выберем одинаковыми:  $h_0 = h_l = 5$  м. Максимальные глубины  $h_m$  считаем равными 10 м. В условиях (7) положим  $t = 0$ , так что в начальный момент времени волновые скорости отсутствуют, а возвышения свободной поверхности принимают амплитудные значения. При вычислениях использовались частоты  $\sigma$  и амплитудные функции  $\zeta(x)$ , соответствующие первым трем модам свободных линейных колебаний, которые представляют собой одно-, двух- и трехузловые сейши. В каждом случае начальные условия нормировались таким образом, чтобы  $\max |\zeta(x)| = 0,5$  м. Характеристики нелинейного волнового поля рассчитывались в 201 пространственной точке ( $\Delta x = 10$  м при  $l = 2$  км и  $\Delta x = 20$  м при  $l = 4$  км) с шагом по времени  $\tau = 0,1$  с. Как показали выполненные вычисления, дальнейшее увеличение количества расчетных точек не приводит к существенному уточнению результатов. Для сравнения одновременно с нелинейной решалась и линейная задача, получающаяся в случае пренебрежения в уравнении (1) вторым членом и замены  $H$  на  $h$  в (2).

Контроль устойчивости вычислительного процесса осуществлялся путем расчета на каждом временном шаге полной механической энергии  $E$  жидкости, приходящейся на единицу длины бассейна. Для этого использовалось выражение интеграла энергии системы уравнений мелкой воды [2]

$$E = \frac{1}{2} \rho \int_0^l (Hu^2 + g\zeta^2) dx \quad (17)$$

где  $\rho$  — плотность жидкости равная  $1000 \text{ кг/м}^3$ .

Вначале исследуем нелинейные эффекты в случае аппроксимации диссипативных сил линейной функцией скорости (3). Значения коэффициента  $r$  будем принимать пропорциональными частотам свободных линейных колебаний, соответствующих выбранным начальным условиям. Если  $r < 0,08\sigma$ , то при всех рассматриваемых начальных условиях уже после трех-четырех колебаний отклонения нелинейного решения от линейного становятся существенными. Нарастание уровня происходит очень быстро, после чего имеет место медленное его убывание. Таким образом, как и при отсутствии диссипации, решение системы нелинейных уравнений мелкой воды является разрывным. В [1] это интерпретируется как обрушение волны и образование бора. Увеличивая значение коэффициента  $r$ , можно сделать невозможным развитие данного явления. Так, при  $r > 0,08\sigma$  нелинейность не приводит к образованию бора.

3. Рассмотрим подробнее нелинейный волновой процесс, считая  $r = 0,1\sigma$ . В начальный момент ( $t = 0$ ) при всех принятых начальных условиях отклонения свободной поверхности от невозмущенного уровня наибольшие у боковых стенок. Действие нелинейности здесь проявляется следующим образом. С течением времени амплитуды колебаний свободной поверхности вверх стано-

вятся больше, а вниз – меньше по сравнению с линейным движением. Таблицы 1 и 2 содержат относительные разности ( $\delta\zeta_{\max} = |(\zeta_n - \zeta_a)/\zeta_a| 100\%$ ) максимальных значений возвышения свободной поверхности (гребень) в точке  $x = 0$ , полученных при решении линейной ( $\zeta_a$ ) и нелинейной ( $\zeta_n$ ) задач в бассейнах шириной 2 и 4 км для начальных условий, представляющих одно-

двух- и трехузловые сейши (колонки I, II и III соответственно). Там же приведены аналогичные разности  $\delta\zeta_{\min}$  для минимальных величин  $\zeta_a$  и  $\zeta_n$  (подошва). Рост  $\delta\zeta_{\max}$  и  $\delta\zeta_{\min}$  наблюдается вплоть до существенного затухания волнового процесса при втором и третьем начальных условиях, тогда как при первом – после пятого колебания данные разности начинают уменьшаться.

Таблица 1

Относительные разности (%) максимальных и минимальных значений  $\zeta$  линейной и нелинейной волн, соответствующих начальным условиям в виде линейных сейш ( $x = 0, l = 2$  км)

Номер экстремума	I		II		III	
	$\delta\zeta_{\max}$	$\delta\zeta_{\min}$	$\delta\zeta_{\max}$	$\delta\zeta_{\min}$	$\delta\zeta_{\max}$	$\delta\zeta_{\min}$
1	3,3	1,1	1,5	0,2	0,2	0,3
2	11,4	6,8	4,5	2,4	2,2	1,8
3	21,7	13,7	8,6	6,0	4,9	3,0
4	30,6	18,3	13,8	10,0	7,0	5,6
5	34,0	19,1	19,8	14,0	12,9	8,1
6	28,8	16,3	26,9	17,7	17,2	9,7
7	15,1	10,6	33,2	20,9	22,0	12,4

Таблица 2

Относительные разности (%) максимальных и минимальных значений  $\zeta$  линейной и нелинейной волн, соответствующих начальным условиям в виде линейных сейш ( $x = 0, l = 4$  км)

Номер экстремума	I		II		III	
	$\delta\zeta_{\max}$	$\delta\zeta_{\min}$	$\delta\zeta_{\max}$	$\delta\zeta_{\min}$	$\delta\zeta_{\max}$	$\delta\zeta_{\min}$
1	3,4	1,1	1,5	0,2	0,2	0,3
2	11,5	6,8	4,5	2,3	2,2	1,8
3	21,9	13,8	8,8	6,0	5,1	3,1
4	31,3	18,0	14,1	10,1	7,0	5,7
5	35,2	19,2	20,7	14,3	15,0	8,2
6	30,2	16,5	29,2	18,1	20,5	10,1
7	16,1	10,7	37,3	21,3	27,4	13,0

В случае нелинейного движения изменяется также соотношение между временем нарастания и убывания уровня. Сначала нарастание происходит быстрее убывания, что приводит к опережению момента максимального подъема свободной поверхности и запаздыванию момента наибольшего опускания по отношению к линейному решению. При первом начальном условии в бассейне шириной 2 км ( $T = 2\pi/\sigma = 7$  мин) указанные опережение и запаздывание увеличиваются соответственно до 20 и 17 с в течение первых двух колебаний, а в бассейне шириной 4 км ( $T = 13$  мин 59 с) – до 41 и 34 с. При втором начальном условии эти величины составляют 20 и 18 с ( $l = 2$  км,  $T = 3$  мин 40 с), 43 и 36 с ( $l = 4$  км,  $T = 7$  мин 20 с), а при третьем – 17 и 14 с ( $l = 2$  км,  $T = 2$  мин 28 с), 36 и 29 с ( $l = 4$  км,  $T = 4$  мин 56 с), но дости-

гаются они уже после 4 – 6 колебаний. В дальнейшем интервалы времени между появлениями максимумов и минимумов  $\zeta$  линейной и нелинейной волн сокращаются. Приняв наименьшие значения, данные интервалы снова начинают расширяться, однако теперь уже за счет того, что нарастание уровня в нелинейном случае осуществляется медленнее убывания. Для решения, отвечающего первому из начальных условий, это происходит после пяти колебаний, а для остальных – после значительного затухания движения. Следует заметить, что аналогичные закономерности справедливы и для точек бассейна, в которых имеют место максимальные подъемы и опускания уровня в линейной волне. На рис. 1, а приведены зависимости возвышения свободной поверхности от времени у левой боковой стенки для первого начального ус-

ловня в бассейне шириной 2 км. Здесь и на рис. 2, б кривая 1 – решение нелинейной задачи, кривая 2 – решение линейной задачи.

Динамика свободной поверхности в точках, соответствующих узлам линейной волны, обусловлена только наличием нелинейных членов в уравнениях (1) и (2). Общим для движения в данных точках является, во-первых, возрастание в течение первых 5–6 периодов амплитуд колебаний свободной

поверхности от нуля, до значений порядка 0,05 м. После этого волновой процесс становится затухающим. Во-вторых, изменения  $\zeta$  происходят с частотой в два раза большей, чем у боковых стенок. В качестве примера на рис. 1, б представлено изменение возвышения свободной поверхности со временем для первого начального условия в его узле  $x = 1$  км при  $l = 2$  км.

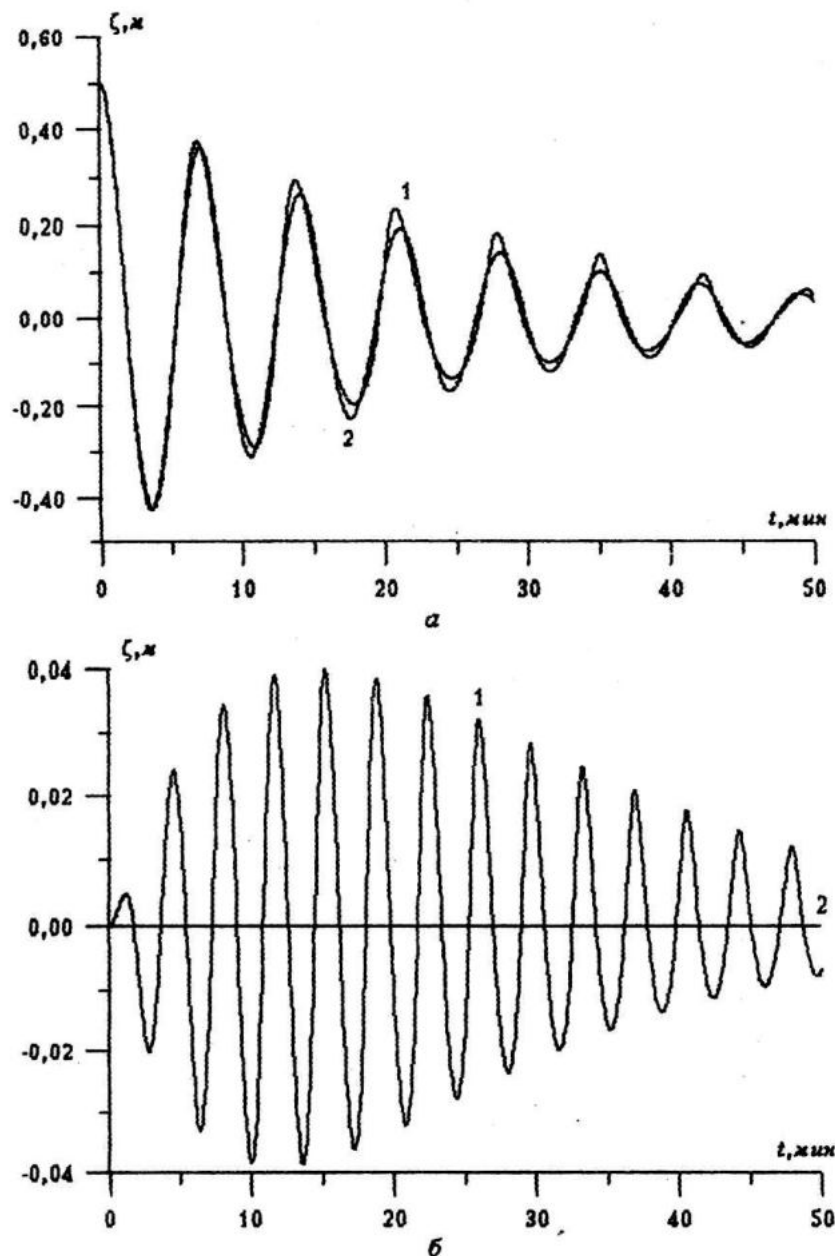


Рис. 1 – Зависимости возвышения свободной поверхности от времени для нелинейной (1) и линейной (2) волн, соответствующих начальному условию в виде одноузловой сейсм, при  $x = 0$  (а) и  $x = 1$  км (б) в бассейне шириной 2 км.

В других точках бассейна нелинейную составляющую движения свободной поверхности характеризует разность нелинейного и

линейного решений ( $\Delta\zeta = \zeta_n - \zeta_n$ ). Хотя зависимость  $\Delta\zeta$  от времени так же, как и для рассмотренных выше колебаний  $\zeta$  имеет перио-

дическую структуру, в остальном их поведение может существенно отличаться. Это выражается в том, что первоначальное увеличение и последующее постепенное уменьшение амплитудных значений данной разности становятся не монотонными. Так, у боковых стенок они испытывают периодические изменения, повторяющиеся через каждые два колебания  $\Delta\zeta$ , а в точках, находящихся на одинаковом удалении от стенки и от ближайшего к ней узла линейной волны – через три. Причем, чем меньше амплитудная величина рассматриваемой разности, тем больше времени требуется для ее достижения. Отметим, что в течение одного колебания нелинейной волны  $\Delta\zeta$  у боковых стенок успевает совершить два колебания, а в точках, равноудаленных от стенки и ближайшего к ней узла линейной волны – три.

В последнем случае движение свободной поверхности происходит с той же частотой, что и у боковых стенок. Нелинейность здесь особенно выражена в моменты времени близкие к максимальному подъему уровня. Сначала там появляется участок замедленного нарастания  $\zeta$ . При следующих колебаниях гребень распадается на два, разделенных слабо выраженной впадиной. Волны, соответствующие начальным условиям в виде двух- и трехузловой сейш, к этому времени уже существенно затухают. Решения же, отвечающее начальному условию в виде одноузловой сейши, в дальнейшем снова имеет один гребень в течение колебания, а участок замедленного изменения  $\zeta$  перемещается в область убывания уровня. Величины, а так же моменты наступления наибольших отклонений свободной поверхности вниз для линейного и нелинейного решений в рассматриваемых точках различаются меньше, чем у боковых стенок.

О свободной поверхности заметим следующее. С течением времени подобие ее профилей в случае линейного и нелинейного движений сохраняется только при отклонениях близких к амплитудным значениям. В промежуточных положениях данное подобие существенно нарушается. Так, у нелинейной волны в местах максимальных возвышений свободной поверхности, в том числе и у боковых стенок, образуются впадины. Их углубление приводит к появлению дополнительных нулей у  $\zeta$  по сравнению с линейным решением. При этом максимумы располагаются теперь у краев впадин (вблизи боковых стенок – только у одного края).

В случае аппроксимации диссипативных сил квадратичной функцией скорости (4) бы-

ли получены следующие результаты. Влияние нелинейности при обычно используемом значении  $K = 0,0026$  [1] проявляется аналогично описанному выше случаю слабой диссипации ( $r < 0,08\sigma$ ) и заключается в очень быстром нарастании уровня с последующим постепенным его убыванием, то есть приводит к обрушению волны. Если же увеличить коэффициент  $K$  более чем в 40 раз, то обрушение не происходит и качественно колебания в различных точках бассейна происходят также, как и при аппроксимации диссипативных сил линейной функцией скорости с достаточно большим коэффициентом  $r$ .

Итак, нелинейность в случае слабых диссипативных сил приводит к обрушению волны. Если же данные силы достаточно велики, то обрушение не происходит и нелинейные эффекты проявляются следующим образом:

- у боковых стенок максимальные отклонения свободной поверхности вверх становятся больше, а вниз – меньше, чем в линейном случае, время нарастания уровня уже не равно времени убывания;

- в точках, соответствующих узлам линейной волны, развиваются колебания с большей частотой, чем у боковых стенок;

- в точках, равноудаленных от боковых стенок и узлов линейной волны могут появляться дополнительные слабо выраженные гребни и впадины.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Вольцингер Н. Е., Пясковский Р. В. Основные океанологические задачи теории мелкой воды. – Л.: Гидрометеониздат, 1968. – 300 с.
2. Вольцингер Н. Е. Длинные волны на мелкой воде. – Л.: Гидрометеониздат, 1985. – 160 с.
3. Коновалов А. В., Манильков Ю. В., Черкесов Л. В. Влияние нелинейности на сейшевые колебания. // Теоретические и экспериментальные исследования поверхностных и внутренних волн. Севастополь: МГИ НАНУ. – 1991. – С. 68–75.
4. Годунов С. К., Рябенский В. С. Разностные схемы. – М.: Наука, 1977. – 440 с.
5. Коновалов А. В., Черкесов Л. В. Генерация длинных нелинейных волн в замкнутом бассейне движущимися возмущениями атмосферного давления. // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. – 1995. – 31, №5. – С. 713–718.
6. Марчук Г. И., Каган Б. А. Океанские приливы. – Л.: Гидрометеониздат, 1977. – 296 с.