ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ РАСЧЕТА УРОВЕННОЙ ПОВЕРХНОСТИ И АНАЛИЗ ОДНОЙ ПАРАМЕТРИЗАЦИИ ПОГРАНИЧНЫХ ТЕЧЕНИЙ В ОКЕАНЕ

С.В. Кочергин, В.С. Кочергин

Морской гидрофизический институт
НАН Украины
г. Севастополь, ул. Капитанская, 2

Рассматривается алгоритм вычисления уровенной поверхности. Результаты расчетов сравниваются с точным аналитическим решением. Показано, что использование предложенных монотонных разностных дискретизаций дает достаточно большую точность моделируемой уровенной поверхности. Рассматриваются новые параметризации пограничных течений.

С развитием технических средств сбора альтиметрической информации задача моделирования такой важной характеристики как уровенная поверхность приобретает особое значение. В работе [1] предложен вычислительный алгоритм для вычисления наклонов уровня. В данной работе осуществляется расчет самой уровенной поверхности. Оценка точности вычислительных алгоритмов осуществляется путем сравнения полученного решения с точным аналитическим решением рассматриваемой задачи.

В соответствии с [2] рассмотрим задачу:

$$M_x = a_0 \frac{\partial \xi}{\partial x} + a_1 \frac{\partial \xi}{\partial y} + q_0,$$

$$M_y = -a_1 \frac{\partial \xi}{\partial x} + a_0 \frac{\partial \xi}{\partial y} + q_1,$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} = 0, \quad w(0) = w(H) = 0..$$

где $a_0 = \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + l^2}$, $a_1 = \frac{l}{\varepsilon^2 + l^2}$,

$q_0 = -\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + l^2} \cos \pi y$, $q_1 = \frac{l}{\varepsilon^2 + l^2} \cos \pi y$,

$r = \frac{5}{\pi}$, $l = 1 + y$, $\varepsilon = \frac{1}{40\pi}$, $l = l(y) = 1 + y$, в области $D = \{0 \le y \le 1, 0 \le x \le r\}$.

Уравнения движения имеют вид:

$$\begin{cases} -lv + \varepsilon u = \dfrac{\partial \xi}{\partial x} - \cos \pi y \\ lu + \varepsilon v = \dfrac{\partial \xi}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0, \end{cases} \tag{1}$$

а уравнение для уровенной поверхности:

$$\varepsilon \Delta \xi + \frac{l^2 - \varepsilon^2}{l^2 + \varepsilon^2} \frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{2\varepsilon l}{l^2 + \varepsilon^2} \frac{\partial \xi}{\partial y} = $$
$$= \pi l \sin \pi y + \frac{l^2 - \varepsilon^2}{l^2 + \varepsilon^2} \cos \pi y$$

с условиями обтекания

$$x = 0, r \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\varepsilon}{l} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\varepsilon}{l} \cos \pi y$$

$$y = 0,1 \quad \frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{\varepsilon}{l} \frac{\partial \xi}{\partial y} = \cos \pi y.$$

Вводя интегральную функцию тока по известным соотношениям и исключая наклоны уровня из уравнений движения, приходим к уравнению:

$$\begin{cases} \varepsilon \Delta \Psi + \dfrac{\partial \Psi}{\partial x} = \pi \sin \pi y \\ \Psi \Big|_{\Gamma} = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Его аналитическое решение:

$$\Psi(x, y) = \frac{1}{\varepsilon \pi} \sin \pi y \left(p e^{Ax} + q e^{Bx} - 1 \right), \tag{3}$$

где $A = -\frac{1}{2\varepsilon} + \sqrt{\left(\frac{1}{2\varepsilon}\right)^2 + \pi^2}$,

$B = -\frac{1}{2\varepsilon} - \sqrt{\left(\frac{1}{2\varepsilon}\right)^2 + \pi^2}$, $q = 1 - p$,

$p = \frac{1 - e^{Br}}{e^{Ar} - e^{Br}}$.

Это аналитическое решение использовалось в [1] для определения точности его расчета численными методами.

Для определения уровенной поверхности можно получить следующие соотношение:

$$\xi(x, y) = \frac{1}{\pi^2} (\cos \pi y - 1) \left(A p e^{Ax} + B q e^{Bx} \right) +$$
$$+ \frac{1}{\varepsilon \pi} \left[e \sin \pi y + \frac{1}{\pi} (\cos \pi y - 1) \right] \times \tag{4}$$
$$\times \left(p e^{Ax} + B q e^{Bx} - 1 \right) + \frac{p}{A} e^{Ax} + \frac{q}{B} e^{Bx}.$$

Это и есть аналитическое решение уровенной поверхности в приближении задачи Стомела.

Далее будем использовать это решение в качестве тестового.

Введем следующие обозначения:

$$\Phi_0 = \frac{\partial \xi}{\partial x},\ \Phi_1 = \frac{\partial \xi}{\partial y},\ \alpha = \left(\frac{a_1}{a_0}\right)\frac{\partial \ln a_1}{\partial y},$$

$$\bar{\alpha} = \left(\frac{a_1}{a_0}\right)\frac{\partial \ln a_1}{\partial x},\ \beta = \frac{\partial \ln a_0}{\partial y},\ \bar{\beta} = \frac{\partial \ln a_0}{\partial x}.$$

Тогда уравнения для определения Φ_0 и Φ_1 в соответствии с работой [1] запишутся в расщепленном виде:

$$\frac{R_x^-\left(\mathrm{cth}R_x^- - 1\right)}{\Delta x^2}\Phi_{0[k+1,l]} - \frac{2R_x^-\mathrm{cth}R_x^-}{\Delta x^2}\Phi_{0[k,l]} +$$
$$+\frac{R_x^-\left(\mathrm{cth}R_x^- + 1\right)}{\Delta x^2}\Phi_{0[k-1,l]} + \qquad (5)$$
$$+\frac{R_y^-\left(\mathrm{cth}R_y^- + 1\right)}{\Delta y^2}\Phi_{0[k,l+1]} - \frac{2R_y^-\mathrm{cth}R_y^-}{\Delta y^2}\Phi_{0[k,l]} +$$
$$\frac{R_y^-\left(\mathrm{cth}R_y^- - 1\right)}{\Delta y^2}\Phi_{0[k,l-1]} = -f_{0[k,l]}.$$

Аналогично для Φ_1 с правой частью $-f_{1[k,l]}$.

$$f_{0[k,l]} = \frac{1}{a_{o[k,l]}}\times$$
$$\times\left[R_x\mathrm{cth}R_x\frac{q_{0[k+1,l]} - 2q_{0[k,l]} + q_{0[k-1,l]}}{\Delta x^2} +\right.$$
$$+\bar{\beta}_{[k,l]}\frac{q_{0[k+1,l]} - q_{0[k-1,l]}}{2\Delta x} +$$
$$+R_x^-\mathrm{cth}R_x^- \times$$
$$\times\frac{q_{1[k+1,l+1]} - q_{1[k-1,l-1]} - q_{1[k+1,l-1]} - q_{1[k-1,l+1]}}{\Delta x^2} -$$
$$-\bar{\beta}_{[k,l]}\left(\frac{q_{1[k+1,l+1]} + 2q_{1[k,l+1]} + q_{1[k-1,l+1]}}{8\Delta y} -\right.$$
$$\left.\left.-\frac{q_{1[k+1,l-1]} + 2q_{1[k,l-1]} + q_{1[k-1,l-1]}}{8\Delta y}\right)\right],$$

$$f_{1[k,l]} = \frac{1}{a_{o[k,l]}}\times$$
$$\times\left[R_y\mathrm{cth}R_y\frac{q_{1[k,l+1]} - 2q_{1[k,l]} + q_{1[k,l-1]}}{\Delta x^2} -\right.$$
$$-\beta_{[k,l]}\frac{q_{1[k,l+1]} - q_{0[k,l-1]}}{2\Delta y} +$$
$$+R_y\mathrm{cth}R_y \times$$
$$\times\frac{q_{0[k+1,l+1]} + q_{0[k-1,l-1]} - q_{0[k+1,l-1]} - q_{0[k-1,l+1]}}{\Delta x^2} -$$
$$-\beta_{[k,l]}\left(\frac{q_{0[k+1,l+1]} + 2q_{0[k+1,l]} + q_{0[k+1,l-1]}}{8\Delta x} -\right.$$
$$\left.\left.-\frac{q_{0[k-1,l+1]} + 2q_{0[k-1,l]} + q_{0[k-1,l-1]}}{8\Delta x}\right)\right],$$

где $R_x^- = \frac{\Delta x}{2}\bar{\beta}$, $R_y = \frac{\Delta y}{2}\beta$, $R_x^- = \frac{\Delta x}{2}\left(\alpha - \bar{\beta}\right)$, $R_y^+ = \frac{\Delta y}{2}\left(\bar{\alpha} + \beta\right)$.

$\Phi_1\Big|_{\Gamma}$ и $\Phi_0\Big|_{\Gamma}$ задаются в соответствии с выражениями:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{l}{\varepsilon\pi}\sin\pi y\left(Ape^{Ax} + Bqe^{Bx}\right) +$$
$$+\cos\pi y\left(Ape^{Ax} + Bqe^{Bx}\right) + \cos\pi y,$$
$$\frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{l}{\varepsilon}\cos\pi y\left(pe^{Ax} + qe^{Bx} - 1\right) -$$
$$-\frac{1}{\pi}\sin\pi y\left(Ape^{Ax} + Bqe^{Bx}\right).$$

Уравнение (5) решается по методу Гаусса–Зейделя:

$$\Phi_{0[k,l]}^h = \frac{1}{\dfrac{2R_x^-\mathrm{cth}R_x^-}{\Delta x^2} + \dfrac{2R_y^+\mathrm{cth}R_y^+}{\Delta y^2}}\times$$
$$\times\left[\frac{R_x^-\left(\mathrm{cth}R_x^- - 1\right)}{\Delta x^2}\Phi_{0[k+1,l]}^h +\right.$$
$$+\frac{R_x^-\left(\mathrm{cth}R_x^- + 1\right)}{\Delta x^2}\Phi_{0[k-1,l]}^{h-1} + \qquad (6)$$
$$+\frac{R_y^+\left(\mathrm{cth}R_y^+ + 1\right)}{\Delta y^2}\Phi_{0[k,l+1]}^h +$$
$$\left.+\frac{R_y^+\left(\mathrm{cth}R_y^+ - 1\right)}{\Delta y^2}\Phi_{0[k,l-1]}^{h-1} + f_{0[k,l]}\right].$$

По аналогичной формуле определяется $\Phi_{1[k,l]}^h$ методом итераций.

После определения $\Phi_{0[k,l]}$ и $\Phi_{1[k,l]}$ можно определить саму ξ. Для этого используем исходное уравнение в разностном виде:

$$\left(\frac{\xi_{[k+1,l]}-2\xi_{[k,l]}+\xi_{[k-1,l]}}{\Delta x^2}+\right.$$
$$\left.+\frac{\xi_{[k,l+1]}-2\xi_{[k,l]}+\xi_{[k,l-1]}}{\Delta y^2}\right)=$$
$$\frac{1}{\varepsilon}\left(\pi l\sin\pi y+\frac{l^2-\varepsilon^2}{l^2+\varepsilon^2}\cos\pi y\right)_{[k,l]}-$$
$$-\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{l^2-\varepsilon^2}{l^2+\varepsilon^2}\right)_{[k,l]}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)_{[k,l]}+$$
$$+\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{2\varepsilon l}{l^2+\varepsilon^2}\right)_{[k,l]}\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)_{[k,l]}=F_{[k,l]},$$

которое решается по методу Зейделя.

Сравнение с аналитическим решением производится в следующих нормах:

Табл. 1 иллюстрирует степень отклонения приближенного решения уравнения для уровенной поверхности от точного выражения:

Число точек деления	NC	NL
10x16	0,179	0,103
20x32	0,123	0,029
30x48	0,196	0,016
40x64	0,028	0,009

Таким образом, предложенные аппроксимации позволяют определить с большой точностью не только наклоны уровня [1], но и саму уровенную поверхность, что позволит в дальнейшем надежно реализовывать процедуры усвоения альтиметрической информации.

Запишем следующую систему уравнений гидродинамики в стационарном приближении:

$$-l\mathrm{v}=g\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial z}\nu\frac{\partial u}{\partial z}+A\Delta u-\frac{g}{\bar\rho}\int_0^z\frac{\partial\rho}{\partial x}dz,$$
$$lu=g\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}\nu\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial z}+A\Delta \mathrm{v}-\frac{g}{\bar\rho}\int_0^z\frac{\partial\rho}{\partial y}dz, \tag{8}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0, \tag{9}$$

$$u\frac{\partial\rho}{\partial x}+\mathrm{v}\frac{\partial\rho}{\partial y}+w\frac{\partial\rho}{\partial z}=$$
$$=\mu\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{a}{1+\left(\frac{l}{R}\right)^2}+1\right)\left(\frac{\partial\rho}{\partial x}+\frac{l}{R}\frac{\partial\rho}{\partial y}\right)\right]+$$
$$+\mu\frac{\partial}{\partial y}\left[\left(\frac{a}{1+\left(\frac{l}{R}\right)^2}+1\right)\left(\frac{\partial\rho}{\partial y}-\frac{l}{R}\frac{\partial\rho}{\partial x}\right)\right]+ \tag{10}$$
$$+\frac{\partial}{\partial z}\kappa\frac{\partial\rho}{\partial z}.$$

с соответствующими краевыми условиями:

$$\frac{\partial\rho}{\partial x}+\frac{l}{R}\frac{\partial\rho}{\partial y}=0 \quad \| \text{ оси } y,$$
$$\frac{\partial\rho}{\partial y}-\frac{l}{R}\frac{\partial\rho}{\partial x}=0 \quad \| \text{ оси } x. \tag{11}$$

Указанную систему приведем к двумерной постановке. В процессе вывода будем учитывать, что $H=10^5/4\pi$ см, $0\le y\le 2\pi\cdot 10^8$ см, $0\le x\le 10^9$ см, $R=0.02$, $w\Big|_0^H=0$, $\kappa\frac{\partial\rho}{\partial z}\Big|_0^H=0$, $\rho=1+\alpha$, $\bar\alpha=3\cdot 10^{-2}$, $l=\beta y$, $a=10$, а касательное напряжение изменяется по косинусу. Тогда, усредняя уравнения по слою, получим:

$$-l\bar{\mathrm{v}}=g\frac{\partial\xi}{\partial x}-\frac{g}{\bar\rho H}\int_0^H dz\int_0^z\frac{\partial\alpha}{\partial x}dz+\frac{\nu}{H}\frac{\partial u}{\partial z}\Big|_0^H+$$
$$+\frac{A}{H}\int_0^H\Delta u\,dz,$$
$$l\bar{u}=g\frac{\partial\xi}{\partial y}-\frac{g}{\bar\rho H}\int_0^H dz\int_0^z\frac{\partial\alpha}{\partial y}dz+\frac{\nu}{H}\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial z}\Big|_0^H+ \tag{12}$$
$$+\frac{A}{H}\int_0^H\Delta \mathrm{v}\,dz,$$

$$\frac{\partial\bar u}{\partial x}+\frac{\partial\bar{\mathrm{v}}}{\partial y}=0, \tag{13}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{H}\int_0^H u\alpha\,dz+\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{H}\int_0^H \mathrm{v}\alpha\,dz=$$

$$=\mu\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{a}{1+\left(\frac{l}{R}\right)^2}+1\right)\left(\frac{\partial\overline{\alpha}}{\partial x}+\frac{l}{R}\frac{\partial\overline{\alpha}}{\partial y}\right)\right]+$$

$$+\mu\frac{\partial}{\partial y}\left[\left(\frac{a}{1+\left(\frac{l}{R}\right)^2}+1\right)\left(\frac{\partial\overline{\alpha}}{\partial y}-\frac{l}{R}\frac{\partial\overline{\alpha}}{\partial x}\right)\right]+ \tag{14}$$

$$+\frac{\kappa}{H}\frac{\partial\alpha}{\partial z}\bigg|_0^H.$$

Для простоты будем считать, что на поверхности и на дне нет источников плотности, т.е. $\kappa\frac{\partial\alpha}{\partial z}\Big|_0^H=0$, хотя при наличии таких источников вывод проводится аналогично.

Учитывая, что $\frac{1}{H}\int_0^H u\alpha\,dz\cong\overline{u}\,\overline{\alpha}$, $\frac{1}{H}\int_0^H \mathrm{v}\alpha\,dz\cong\overline{\mathrm{v}}\,\overline{\alpha}$, где $\overline{\alpha}=\frac{1}{H}\int_0^H\alpha\,dz$, $\overline{u}=\frac{1}{H}\int_0^H u\,dz$, $\overline{\mathrm{v}}=\frac{1}{H}\int_0^H \mathrm{v}dz$, уравнение (14) можно удовлетворить за счет следующих равенств:

$$\overline{u}\,\overline{\alpha}=\mu\left[\left(\frac{a}{1+\left(\frac{l}{R}\right)^2}+1\right)\left(\frac{\partial\overline{\alpha}}{\partial x}+\frac{l}{R}\frac{\partial\overline{\alpha}}{\partial y}\right)\right]$$

$$\overline{\mathrm{v}}\,\overline{\alpha}=\mu\left[\left(\frac{a}{1+\left(\frac{l}{R}\right)^2}+1\right)\left(\frac{\partial\overline{\alpha}}{\partial y}-\frac{l}{R}\frac{\partial\overline{\alpha}}{\partial x}\right)\right] \tag{15}$$

Уравнения (12) могут быть представлены в отнормированном виде:

$$4\pi\overline{u}=\left[\left(\frac{10}{1+10^2y^2}+1\right)\left(\frac{\partial\overline{\alpha}}{\partial x}+10y\frac{\partial\overline{\alpha}}{\partial y}\right)\right]$$

$$4\pi\overline{\mathrm{v}}=\left[\left(\frac{10}{1+10^2y^2}+1\right)\left(\frac{\partial\overline{\alpha}}{\partial y}-10y\frac{\partial\overline{\alpha}}{\partial x}\right)\right]$$

В случае $\frac{l}{R}=0$, $a=0$ приходим к обычным соотношениям параметризации:

$$4\pi\overline{u}=\frac{\partial\overline{\alpha}}{\partial x},\qquad 4\pi\overline{\mathrm{v}}=\frac{\partial\overline{\alpha}}{\partial y}.$$

В итоге имеем:

$$\begin{aligned}&-y\overline{\mathrm{v}}+\left(\varepsilon+\frac{3\cdot10^3}{(4\pi)^2}\right)\overline{u}=\frac{\partial\xi}{\partial x}-\cos\pi y\\&y\overline{u}+\left(\varepsilon+\frac{3\cdot10^3}{(4\pi)^2}\right)\overline{\mathrm{v}}=\frac{\partial\xi}{\partial y}\end{aligned} \tag{16}$$

Если обозначить $\varepsilon^*=\varepsilon+\frac{3\cdot10^3}{(4\pi)^2}$, то получаем известное решение Стомела.

Разрешая (16) относительно $\frac{\partial\overline{\alpha}}{\partial x}$ и $\frac{\partial\overline{\alpha}}{\partial y}$ и подставляя в упрощенные уравнения (12), вводя обозначения

$$n(y)=y\left(1+\frac{3\cdot10^4}{(4\pi)^2\left(11+10^2y^2\right)}\right),$$

$$m(y)=\varepsilon+\frac{3\cdot10^3}{(4\pi)^2\left(11+10^2y^2\right)},$$

имеем:

$$-n\overline{\mathrm{v}}+m\overline{u}=\frac{\partial\xi}{\partial x}-\cos\pi y$$

$$n\overline{u}+m\overline{\mathrm{v}}=\frac{\partial\xi}{\partial y}$$

откуда, с учетом уравнения неразрывности, получаем следующее соотношение:

$$m\left(\frac{\partial\overline{u}}{\partial y}-\frac{\partial\overline{\mathrm{v}}}{\partial x}\right)-\frac{\partial n}{\partial y}\overline{\mathrm{v}}+\frac{\partial m}{\partial y}\overline{u}=\pi\sin\pi y.$$

Вводя интегральную функцию тока, окончательно запишем:

$$\begin{cases}m\Delta\Psi+\frac{\partial n}{\partial y}\cdot\frac{\partial\Psi}{\partial x}+\frac{\partial m}{\partial y}\cdot\frac{\partial\Psi}{\partial y}=\pi\sin\pi y,\\ \Psi\Big|_\Gamma=0.\end{cases} \tag{17}$$

Анализируя поведение производных $\frac{\partial n}{\partial y}$, $\frac{\partial m}{\partial y}$, которые характеризуют пространственную структуру функции тока, видим, что $\frac{\partial m}{\partial y}<0$ всегда, а $\frac{\partial n}{\partial y}<0$ при $0.3\le y<1$, $\frac{\partial n}{\partial y}>0$ при $0<y\le0.3$. Следовательно, при $0\le y\le0.3$ происходит дополнительное прижимание к западному берегу (по сравнению со стандартной задачей Стомела), а при $0.3\le y\le1$ – к восточному (аналог Гвинейского течения в Атлантическом океане). Из–за того, что $\frac{\partial m}{\partial y}<0$, существует некоторое сгущение изолиний у северной границы области. Кроме этого, следует отметить, что используемая параметризация позволяет описывать процессы апвеллинга [2], что имеет важное значение при решении широкого класса практических задач.

Вопрос выбора констант в исследуемой параметризации может быть решен при помощи вариационного подхода [5] идентификации при условии наличия априорной информации о циркуляции вод в исследуемом бассейне.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кочергин В.П., Дунец Т.В. Вычислительный алгоритм для определения наклонов уровня в задачах динамики водоемов // МГФЖ, №3, 1999, с.20–28.

2. Кочергин В.П. Теория и методы расчета океанических течений.–М.: Наука, 1978.–127с.

3. Кочергин В.П. О параметризации пограничных течений в океане//Численное решение задач динамики океана.–Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1982.–с.6–14.

4. Кочергин В.П. О построении моделей крупномасштабных течений в океане//Метеорология и гидрология, №2, 1001, С.66–71.

5. Кочергин С.В., Тимченко И.Е. Вариационные методы усвоения наблюдений в моделях динамики океана.–Севастополь, 1989.–46 с. (Препринт / АН УССР. Морской гидрофизический институт.