НЕКОТОРЫЕ ПРОБЛЕМЫ ПРЯМЫХ И ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ВЗАИМОСВЯЗАННОГО ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА

П.М. Колесников, *Г.Ф. Батраков

Научно-исследовательский центр «Энергоинформ»
Белоруссия, Минск, 220072,
ул. П. Бровки, 15
E-mail: kpm@nsl.hmti.ac.by
*Морской гидрофизический институт НАН Украины
г. Севастополь, ул. Капитанская, 2
E-mail: oaoi@alpha.mhi.iuf.net

Сформулировано обобщенное кинетическое уравнение в пространстве скоростей, импульсов и их моментов, градиентов температур для частиц переменной массы с упругими и неупругими столкновениями. Указан переход от кинетических уравнений к макроскопическим путем их осреднения. Приведен метод получения бесконечной цепочки уравнений и способы их замыкания для неравновесных процессов. Приводится феноменологическая система уравнений с учетом релаксационных и взаимосвязанных процессов переноса.

Обычно многие физические законы формулируются в виде дифференциальных уравнений. Решение этих уравнений при различных начальных и граничных условиях составляет содержание прямых задач. Определение вида уравнений, входящих в них коэффициентов, начальных или граничных условий составляет содержание обратных задач. Ввиду огромного разнообразия свойств сред, начальных и граничных условий, взаимосвязанности и взаимозависимости различных процессов тепломассопереноса возникает большое разнообразие прямых и обратных задач. В связи с этим представляет интерес рассмотреть некоторые общие проблемы прямых и обратных задач.

1. Прямые задачи. Теоретическое изучение полидисперсных сред возможно проводить кинетическими, статистическими или феноменологическими методами.

При кинетическом описании систем с переменной массой m, скоростью $\vec{v}$, температурой T, угловыми координатами $\vec{\theta}$ и скоростями $\dot{w}$, угловым моментом $\dot{M}$, силой взаимодействия $\vec{F}$ и другими параметрами вводится фазовый объем в соответствующем обобщенном пространстве

$$d\Gamma = d\vec{r}\, d\vec{v}\, d\vec{\theta}\, d\vec{w}\, dm\, dT$$

и обобщенная функция распределения

$$f_i = \left(t, \vec{r}, \vec{v}, \vec{\theta}, \vec{w}, m, T\right).$$

Рассматривая движение и взаимодействие частиц в фазовом пространстве, для функции распределения получаем обобщенное кинетическое уравнение в соответствующем фазовом пространстве

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \vec{v}\nabla_{\vec{r}} f_i + \frac{\vec{F}_i}{m_i}\nabla_{\vec{v}_i} f_i + \vec{w}\nabla_{\theta} f_i + \frac{\vec{M}_i}{I_i}\nabla_{\vec{w}} f_i + \frac{\vec{q}_i}{m_i c_i}\nabla_T f_i + \frac{dm_i}{dt}\nabla_m f_i = J_{ij}, \quad (1)$$

где $m_i, \dot{M}_i, c_i$ - масса, момент инерции и теплоемкость частиц i-й фракции, J_{ij} - интеграл упругих и неупругих взаимодействий i-й фракции с j.

Одной из сложнейших проблем кинетической теории является установление вида кинетического уравнения и интеграла столкновений J_{ij}, входящего в кинетические уравнения (1). Если среда достаточно разрежена или находится в равновесии, то интегралом столкновений можно пренебречь, положив [1]

$$J_{ij} = 0. \quad (2)$$

Вблизи термодинамического равновесия этот интеграл иногда можно представить приближенно в виде релаксационного слагаемого

$$J_{ij} = -\frac{f_i - f_{0i}}{\tau_{ij}}, \quad (3)$$

где τ_{ij} - времена релаксации.

Следующим приближением является диффузионное приближение, когда вместо релаксационного слагаемого вводят вторые производные в пространстве параметров по аналогии с приближением Фоккера - Планка в обычной кинетической теории [2].

Интегралы столкновений можно получать, применяя в кинетической теории процедуру получения иерархической системы кинетических уравнений [3], однако при этом возникает труднейшая проблема замыкания бесконечной цепочки кинетических уравнений, решенная пока для простейших термодинамических систем.

В том случае, когда сформулировано кинетическое уравнение или их система, исследование систем можно проводить на микроскопическом уровне и получить подробнейшую информацию об их поведении. Методами кинетической теории изучаются в настоящее время сложнейшие термодинамические системы: разреженные газ и плазма,

жидкости, тела в кристаллическом и аморфном состоянии, системы, близкие к равновесию.

Обобщение теории на общие неравновесные процессы при любых значениях параметров является одной из труднейших проблем кинетической теории. Несмотря на огромные успехи применения кинетической теории к идеальным и равновесным системам, теория неидеальных и неравновесных систем, таких как псевдоожиженные, турбулентные, самоорга-низующиеся и т. д., еще не создана.

Если детальное описание систем, требующее огромных усилий для своей реализации, излишне, что часто соответствует реальным условиям измерения или наблюдения макроскопических явлений, производят осредненное описание. Его можно осуществить различными статистическими методами, Одним из таких методов осредненного описания является осреднение кинетических или других уравнений, описывающих локальное поведение в средах или системах, например, микроскопических уравнений Максвелла, уравнений квантовой механики и др. Осреднение обычно проводится с привлечением дополнительных условий или без них. Например, в теории осреднения уравнений турбулентности широкое применение получили различные полуэмпирические гипотезы, приводящие к различным уровням описания турбулентности.

Осреднение кинетических уравнений для различных молекулярных признаков приводит к бесконечной взаимосвязанной цепочке уравнений переноса. Умножив кинетическое уравнение (1) на молекулярный признак Φ_i и проинтегрировав уравнение в соответствующем фазовом пространстве, получаем некоторые осредненные уравнения для средних значений молекулярного признака Φ_i, которые в кинетической теории называются уравнениями переноса молекулярного признака или обобщенными уравнениями переноса Максвелла - Энскога, получивших такие уравнения в кинетической теории газов. Так, для уравнения (1), производя осреднение по всем возможным значениям $\vec{v}, \vec{w}, T, m$, получаем обобщенное уравнение переноса Максвелла - Энскога

$$\int d\vec{v}\int d\vec{w}\int dT\int dm\left(\frac{\partial f_i}{\partial t}+\vec{v}\cdot\nabla_{\vec{r}}f_i+\frac{\vec{F}_i}{m_i}\nabla_{\vec{v}}f_i+\right.$$

$$\left.+\vec{w}\nabla_{\vec{\theta}}f_i+\frac{\vec{M}_i}{I_i}\nabla_{\vec{w}}f_i+\frac{\vec{q}_i}{m_i c_i}\nabla_T f_i+\frac{dm}{dt}\nabla_m f_i\right)\Phi=$$

$$=\int d\vec{v}\int d\vec{w}\int dT\int dm\, J_{ij}\,\Phi \qquad (4)$$

Выбирая в качестве молекулярных признаков, например, моменты скорости $\vec{v}^{\,n}$, где $n=0,1,2,\mathrm{K}$, получим из (4) бесконечную систему взаимосвязанных уравнений, ряд из которых будет иметь вполне определенный смысл законов сохранения массы, импульса, энергии, другие будут порождать так называемые замыкающие уравнения. При таком осреднении как в кинетической теории, так и в других теориях, например турбулентности, возникает проблема получения замкнутой системы, достаточной для описания с требуемой точностью взаимосвязанных процессов переноса изучаемой субстанции. В кинетической теории известны различные системы замыкающих уравнений, построенных на 7, 11, 21 и даже 52 моментах. Прогресс здесь возможен с использованием непосредственного интегрирования цепочек кинетических уравнений численными или асимптотическими методами для ряда частных случаев систем.

Для определения функций распределения необходимо решать кинетические уравнения, что представляет собой сложную математическую задачу даже для простейших кинетических уравнений типа уравнения Больцмана с развитыми методами его решения.

2. Обратные задачи. Используя свойства и характеристики рассеянного излучения в полидисперсных средах, такие как коэффициенты рассеяния, поглощения, отражения, прохождения, поляризации и т., п., определяемые на отдельных частицах или системе в целом экспериментальными или теоретическими методами, можно сформулировать обратные задачи восстановления функций распределения, а следовательно, и микроструктуры полидисперсных сред. На основе решения таких обратных задач были развиты различные методы диагностики неоднородных и полидисперсных сред: лазерное зондирование дисперсных сред , оптическая, рентгеновская, ультразвуковая или ямр-томография, рентгеновская голография. Обратные задачи сводятся обычно к решению одномерных, двумерных или многомерных интегральных уравнений первого рода с различными ядрами и экспериментальными данными. Так, в широко используемом методе малых углов, обратная задача восстановления функции распределения частиц по размерам сводится к решению интегрального уравнения Фредгольма вида

$$\int_{R_1}^{R_2} K(x,R)f(R)dR=\varphi(x), \qquad (5)$$

где $\varphi(x)$ - экспериментальная индикатриса рассеяния, $K(x,R)$ - ядро интегрального уравнения, $f(R)$ - искомая функция распределения по размерам [3]. Интегральные уравнения допускают даже точные решения, например, уравнения Абеля и другие, однако в большинстве случаев такие задачи некорректны, и для их решения развиты различные методы их регуляризации и решения аналитическими, численными или вероятностными методами.

Осреднение системы уравнений позволяет вычислять различные потоки молекулярных признаков (массы, заряда, импульса, энергии и т. п.), а по ним определять различные теплофизические параметры, сопоставляя которые с экспериментом, можно судить о точности и целесообразности той или другой замыкающей системы. Таким образом, методы кинетической теории переноса позволяют формулировать как сами уравнения, так и определять параметры, входящие в уравнение феноменологической теории процессов переноса, т. е. во многом могут решать обратные задачи феноменологической теории, базирующейся на фундаментальных законах сохранения и изменения массы, заряда, импульса, момента импульса, энергии и других субстанций, а в случае взаимосвязанного тепломассопереноса рассматриваемая система уравнений имеет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho\vec{v} = 0, \frac{\partial c_m}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j}_m = I_{ijm},$$

$$\rho\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v}\right) =$$

$$= -\nabla p + \rho\vec{g} + e\vec{E} + \vec{j}_e \cdot \vec{B} + \eta\Delta\vec{v} + (\xi+\eta)\vec{v}\operatorname{div}\vec{v},$$

$$\rho c_p\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)T\right) =$$

$$= -\operatorname{div}\vec{j}_q + \frac{dp}{dt} + Q + \Phi + \frac{j_e^2}{\sigma}, p = p(\rho,T),$$

$$\vec{j}_m = -D\nabla c_m - D_T\nabla T - D_p\nabla p - \tau_m\frac{\partial \vec{j}_m}{\partial t} + \qquad (6)$$

$$+ N_m\left[\vec{H}\cdot\vec{j}_e\right] + L_m\left[\vec{H}\cdot\vec{v}\right] + \gamma_m\vec{j}_e,$$

$$\vec{j}_q = -\lambda_c\nabla c - \lambda\nabla T - \lambda_p\nabla p - \tau_q\frac{\partial \vec{j}_q}{\partial t} +$$

$$+ N_q T\left[\vec{H}\cdot\vec{j}_e\right] + \left[\vec{H}\cdot\vec{v}\right] + \gamma_q\vec{j}_e,$$

$$\vec{j}_e = \sigma\left[\vec{E} + \vec{v}\cdot\vec{B}\right] - \tau_e\frac{\partial \vec{j}_e}{\partial t} + R\left[\vec{j}_e\cdot\vec{B}\right] -$$

$$- \alpha_e\nabla c_m - \beta_e\nabla T - \delta_e\nabla p - N\left[\vec{H}\cdot\nabla T\right],$$

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\mu\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \operatorname{rot}\vec{H} = \vec{j}_e + \varepsilon\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \operatorname{div}\vec{D} = e,$$

$$\operatorname{div}\vec{B} = 0, \vec{D} = \varepsilon\vec{E}, \vec{B} = \mu\vec{H},$$

где ρ - плотность, $\vec{v}$ - скорость, c_m - концентрация m-го компонента, $\vec{j}_m$ - поток массы, I_{mij} - источники массы, p - давление, $\vec{g}$ - ускорение силы тяжести, t - время, e - заряд, $\vec{j}_e$ - плотность тока; $\vec{E}, \vec{H}$ - напряженности электрического и магнитного полей; $\vec{B}$, $\vec{D}$ - магнитная и электрическая индукция; η, ξ - коэффициенты первой и второй вязкости, T - температура, $\vec{j}_q$ - плотность теплового потока, Ф - диссипативная функция, Q - источник тепла; D, D_T, D_p - коэффициенты массопереноса; $\lambda_c, \lambda, \lambda_p$ - коэффициенты теплопереноса; τ_e и τ_m, τ_q - времена релаксации; σ, ε, μ - коэффициенты проводимости, диэлектрическая и магнитная проницаемости среды; $\alpha, \beta, \delta, R, N, L$ - коэффициенты переноса.

Система уравнений взаимосвязанного переноса тепла, массы и электромагнитного поля дополняется начальными условиями, заданием в момент времени $t = t_0$ всех искомых величин в каждой точке пространства и дополнительными граничными условиями, исходя из требования непрерывности тепловых и электромагнитных полей T, $\vec{E}$, $\vec{H}$ и потоков $\vec{j}_m, \vec{j}_q, \rho\vec{v}$, равенства нормальных и касательных напряжений, условий непротекания и прилипания вязкой жидкости на твердых стенках.

Несмотря на сложность приведенной системы уравнений, в частных случаях изучены многие особенности протекания гидродинамических, тепловых, электромагнитных процессов в различных условиях (волновые движения малой амплитуды, волны конечной амплитуды (ударные волны), линейные диффузионные процессы в несжимаемых средах без учета явлений релаксации и токов смещения, автомодельные движения), вопросы устойчивости различных течений, найдены многие частные точные и приближенные решения течений в безграничных средах, замкнутых системах, в частности в ограниченном пространстве - по поверхности, в каналах и т. д. Но еще больше осталось неизученных проблем. Сюда относятся проблемы исследования полной системы уравнений в самосогласованных полях с учетом реальных зависимостей материальных сред, с учетом токов смещения и

релаксационных процессов, физико-химических и ядерных превращений, в многофазных гомогенных и гетерогенных средах. В настоящее время накоплен уже богатый опыт в постановке и решении обратных задач для частных случаев этой общей системы. Их можно подразделить на некоторые классы.

1. В феноменологической теории обычно коэффициенты переноса задаются из эксперимента, который зачастую и дорогостоящ и неточен. Определение теплофизических коэффициентов представляет одно из важнейших направлений для обратных задач.

2. Задание начальных условий также реально связано с большим числом измерений. Возникает проблема, как по небольшому числу измерений восстановить полные данные для задания начальных условий.

3. В уравнения входят различные источники массы, импульса, энергии как внутри объема, так и на ограничивающих поверхностях раздела фаз и т. д. Их также надо определить.

4. И, наконец, возникают обратные задачи, связанные с определением вида самих уравнений или замыкающих уравнений как для ламинарных, так и для турбулентных течений. Это наиболее трудные и еще не решенные проблемы.

В заключение отметим, что обратные задачи по сравнению с прямыми гораздо разнообразнее. Разрабатываемые методы и рассматриваемые проблемы зачастую столь разнообразны, что предлагаемые в настоящее время различные классификации обратных задач не могут их полностью охватить. Разумную классификацию обратных задач можно сделать только в рамках определенных ограничений. Следует отметить, что нет пока и единой выработанной терминологии по обратным задачам.

ЛИТЕРАТУРА

1. Колесников П.М. Электродинамическое ускорение плазмы / М.: Атомиздат. - 1971. - 253 с.

2. Силин В.П. Введение в кинетическую теорию газов / М.:Наука. - 1971. - 271 с.

3. Колесников П.М., Карпов А.А. Нестационарные двухфазные газожидкостные течения в каналах / Минск: Наука и техника. - 1986. – 311 с.