АНАЛИЗ ДИНАМИЧЕСКИХ РЕЖИМОВ РАБОТЫ ТЕРМОАНЕМОМЕТРОВ

В.А.Гайский

Морской гидрофизический институт
НАН Украины
г. Севастополь, ул. Капитанская, 2
E-mail: oaoi@alpha.mhi.iuf.net

Дается анализ работы термоанемометров при периодическом импульсном и гармоническом подогреве датчиков. Рассматриваются возможности и условия реализации термоанемометров с одним и двумя датчиками при использовании вычислительных процедур.

Термоанемометры широко используются при аэро- и гидродинамических исследованиях, в промышленности и автомобильном транспорте. Значительно реже их применение в гидрометеорологии и океанологии. Это можно объяснить сравнительно сложной обработкой сигнала датчиков, существенным энергопотреблением и ограниченной точностью при работе in situ. Целью данной работы является преодоление указанных недостатков путем использования динамических режимов нагрева датчиков, которые редко используются и не достаточно исследованы [1].

Возможности реализации таких режимов существенно возросли с появлением микроконтроллеров.

Обзор возможных вариантов построения термоанемометров с одним и двумя датчиками приведён в [2].

В данной работе анализируется работа измерителей при заданных периодических функциях нагрева.

Датчики считаются сосредоточенными инерционными звеньями 1-го порядка.

Термоанемометры с одним подогреваемым датчиком.

Уравнение теплового баланса подогреваемого датчика температуры имеет вид

$$[\theta(t)-\theta_e(t)]\ \alpha(t)\,S + {} + mc\theta'(t) = P(t), \qquad (1)$$

где $\theta_c(t)$ - температура среды; $\theta(t)$ - температура датчика; $\alpha(t)S$ - поток теплообмена датчика со средой; $P(t)$ - мощность нагрева датчика; m, c, S - масса, удельная теплоемкость и площадь поверхности контакта датчика со средой.

В уравнении 1 неизвестными являются $\alpha(t)$ и $\theta_c(t)$ и их определение возможно при введении некоторых ограничений.

<u>Ограничение 1.</u> Чувствительность информативного параметра в сигнале температуры датчика к изменению нагрева за τ отсчетов в δ^{-1} раз выше, чем к изменению температуры среды $\theta_c(t)$ и коэффициенту теплообмена $\alpha(t)$ за это же время, где δ - допустимая погрешность измерения. При этом можно записать

$$\theta_c(1)=\theta_c(2)=\ldots\theta_c(\tau); \qquad (2)$$

$$\alpha(1)=\alpha(2)=\ldots\alpha(\tau). \qquad (3)$$

Если Ограничение 1 справедливо для двух отсчетов $\tau = 2$, то из уравнения (1) получим

$$\alpha(1,2)S=\frac{P(1)-P(2)-mc[\theta'(1)-\theta'(2)]}{[\theta(1)-\theta(2)]}; \qquad (4)$$

$$\theta_c(1,2)=\frac{\theta(2)[P(1)-mc\theta'(1)]- {} - \theta(1)[P(2)-mc\theta'(2)]}{P(1)-P(2)+ {} +mc[\theta'(2)-\theta'(1)]}. \qquad (5)$$

Для трех отсчетов ($\tau = 3$) получим

$$\alpha(1,2,3)S=\frac{[P(1)-P(2)][\theta'(2)-\theta'(3)]- {} -[P(2)-P(3)][\theta(2)-\theta'(3)]}{[\theta(1)-\theta(2)][\theta'(2)-\theta'(3)]- {} -[\theta(2)-\theta(3)][\theta'(1)-\theta'(23)]}; \qquad (6)$$

$$mc=\frac{[\theta(1)-\theta(2)][P(2)-P(3)]- {} -[P(1)-P(2)][\theta(2)-\theta(3)]}{[\theta(1)-\theta(2)][\theta'(2)-\theta'(3)]- {} -[\theta(2)-\theta(3)][\theta'(1)-\theta'(2)]}. \qquad (7)$$

Из выражений 6 и 7 видно, что при трех отсчетах достигнута инвариантность к параметру mc датчика. Заметим, что фактически необходимое число отсчетов превысит τ, поскольку вычисление производных $\theta'(t)$ для каждого момента времени t потребует как минимум двух отсчетов $\theta(t)$ и $\theta(t-1)$.

Приведенные выше выражения 4 – 7 справедливы при произвольных законах изменения нагрева $P(t)$.

В случае ступенчатого нагрева

$$P(1) = 0, \quad P(2) = P(3) = P_m. \tag{8}$$

Получим

$$\alpha(1,2)S = \frac{-P_m - mc\left[\theta'(1) - \theta'(2)\right]}{\left[\theta(1) - \theta(2)\right]}; \tag{9}$$

$$\theta_c(1,2) = \frac{\theta(2)mc\theta'(1) + \theta(1)\left[P_m - mc\theta'(2)\right]}{P_m - mc\left[\theta'(2) - \theta'(1)\right]}; \tag{10}$$

$$\alpha(1,2,3)S = \frac{P_m\left[\theta'(3) - \theta'(2)\right]}{\left[\theta(2) - \theta(3)\right]\left[\theta'(1) - \theta'(2)\right] - \left[\theta(1) - \theta(2)\right]\left[\theta'(2) - \theta'(3)\right]}; \tag{11}$$

$$mc = \frac{P_m\left[\theta(2) - \theta(3)\right]}{\left[\theta(1) - \theta(2)\right]\left[\theta'(2) - \theta'(3)\right] - \left[\theta(2) - \theta(3)\right]\left[\theta'(1) - \theta'(2)\right]}. \tag{12}$$

Реальные датчики являются распределенными и представление их инерционным звеном 1-го порядка в режиме нагрева возможно, если конструктивное исполнение нагревателя и чувствительного элемента обеспечивает приток тепла от нагревателя аналогично притоку тепла от окружающей среды. Для большинства датчиков и всех, где осуществляется нагрев чувствительного элемента измерительным током, такое условие не обеспечивается.

Поэтому переходной процесс собственно нагрева датчика не целесообразно использовать для получения измерительной информации.

При этом будем считать, что внешние тепловые процессы лежат в полосе частот до f_m,

где $f_m < \tau^{-1}$, $\tau \rangle \dfrac{r^2}{a}$, (13)

где r – радиус цилиндрического датчика,

a – температуропроводность материала датчика.

При условии постоянства α, θ_c и P_m переходной режим нагрева закончится и в установившемся режиме $\theta'(t) = 0$ для разных $P(t)$ справедливо

$$\alpha S = \frac{P(1)}{\theta(1) - \theta_c}, \tag{14}$$

$$\alpha S = \frac{P(2)}{\theta(2) - \theta_c}, \tag{15}$$

$$\alpha S = \frac{P(1) - P(2)}{\theta(1) - \theta(2)}, \tag{16}$$

$$\theta_c = \theta(1) - \frac{P(1)}{P(1) - P(2)}\left[\theta(1) - \theta(2)\right]. \tag{17}$$

При снятии внутреннего нагрева датчик остывает до температуры θ_c внешней среды, что эквивалентно ступенчатому уменьшению температуры θ_c.

Для трех моментов времени получим

$P(1) = P_m$, $P(2) = P(3) = 0$.

$$\alpha(1,2)S = \frac{P_m - mc\left[\theta'(1) - \theta'(2)\right]}{\left[\theta(1) - \theta(2)\right]}, \tag{18}$$

$$\theta_c(1,2) = \frac{\theta(2)\left[P_m - mc\theta'(1)\right] + \theta(1)mc\theta'(2)}{P_m - mc\left[\theta'(2) - \theta(1)\right]}, \tag{19}$$

$$\alpha(2,3)S = \frac{mc\left[\theta'(3) - \theta'(2)\right]}{\left[\theta(2) - \theta(3)\right]}, \tag{20}$$

$$\theta_c(2,3) = \frac{\theta(3)\theta'(2) - \theta(2)\theta'(3)}{\theta(2) - \theta(3)}, \tag{21}$$

$$T(2,3) = \frac{mc}{\alpha S} = \frac{\theta(2) - \theta(3)}{\theta'(3) - \theta'(2)}. \tag{22}$$

<u>В режиме свободного остывания</u> от первоначальной температуры датчика $\theta_c + \dfrac{P_m}{\alpha S}$ температура датчика изменяется по экспоненциальному закону

$$\theta(t) - \theta_c = \theta_m \, e^{-\frac{t}{T}}, \qquad (23)$$

где $\theta_m = \dfrac{P_m}{\alpha S}$ – максимальная разность температур датчика и среды, $\theta_c = const.$

Как известно [3], при свободном остывании любое тело через некоторое время выходит на так называемый "регулярный режим", описываемый выражением 23. Следовательно, это выражение можно использовать и для распределенных датчиков.

Далее можем записать

$$\theta(1) - \theta(2) = \theta_m \left(e^{-\frac{t_1}{T}} - e^{-\frac{t_2}{T}} \right), \qquad (24)$$

$$\theta(2) - \theta(3) = \theta_m \left(e^{-\frac{t_2}{T}} - e^{-\frac{t_3}{T}} \right), \qquad (25)$$

$$\frac{\theta(1) - \theta(2)}{\theta(2) - \theta(3)} = \frac{e^{-\frac{t_2}{T}} - e^{-\frac{t_3}{T}}}{e^{-\frac{t_2}{T}} - e^{-\frac{t_3}{T}}}. \qquad (26)$$

Параметр T можно определить численным решением последнего выражения, что не очень удобно.

Можно поступить другим образом.

Продифференцируем выражение 23 и получим

$$\theta'(t) = -\frac{1}{T}\theta_m \, e^{-\frac{t}{T}}, \qquad (27)$$

$$\theta'(2) = -\frac{\theta_m}{T} \, e^{-\frac{t_2}{T}}, \qquad (28)$$

$$\theta'(3) = -\frac{\theta_m}{T} \, e^{-\frac{t_3}{T}}, \qquad (29)$$

$$\begin{aligned} \theta'(2) - \theta'(3) &= \frac{1}{T}\left(\theta_m \, e^{-\frac{t_2}{T}} - \theta_m \, e^{-\frac{t_3}{T}} \right) = \\ &= \frac{1}{T}\left(\theta_c - \theta(2) \ - \theta_c + \theta(3)\right) = \\ &= \frac{1}{T}\left[\theta(3) - \theta(2)\right]; \end{aligned} \qquad (30)$$

$$T = \frac{\theta(3) - \theta(2)}{\theta'(3) - \theta'(2)}. \qquad (31)$$

Выражение для T (31) совпало с выражением для T (22), полученного другим путем. Оно удобно для определения T, поскольку не зависит от θ_c и относительно просто вычисляется. Задача упрощается, если θ_c известно.

Например, из (23) при известном θ_c получим

$$\theta_m = \theta(0) - \theta_c, \qquad (32)$$

то

$$\theta'(t) = -\frac{\theta_m}{T} \, e^{-\frac{\tau}{T}}. \qquad (33)$$

$$\frac{\theta'(0)}{\theta(0) - \theta_c} = -\frac{1}{T}. \qquad (34)$$

$$T = \frac{\theta_c - \theta(0)}{\theta'(0)}. \qquad (35)$$

Если использовать два цикла нагрева до разных температур $\theta_1(0)$ и $\theta_2(0)$, то получим

$$T = \frac{\theta_2(0) - \theta_1(0)}{\theta_1'(0) - \theta_2'(0)}. \qquad (36)$$

Из выражений 28 и 29 можем получить

$$\frac{\theta'(2)}{\theta'(3)} = e^{-\frac{t_2 + t_3}{T}} = e^{\frac{t_3 - t_2}{T}}, \qquad (37)$$

$$T = \frac{t_3 - t_2}{\ell n \dfrac{\theta'(2)}{\theta'(3)}}. \qquad (38)$$

Последнее выражение интересно тем, что интервал времени $t_3 - t_2$ может быть легко задан с высокой точностью (например, 10^{-6}) и остается обеспечить с достаточной точностью измерение $\theta(t)$, вычисление $\theta'(t)$ и $\ln\left[\frac{\theta'(2)}{\theta'(3)}\right]$.

Таким образом, в режиме свободного охлаждения предварительно нагретого датчика при постоянстве температуры среды θ_c и коэффициента теплообмена α датчика со средой за время пары отсчетов температуры датчика и ее производной, можно определить параметр тепловой инерции датчика T.

Если за время охлаждения датчика получить $(N + 1)$ отсчетов, то получим до N независимых параметров. Полученные при этом N определений для T могут быть использованы как мгновенные значения или осреднены $(\overline{T})$.

Другим способом определения параметров $\overline{\theta}_m$ и $\overline{T}$ экспоненты 23 может быть аппроксимация отсчетов процесса $\theta(t)$ экспонентой с использованием метода наименьших квадратов. Однако это требует относительно больших вычислительных ресурсов и распространения ограничения 1 на больший отрезок времени.

В поиске помехоустойчивого способа оценим возможности определения параметра Т по значению интеграла от информативного сигнала $\theta(t)$ на некотором интервале τ

$$Q = \int_0^\tau \theta(t)\,dt = \int_0^\tau \left[\theta_c + \theta_m e^{-\frac{t}{T}}\right] dt = \\ = \theta_c \tau + \theta_m T\left(1 - e^{-\frac{\tau}{T}}\right). \qquad (39)$$

Чувствительность Q по T будет равна

$$\frac{\partial Q}{\partial T} = \theta_m\left(1 - e^{-\frac{\tau}{T}} - \frac{\tau}{T}e^{-\frac{\tau}{T}}\right). \qquad (40)$$

Из последнего выражения видно, что максимальная чувствительность имеет место при $\tau = 0$ и равна θ_m. Поэтому интервал τ не должен быть большим. С другой стороны для подавления помех желательно увеличение времени интегрирования. В выражении 39 имеется три неизвестных θ_c, θ_m и Т. Поэтому необходимо как минимум три уравнения и три отсчета $Q(\tau)$

$$Q_\tau(1) = \theta_c \tau_1 + \theta_m T\left(1 - e^{-\frac{\tau_1}{T}}\right)$$

$$Q_\tau(2) = \theta_c \tau_2 + \theta_m T\left(1 - e^{-\frac{\tau_2}{T}}\right) \qquad (41)$$

$$Q_\tau(3) = \theta_c \tau_3 + \theta_m T\left(1 - e^{-\frac{\tau_3}{T}}\right).$$

Исключая неизвестные, получим

$$\frac{Q(1) - \frac{\tau_1}{\tau_2}Q(2)}{Q(2) - \frac{\tau_2}{\tau_3}Q(3)} = \frac{e^{-\frac{\tau_2}{T}} - e^{-\frac{\tau_1}{T}}}{e^{-\frac{\tau_3}{T}} - e^{-\frac{\tau_2}{T}}}, \qquad (42)$$

Возможно численное решение этого уравнения относительно T.

Другой способ расчета состоит в следующем.

Из уравнения 39 можем записать

$$\frac{\partial Q(\tau)}{\partial \tau} = \theta_c + \frac{\theta_m}{T}e^{-\frac{\tau}{T}}. \qquad (43)$$

$$Q'(1) = \theta_c + \frac{\theta_m}{T}e^{-\frac{\tau_1}{T}}$$

$$Q'(2) = \theta_c + \frac{\theta_m}{T}e^{-\frac{\tau_2}{T}} \qquad (44)$$

$$Q'(3) = \theta_c + \frac{\theta_m}{T}e^{-\frac{\tau_3}{T}}.$$

Исключая неизвестные, получим

$$\frac{Q'(1) - Q'(2)}{Q'(2) - Q'(3)} = \frac{e^{-\frac{\tau_1}{T}} - e^{-\frac{\tau_2}{T}}}{e^{-\frac{\tau_2}{T}} - e^{\frac{\tau_3}{T}}}. \qquad (45)$$

Уравнение 42 предпочтительнее для вычислений, чем 45, поскольку в нем нет производных.

Рассмотрим еще один способ с интегрированием $\theta(t)$ с разных значений θ_m при $t = 0$ и двух циклах нагрева и остывания. При этом ограничение 1 распространяется на два цикла.

Из 39 можем записать при фиксированном τ

$$Q_1(1) = \theta_c \tau_1 + \theta_{m_1} T\left(1 - e^{-\frac{\tau_1}{T}}\right)$$

$$Q_1(2) = \theta_c \tau_2 + \theta_{m_1} T\left(1 - e^{-\frac{\tau_2}{T}}\right)$$

$$Q_2(1) = \theta_c \tau_1 + \theta_{m_2} T\left(1 - e^{-\frac{\tau_1}{T}}\right)$$

$$Q_2(2) = \theta_c \tau_2 + \theta_{m_2} T\left(1 - e^{-\frac{\tau_2}{T}}\right). \quad (46)$$

Исключая неизвестные, получим

$$Q_1(\tau_1) - Q_2(\tau_1) = = \left(\theta_{m_1} - \theta_{m_2}\right) \cdot T\left(1 - e^{-\frac{\tau_1}{T}}\right),$$

$$Q_1(\tau_2) - Q_2(\tau_2) = = \left(\theta_{m_1} - \theta_{m_2}\right) T\left(1 - e^{-\frac{\tau_2}{T}}\right), \quad (47)$$

$$\frac{Q_1(\tau_1) - Q_2(\tau_1)}{Q_1(\tau_2) - Q_2(\tau_2)} = \frac{1 - e^{-\frac{\tau_1}{T}}}{1 - e^{\frac{\tau_2}{T}}}, \quad (48)$$

где Q_1 и Q_2 – интегралы от $\theta(t)$ при первом и втором циклах.

Параметр T определяется из выражения (48) численным решением.

Нагрев датчика по гармоническому закону

Примем

$$P(t) = P_m(1 + \cos\varpi t), \quad (49)$$

из уравнения 1 получим

$$[\theta(t) - \theta_C(t)]\alpha(t) S + mc\theta'(t) = P_m(1 + \cos\omega t). \quad (50)$$

При действии Ограничения 1 на интервале τ

$$[\theta(t) - \theta_C]\alpha S + mc\theta'(t) = P_m(1 + \cos\omega t) \quad (51)$$

или после преобразований

$$\theta(t) + \frac{mS}{\alpha S}\theta'(t) = = \frac{P_m}{\alpha S}\cos\varpi t + (\frac{P_m}{\alpha S} + \theta_C). \quad (52)$$

Из последнего выражения видно, что воздействие переменного нагрева эквивалентно изменению температуры окружающей среды по гармоническому закону на фоне постоянной составляющей.

При начальном условии $\theta(0) = \dfrac{P}{\alpha S} + \theta_c$

решение уравнения 52 имеет вид

$$\theta(t) = \left(\frac{P}{\alpha S} + \theta_c\right) + \frac{P}{\alpha S} \cdot \frac{1}{1 + \omega^2 T^2} \cdot \left(\cos\omega t + \omega T \sin\omega t - e^{-\frac{t}{T}}\right). \quad (53)$$

В установившемся режиме при $t >> 0$ можем записать

$$\theta(t) = \left(\frac{P}{\alpha S} + \theta_c\right) + \frac{P}{\alpha S} \cdot \frac{1}{1 + \omega^2 T^2} \cdot \left(\cos\omega t + \omega T \sin\omega t\right). \quad (54)$$

Из последнего выражения видно, что информативными по параметру T являются, как амплитуды квадратурных составляющих, так и фаза выходной гармоники.

Рассмотрим решение во временной области. Разложим ряд отсчётов $\theta(t)$ на интервале τ в тригонометрический ряд Фурье. Поскольку $\theta(t)$ содержит только одну гармонику и постоянную составляющую, то в разложение войдут только три члена

$$\theta(t) \approx \frac{a_0}{2} + a\cos\omega t + b\sin\omega t, \quad (55)$$

где $a_0 = \dfrac{1}{\tau}\int_0^\tau \theta(t)dt, \quad a = \dfrac{2}{\tau}\int_0^\tau \theta(t)\cos\omega t,$

$$b = \frac{2}{\tau}\int_0^\tau \theta(t)\sin\omega t. \quad (56)$$

Если в $\theta(t)$ и присутствуют другие гармоники, например, при невыполнении Ограничения 1 и изменчивости $\theta_c(t)$ или $\alpha(t)$, то они рассматриваются как шумы и в разложении в ряд не учитываются. Таким образом, осуществляется узкополосная фильтрация полезного сигнала из шумов.

Можем записать

$$\theta'(t) = -a\omega\sin\omega t + b\omega\cos\omega t\,. \tag{57}$$

Подставим выражения для $\theta(t)$ и $\theta'(t)$ в уравнение 52 и получим

$$a_0 + a\cos\omega t + b\sin\omega t + \frac{mc}{\alpha S}(b\omega\cos\omega t - -a\omega\sin\omega t) = \frac{P_m}{\alpha S}\cos\omega t + (\frac{P_m}{\alpha S} + \theta_C); \tag{58}$$

$$a_0\alpha S + \alpha S a\cos\omega t + \alpha S b\sin\omega t - \theta_C\alpha S = = P_m\cos\omega t - mcb\omega\cos\omega t + mca\omega\sin\omega t + P_m; \tag{59}$$

$$\alpha S = \frac{P_m\cos\omega t + mc[a\omega\sin\omega t - b\omega\cos\omega t] + P_m}{a_0 + a\cos\omega t + b\sin\omega t + \theta_C} = = \frac{P_m(1+\cos\omega t) + mc[a\omega\sin\omega t - b\omega\cos\omega t]}{a_0 - \theta_C + a\cos\omega t + b\sin\omega t}. \tag{60}$$

Для определения неизвестных $(\theta_c, \alpha S, mc)$ воспользуемся несколькими значениями гармонических функций в уравнении (59), справедливом для интервала $0 \le t \le \tau$.

$$\alpha S(a_0 - \theta_C + a\cos\omega t_1 + b\sin\omega t_1) - -mC[a\omega\sin\omega t_1 - b\omega\cos\omega t_1] = = P_m(1+\cos\omega t_1),$$

$$\alpha S(a_0 - \theta_C + a\cos\omega t_2 + b\sin\omega t_2) - -mC[a\omega\sin\omega t_2 - b\omega\cos\omega t_2] = = P_m(1+\cos\omega t_2). \tag{61}$$

Вычтем второе уравнение из первого и получим

$$\alpha S[a(\cos\omega t_1 - \cos\omega t_2) + b(\sin\omega t_1 - \sin\omega t_2) - -mc\omega[a(\sin\omega t_1 + \sin\omega t_2) - b(\cos\omega t_1 - -\cos\omega t_2)] = P_m(\cos\omega t_1 - \cos\omega t_2). \tag{62}$$

Возьмём ещё один момент времени t_3 и можем записать

$$\alpha S[a(\cos\omega t_1 - \cos\omega t_3) + b(\sin\omega t_1 - \sin\omega t_3) - -mc\omega[a(\sin\omega t_1 + \sin\omega t_3) - b(\cos\omega t_1 - -\cos\omega t_3)] = P_m(\cos\omega t_1 - \cos\omega t_3). \tag{63}$$

Введем обозначения

$$\left.\begin{aligned} A_{11} &= a(\cos\omega t_1 - \cos\omega t_2) + b(\sin\omega t_1 - \sin\omega t_2)\\ A_{21} &= a(\cos\omega t_1 - \cos\omega t_3) + b(\sin\omega t_1 - \sin\omega t_3)\\ A_{12} &= a(\sin\omega t_1 + \sin\omega t_2) - b(\cos\omega t_1 - \cos\omega t_2)\\ A_{22} &= a(\sin\omega t_1 + \sin\omega t_3) - b(\cos\omega t_1 - \cos\omega t_3)\\ B_1 &= P_m(\cos\omega t_1 - \cos\omega t_2)\\ B_2 &= P_m(\cos\omega t_1 - \cos\omega t_3) \end{aligned}\right\} \tag{64}$$

Получим

$$\begin{aligned} \alpha S A_{11} + mc\omega A_{12} &= B_1,\\ \alpha S A_{21} + mc\omega A_{22} &= B_2 \end{aligned} \tag{65}$$

Решим относительно неизвестных αS и mc

$$\alpha S = \frac{B_1 A_{12} - B_1 A_{12}}{A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}}, \tag{66}$$

$$mc = \frac{1}{\omega}\cdot\frac{A_{11}B_2 - B_1 A_{21}}{A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}} \tag{67}$$

Таким образом, по выражениям 66, 67 возможно определение как потока теплообмена αS, так и теплоёмкости датчика mc.

Далее проведём анализ в частотной области. Значения a и b являются значениями амплитуд квадратурных составляющих гармоники ω в дискретном спектре сигнала, прошедшего инерционное звено 1 – го порядка с параметром инерции T. Тогда

$$\varphi(\omega) = -arctg\,\frac{b(\omega)}{a(\omega)} = -arctg\,\omega T\,, \quad (68)$$

$$\frac{b(\omega)}{a(\omega)} = -\omega T = -2\pi f T\,. \quad (69)$$

Из выражения 69 видно, что увеличением частоты f можно повышать чувствительность измеряемо–вычисляемого значения $b(\omega)/a(\omega)$ к параметру T.

Если пожелать, чтобы a и b были равноточными и, соответственно, $a = b$, то

$$T = \frac{1}{2\pi f}\quad. \quad (70)$$

Поскольку T переменно в некотором диапазоне $[T_1, T_2]$, то целесообразно принять

$$f = \frac{T_1 + T_2}{4\pi T_1 T_2}\,. \quad (71)$$

При этом

$$\left(\frac{a}{b}\right)_{\min} = \frac{T_1 + T_2}{2\pi T_2},\quad \left(\frac{a}{b}\right)_{\max} = \frac{T_1 + T_2}{2\pi T_1}\,. \quad (72)$$

Однако амплитудно-частотная характеристика инерционного звена спадает с ростом частоты, и полезный сигнал также будет падать.

Выражение для АЧХ имеет вид

$$|A(\omega)|^2 = \frac{k^2}{1+\omega^2 T^2} \quad (73)$$

Гармоника частотой ω на входе датчика имеет амплитуду $\dfrac{P_m}{\alpha S}$, а на выходе

$$\theta_m(\omega) = A(\omega)\frac{P_m}{\alpha S}\,, \quad (74)$$

причем

$$\theta_m(\omega) = \sqrt{a^2(\omega) + b^2(\omega)}\,. \quad (75)$$

Из 74 и 75 получим

$$\alpha S = \sqrt{\frac{k^2 P_m}{\theta_m^2(\omega)} - \omega^2 (mc)^2}\quad. \quad (76)$$

Для нахождения по выражению 76 (αS) необходимо знать k (из градуировки) и mc.

Если использовать два несущих сигнала $\varphi(t)$ с одинаковой амплитудой и разными частотами ω_1 и ω_2 (параллельно или последовательно), то можем записать

$$\frac{1+\omega_2^{\,2} T^2}{1+\omega_1^{\,2} T^2} = \frac{\theta_m(\omega_1)}{\theta_m(\omega_2)} = c(\omega_1 \omega_2), \quad (77)$$

$$T = \sqrt{\frac{1 - c(\omega_1\omega_2)}{c(\omega_1\omega_2)\omega_1^{\,2} - \omega_2^{\,2}}}\,. \quad (78)$$

В последнем выражении все величины измеряемы и известны.

В принципе можно увеличить число несущих частот для определения нескольких независимых отсчётов параметра Т в разных частотных каналах и, возможно, с разными шумами.

Можно даже использовать в качестве $P(t)$ белый шум и вычислить функцию спектральной плотности $S_\theta(\omega)$ температуры датчика $\theta(t)$. Функция $S_\theta(\omega)$ по форме будет повторять АЧХ

$$\frac{k^2}{1+\omega^2 T^2} \equiv S_\theta(\omega) \quad (79)$$

и можно будет аппроксимировать $S_\theta(\omega)$ функцией $\dfrac{k^2}{1+\omega^2 T^2}$ с подбором параметров k и T по методу наименьших квадратов. В то же время можно записать

$$\frac{1+\omega_i^{\,2} T^2}{1+\omega_j^{\,2} T^2} = \frac{S_\theta(\omega_i)}{S_\theta(\omega_j)} = d(\omega_i, \omega_j)\ , \quad (80)$$

где $i \neq j,\ i, j = \overline{0, N-1}$, N – число отсчётов спектра.

Можно получить (N – 1) независимых решений

$$T_{i,j} = \sqrt{\frac{1 - d(\omega_i, \omega_j)}{d(\omega_i, \omega_j)\omega_i^{\,2} - \omega_j^{\,2}}} \quad (81)$$

и далее вычислить среднее $\overline{T}$.

Если в качестве $P(t)$ подать случайный сигнал с произвольной функцией спектральной плотности $S_P(\omega)$, то

$$\left|\frac{k^2}{1+\omega^2T^2}\right|=\frac{S_\theta(\omega)}{S_P(\omega)}, \tag{82}$$

$$\frac{1+\omega_j^2T^2}{1+\omega_i^2T^2}=\frac{S_\theta(\omega_i)\cdot S_P(\omega_j)}{S_P(\omega_i)\cdot S_\theta(\omega_j)}=g(\omega_i,\omega_j) \tag{83}$$

$$T_{i,j}=\sqrt{\frac{1-g(\omega_i,\omega_j)}{g(\omega_i,\omega_j)\omega_i^2-\omega_j^2}}. \tag{84}$$

Вычисления по формуле (84) аналогичны вычислениям по выражению (81).

Основной недостаток рассмотренных спектральных методов определения параметров термоанемометра – это низкое быстродействие из-за необходимости получения достаточно продолжительного ряда измерений.

Термоанемометры с одним пассивным и одним подогреваемым датчиком.

Уравнения теплового баланса для пассивного и подогреваемого датчика имеют вид

$$\left.\begin{aligned}&[\theta_1(t)-\theta_C(t)]\alpha_1(t)S_1+m_1c_1\theta_1'(t)=0\\&[\theta_2(t)-\theta_C(t)]\alpha_2(t)S_2+m_2c_2\theta_2'(t)=P_2(t)\end{aligned}\right\} \tag{85}$$

Различные варианты сочетания датчиков рассмотрены в [3].

Если датчики идентичны по конструктивным параметрам

$$m_1c_1=m_2c_2=mc,$$
$$\alpha_1(t)S_1=\alpha_2(t)S_2=\alpha(t)S, \tag{86}$$

то

$$\left.\begin{aligned}&\alpha(t)S\theta_1(t)-\theta_C(t)\alpha(t)S+mc\theta_1'(t)=0\\&\alpha(t)S\theta_2(t)-\theta_C(t)\alpha(t)S+mc\theta_2'(t)=P_2(t)\end{aligned}\right\} \tag{87}$$

Последние уравнения соответствуют методу 3 Г. Пфрима [1]. Из них можем записать

$$\alpha(t)S=\frac{P_2(t)-mc[\theta_2'(t)-\theta_1'(t)]}{\theta_2(t)-\theta_1(t)}, \tag{88}$$

$$\theta_C(t)=\frac{\theta_1(t)[\theta_2'(t)-\frac{P_2(t)}{mc}]-\theta_2(t)\theta_1'(t)}{\theta_2'(t)-\frac{P_2(t)}{mc}-\theta_1'(t)}. \tag{89}$$

Если подогрев сделать регулируемым так, чтобы $\theta_2(t)-\theta_1(t)=\Delta\theta=const$, то будет $\theta_1'(t)\approx\theta_2'$ и из **88** получим

$$\alpha(t)S=\frac{P(t)}{\theta_2(t)-\theta_1(t)}. \tag{90}$$

Ограничениями в реализации такой системы с обратной связью будет наличие звеньев транспортного запаздывания и возможная максимальная мощность нагрева.

Если вновь ввести Ограничение 1

$$\alpha(1)=\alpha(2)=\alpha,\quad \theta_C(1)=\theta_C(2)=\theta_C, \tag{91}$$

то можем записать для первого момента времени

$$\theta_1(1)\alpha S-\theta_C\alpha S=-mc\theta_1'(1) \tag{92}$$

$$\theta_2(1)\alpha S-\theta_c\alpha S-P_2(1)=-mc\theta_2'(1). \tag{93}$$

Разделим первое уравнение на второе, обозначим $\frac{\theta'(t)_1}{\theta'(t)_2}=p(t)$, добавим ещё пару уравнений вида (92,93) для момента времени 2 и получим систему уравнений в канонической форме

$$\left.\begin{aligned}&p(1)P_2(1)(\alpha S)^{-1}-[1-p(1)]\cdot\theta_c=[\theta_1(1)-p(1)\theta_1(1)]\\&p(2)P_2(2)(\alpha S)^{-1}-[1-p(2)]\cdot\theta_c=[\theta_2(2)-p(2)\theta_2(2)]\end{aligned}\right\}, \tag{94}$$

где неизвестные $(\alpha S)^{-1}$ и θ_c. Вычисляемые переменные

$$p(1)=\frac{\theta_1'(1)}{\theta_2'(1)},\quad p(2)=\frac{\theta_1'(2)}{\theta_2'(2)}. \tag{95}$$

Запишем решение

$$\alpha S=\frac{p(1)P_2(1)[1-p(2)]-p(2)P_2(2)[1-p(1)]}{[\theta_1(1)-p(1)\theta_2(1)][1-p(2)]-[1-p(1)][\theta_2(2)-p(2)\theta_2(2)]}. \qquad (96)$$

$$\theta_c=\frac{p(1)P_2(1)[\theta_2(2)-p(2)\theta_2(2)]-p(2)P_2(2)[\theta_1(1)-p(1)\theta_2(1)]}{p(1)P_2(1)[1-p(2)]-p(2)P_2(2)[1-p(1)]}. \qquad (97)$$

Решение существует, если есть изменение температур датчиков $\theta_1(1)\neq\theta_1(2)$, $\theta_2(1)\neq\theta_2(2)$, что может быть из-за априорной разности температуры первого пассивного датчика и среды $\theta_1(1)\neq\theta_C(1)$ и изменения температуры второго датчика за счёт изменения мощности подогрева $P_2(1)\neq P_2(2)$.

Если второе условие всегда можно обеспечить, то первое не гарантируется. Это можно гарантировать, если и первый датчик сделать с подогревом.

Рассмотрим режим импульсного подогрева и свободного остывания датчика, когда $\theta_2(0)=\theta_c(0)+\theta_m$

и $P_2(0)=P_m$, $P_2(t\rangle 0)=0$. (98)

Из выражения 94 получим

$$\alpha(t)S=\frac{-mc\,[\theta_2'(t)-\theta_1'(t)]}{\theta_2(t)-\theta_1(t)} \qquad (99)$$

или

$$T(t)=\frac{[\theta_2(t)-\theta_1(t)]}{\theta_1'(t)-\theta_2'(t)} . \qquad (100)$$

Из выражения 89 получим

$$\theta_c(t)=\frac{\theta_1(t)\theta_2'(t)-\theta_2(t)\theta_1'(t)}{\theta_2'(t)-\theta_1'(t)}. \qquad (101)$$

Последние выражения ценны следующим:

Ограничение 1 снимается, параметры $T(t)$ и $\theta_c(t)$ определяются только по измеряемым температурам двух датчиков и их производных, результат инвариантен к параметрам датчиков, достигается максимально возможное быстродействие, которое ограничивается частотой дискретизации, разрешением по уровню, уровнем помех и способом вычисления производной.

Фактически импульс нагрева датчика нужен только для «раскачки» и создания асимметрии каналов в системе. В режиме свободного охлаждения мгновенные значения параметра $T(t)$ и температура среды $\theta_c(t)$ не зависят от начальных условий состояния датчиков, как это и должно быть из физических соображений.

На интервале времени охлаждения может быть получено N значений $T(t)$ и $\theta_c(t)$, которые могут быть осреднены.

При этом следует помнить, что «регулярный режим» остывания наступает с некоторым запаздыванием, которое для конкретного датчика может быть определено экспериментально.

Учтем, что температура остывающего датчика изменяется по экспоненциальному закону

$$\theta_2(t)-\theta_c(t)=\theta_m e^{-\frac{t}{T}}, \qquad (102)$$

$$\theta_2(t)-\theta_1(t)-T\theta_1'(t)=\theta_m e^{-\frac{t}{T}}. \qquad (103)$$

Вновь введем Ограничение 1 и при $\theta_1'(t)\approx 0$ получим

$$\theta_2(t)-\theta_1(t)=\theta_m e^{-\frac{t}{T}}. \qquad (104)$$

Для двух моментов времени t_1 и t_2 получим

$$\frac{\theta_2(1)-\theta_1(1)}{\theta_2(2)-\theta_1(2)}=e^{-\frac{t_1+t_2}{T(1,2)}} \qquad (105)$$

отсюда

$$T(1,2)=\frac{t_2-t_1}{\ell n\dfrac{[\theta_2(1)-\theta_1(1)]}{[\theta_2(2)-\theta_1(2)]}}. \qquad (106)$$

Аналогично выражению (38) интервал t_2-t_1 может быть задан с высокой точностью и необходимо получить с хорошей точностью отношение разностей температур двух датчиков в фиксированные моменты времени. Остаются в силе приведенные выше рассуждения о возможности получения N пар отсчетов температур и, соответственно, N определений параметра T за один цикл остывания с последующим осреднением.

Достоинством формулы (106) является отсутствие производных.

Термоанемометры с двумя активными датчиками.

Уравнения теплового баланса

$$\begin{cases} \theta_1(t)\alpha(t)S - \theta_c(t)\alpha(t)S + mc\theta_1'(t) = P_1(t) \\ \theta_2(t)\alpha(t)S - \theta_c(t)\alpha(t)S + mc\theta_2'(t) = P_2(t) \end{cases} \quad (107)$$

$$\alpha(t)S = \frac{P_1(t) - P_2(t) - mc[\theta_1'(t) - \theta_2'(t)]}{\theta_1(t) - \theta_2(t)}. \quad (108)$$

При действии Ограничения 1 для двух моментов времени

$$\begin{cases} \alpha S[\theta_1(1) - \theta_2(1)] + mc[\theta_1'(1) - \theta_2'(1)] = P_1(1) - P_2(1) \\ \alpha S[\theta_1(2) - \theta_2(2)] + mc[\theta_1'(2) - \theta_2'(2)] = P_1(2) - P_2(2), \end{cases} \quad (109)$$

$$\alpha S = \frac{[P_1(1) - P_2(1)] \cdot [\theta_1'(2) - \theta_2'(2)] - [P_1(2) - P_2(2)][\theta_1'(2) - \theta_2'(1)]}{[\theta_1(1) - \theta_2(1)] \cdot [\theta_1'(2) - \theta_2'(2)] - [\theta_1(2) - \theta_2(2)][\theta_1'(1) - \theta_2'(1)]} \quad (110)$$

$$mc = \frac{[\theta_1(1) - \theta_2(1)] \cdot [P_1(2) - P_2(2)] - [\theta_1(2) - \theta_2(2)][P_2(1) - P_2(1)]}{[\theta_1(1) - \theta_2(1)] \cdot [\theta_1'(2) - \theta_2'(2)] - [\theta_1(2) - \theta_2(2)][\theta_1'(1) - \theta_2'(1)]} \quad (111)$$

Таким образом, определяется αS и mc и, далее из исходных уравнений (107) θ_c.

После текущего определения mc можно снять Ограничение 1 и работать с формулой (108).

Из выражения (108) видно, что при

$$\theta_1'(\tau) = \theta_2'(\tau) \quad (112)$$

можем записать для таких моментов времени τ

$$\alpha(\tau)S = \frac{P_1(\tau) - P_2(\tau)}{\theta_1(\tau) - \theta_2(\tau)}. \quad (113)$$

Чтобы обеспечить выполнение равенства (112) за фиксированный промежуток времени, можно задать специальные функции нагрева $P_1(t)$ и $P_2(t)$.

Например,

$$P_1(t) = P_m(1 + \cos\omega t), \quad (114)$$

$$P_2(t) = P_m(1 + \sin\omega t). \quad (115)$$

Для температур датчиков при этом можно записать

$$\theta_1(t) = \theta_{10} + \theta_{11}(t) + \theta_m\cos(\omega t + \varphi)$$

$$\theta_2(t) = \theta_{20} + \theta_{21}(t) + \theta_m\sin(\omega t + \varphi), \quad (116)$$

где θ_{10} и θ_{20} - постоянные составляющие, $\theta_{11}(t)$ и $\theta_{21}(t)$ – составляющие, обусловленные изменением температуры среды, $\theta_m cos(\omega t+\varphi)$ и $\theta_m sin(\omega t+\varphi)$ – составляющие от нагрева, φ – фазовый сдвиг, обусловленный инерционностью датчика.

Продифференцируем выражения (116) и получим

$$\theta_1'(t) = \theta_{11}'(t) - \theta_m\sin(\omega t + \varphi)$$
$$\theta_2'(t) = \theta_{21}'(t) + \theta_m\cos(\omega t + \varphi). \quad (117)$$

Поскольку датчики идентичны, то $\theta_{11}'(t) = \theta_{21}'(t)$.

Предполагаем, что $\alpha(t) = const$ на отрезке времени $t_0 = \frac{2\pi}{\omega}$ (один период гармоники нагрева). Тогда $\theta_1'(\tau) = \theta_2'(\tau)$ в моменты времени τ на отрезке времени t_0 тогда, когда

$$|\cos(\omega t + \varphi) + \sin(\omega t + \varphi)| = 0. \quad (118)$$

За один период гармоники ее cos равен ($-sin$) только два раза при фазах $\frac{3\pi}{4}$ и $\frac{3\pi}{2}$ и моментах времени τ_1 и τ_2

$$\tau_1 = \varphi + \frac{3\pi}{8f} \quad \text{и} \quad \tau_2 = \varphi + \frac{3\pi}{4f}. \quad (119)$$

Следовательно, за один период гармоники нагрева будет два момента времени, при которых выполняется условие (112) и можно воспользоваться выражением (113).

С другой стороны, можно определить из выражений (119) фазовый сдвиг φ и далее

$$T = \frac{\varphi}{2\pi f}. \quad (120)$$

Аналогичный результат будет иметь место, если используем один пассивный датчик ($P_1(t) = 0$) и один подогреваемый датчик с $P_2(t) = P_m(1 + \cos\omega t)$. Очевидно, что за один период гармоники значение $\cos(\omega t + \varphi)$ (выражение 117) два раза будет равно нулю и $\theta_1'(\tau) = \theta_2'(\tau)$, можно воспользоваться формулой (113)

$$\alpha(\tau)S = \frac{P_2(\tau)}{\theta_2(\tau) - \theta_1(\tau)} \quad (121)$$

В этом случае фазы нулевых значений косинусоиды будут $\frac{\pi}{2}$ и $\frac{3\pi}{2}$ и

$$\tau_1 = \varphi + \frac{\pi}{4f}, \quad \tau_2 = \varphi + \frac{3\pi}{4f}. \quad (122)$$

После определения φ из выражения (121) можно определить T из выражения (120).

Представляют интерес установившийся режим с подогревом двух датчиков.

Для двух идентичных по αS подогреваемых разной мощностью P_1 и P_2 датчиков в установившемся режиме при $\theta_1'(t) = 0$ и $\theta_2'(t) = 0$ можем записать

$$\alpha S = \frac{P_i}{\theta_i - \theta_c}, \quad (123)$$

$$\alpha S = \frac{P_1 - P_2}{\theta_1 - \theta_2}. \quad (124)$$

Если датчики идентичны по αS и mc, при $P_1 = P_2 = const$ и динамике $\theta_i(t)$ за счет θ_c и α из уравнения 1, получим

$$\theta_1(t)\alpha(t)S - \theta_c(t)\alpha(t)S + mc\theta_1'(t) = P_1$$
$$\theta_2(t)\alpha(t)S - \theta_c(t)\alpha(t)S + mc\theta_2'(t) = P_2. \quad (125)$$

Из физических соображений в установившемся режиме при

$$mc\theta_1'(t) = mc\theta_2'(t), \quad (126)$$

$$\alpha(t)S[\theta_1(t) - \theta_2(t)] = P_1 - P_2, \quad (127)$$

$$\alpha(t)S = \frac{P_1 - P_2}{\theta_1(t) - \theta_2(t)}. \quad (128)$$

Заключение. Проведенный анализ показал возможности реализации термоанемометра на одном периодически подогреваемом датчике температуры, если инерционность датчика мала по сравнению с изменчивостью среды, и на двух датчиках с максимально возможным быстродействием в режиме периодического импульсного или гармонического подогрева. При этом может быть снижено энергопотребление измерителя и достигнута инвариантность результата к параметрам датчиков.

Дальнейшей задачей является разработка таких конструкций подогреваемых датчиков, для которых справедлива принятая модель датчика как инерционного звена 1-го порядка, а также проведения анализа динамических режимов для звеньев 2-го порядка.

ЛИТЕРАТУРА

1. Коротков П.А., Лондон Г.Е. Динамические контактные измерения тепловых величин. Л., "Машиностроение" (Ленингр. отд-ние), 1974, - 224 с.

2. Гайский В.А., Гайский П.В. Анализ способов измерения профиля скорости потока термопрофилемерами. Системы контроля окружающей среды: Сб. науч. тр. /НАН Украины. МГИ: - Севастополь, 2001. – 450 с., с.7-22.

3. Кондратьев Г.М. Тепловые измерения // М.-Л. Машгиз, 1975, - 221 с.

4. Греберг Г, Эрк С., Григулль У. Основы учения о теплообмене. ИИЛ, М., 1958,- 566 с.