

# АНАЛИЗ УПРАВЛЯЕМОСТИ ПОДВОДНОГО АВТОМАТИЧЕСКОГО ШАГАЮЩЕГО АППАРАТА

*А.Т. Барабанов, Е.В. Лазарева*

Севастопольский национальный  
технический университет  
г. Севастополь, Стрелецкая балка,  
Студгородок  
*lev@sevcom.net*

Рассматривается задача исследования свойства управляемости типичной непрерывно-дискретной системы автоматического управления – глубоководного шагающего аппарата.

**Введение.** Проблема автоматизации исследования морского дна ставит задачу разработки шагающего аппарата (ША), способного самостоятельно передвигаться под водой. Помимо действий, касающихся автоматизированного сбора научной информации, более сложные ША могут использоваться во время обезвреживания радиоактивных и ядовитых веществ, разминирования придонного пространства, а также при выполнении других действий, опасных для жизни людей и животных.

**Модель подводного ША.** Антропоморфный подводный шагающий аппарат (рис. 1) моделируется тяжёлой сферой, перемещающейся на двух жестких ногах под действием двух моментов:  $\mu_1$  – момент между корпусом и опорной ногой,  $\mu_2$  – между корпусом и переносимой ногой [1, 2]. Ноги аппарата – весомые круговые цилиндры, шарнирно соединенные между собой и со сферой в точке  $O_2$ . В течение  $k$ -го шага ( $t_k \leq t < t_{k+1}$ ) начало системы координат  $O_1$  совпадает с центром тяжести опорной ноги. Рассматривается плоское движение этого ША – вопросы вертикальной стабилизации не рассматриваются и полагается, что аппарат движется горизонтально вдоль оси  $x$ .

Введены следующие фазовые координаты аппарата:  $x_1$  – координата точки подвеса ног,  $x_2 = \dot{x}_1$ ,  $x_3$  – смещение центра тяжести корпуса  $O_C$  относительно точки подвеса ног,  $x_4 = \dot{x}_3$ ,  $x_5$  – координата конца переносимой ноги,  $x_6 = \dot{x}_5$ . Очевидно, в окре-

стности вертикального положения корпуса аппарата существует такая область значений фазовых координат (которые являются компонентами вектора  $\mathbf{x}' = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6]$ ), что в течение  $k$ -го шага (период опирания на одну ногу) изменение вектора  $\mathbf{x}$  с достаточной точностью можно описать линейной системой дифференциальных уравнений с вектором управляемых воздействий  $\mathbf{u}'_n = [\mu_1, \mu_2]$ .

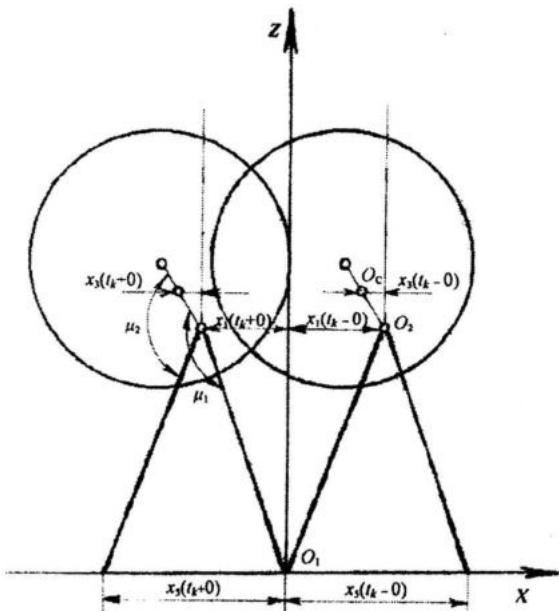


Рис. 1 – Модель антропоморфного подводного шагающего аппарата.

В моменты смены опорной ноги происходит скачкообразное изменение фазовых координат аппарата, которое можно отразить в виде линейной системы разностных уравнений  $\mathbf{x}(t_k + 0) = \mathbf{A}_o \mathbf{x}(t_k - 0)$ ,

$$\mathbf{A}_o = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Как показано в [1], многие модели шагающих аппаратов (как подводных, так и сухопутных) могут быть описаны с помо-

щую системы дифференциальных и разностных уравнений:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t) &= \mathbf{A}_n \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_n \mathbf{u}_n(t), & t \in I \setminus \Theta, \\ \mathbf{x}(t) &= \mathbf{A}_o \mathbf{x}(t-0) + \mathbf{B}_o \mathbf{u}_o(t), & t \in \Theta.\end{aligned}\quad (1)$$

где  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ ;  $\mathbf{u}_n \in \mathbf{R}^{m_n}$ ;  $\mathbf{u}_o \in \mathbf{R}^{m_o}$ ;  $\mathbf{A}_n$ ,  $\mathbf{A}_o$ ,  $\mathbf{B}_n$  и  $\mathbf{B}_o$  – постоянные матрицы соответствующих размерностей;  $I = [0, \infty)$ ;  $\Theta = \{t_k : t_k = kh; h > 0; k = 1, 2, 3, \dots\}$ .

Подводный ША отличается от сухопутного тем, что при его создании необходимо учитывать действие выталкивающей силы Архимеда, силы гидродинамического сопротивления, а также эффекта присоединенных масс. Это, безусловно, влияет на вид дифференциальных уравнений, однако его модель по-прежнему можно представить в виде системы дифференциальных и разностных уравнений (1). Более того, в виде непрерывно-дискретной модели (НДМ) (1) можно представить и другие САУ, не имеющие отношения к робототехнике. Поэтому далее рассматриваются вопросы исследования НДМ общего вида (1).

**Управляемость непрерывно-дискретных систем.** При создании подводных ША возникает потребность в разработке систем автоматического управления НДМ, а также в анализе их свойств. В работе рассмотрена типичная задача исследования – проверка свойства управляемости типичной НДМ.

Непрерывно-дискретная система (1) является **полностью управляемой**, если из начального состояния  $\mathbf{x}(t_0)$ , соответствующего любому  $t_0$ , она может быть переведена в любое окончное состояние  $\mathbf{x}_f$  за конечное время  $t_f - t_0$  ограниченным управлением  $\|\mathbf{u}_n(t)\| < \infty$ ,  $\|\mathbf{u}_o(t)\| < \infty$ ,  $t_0 \leq t \leq t_f$ .

Для исследования управляемости непрерывно-дискретных систем с постоянными коэффициентами нельзя непосредственно применить хорошо известные результаты, полученные для непрерывных или дискретных систем. Нами был получен критерий управляемости для непрерывно-дискретных систем.

**Теорема 1.** Для того, чтобы непрерывно-дискретная система (1) была полностью управляемой, необходимо и достаточно, чтобы имела ранг  $n$  матрица размера  $n \times nr$

$$\mathbf{U} = [\tilde{\Gamma}, \Phi \tilde{\Gamma}, \Phi^2 \tilde{\Gamma}, \dots, \Phi^{n-1} \tilde{\Gamma}] \quad (2)$$

где  $\tilde{\Gamma}$  – матрица, полученная из максимального числа линейно независимых столбцов составной матрицы  $[\mathbf{B}_o, \mathbf{B}_n, \mathbf{A}_n \mathbf{B}_n, \dots, \mathbf{A}_n^{n-1} \mathbf{B}_n]$ , а  $\Phi = \mathbf{A}_o e^{\mathbf{A}_n h}$  [3].

**Доказательство.** Используя возможность приведения линейных систем к канонической форме управляемости (см., например, [4]), можно показать, что вектор состояния непрерывно-дискретной системы (1) в некоторый момент  $t_f = t_l + \tau_f$  ( $t_f \in I \setminus \Theta$ ;  $t_l = t_1 + lh$ ,  $t_l \in \Theta$ ,  $t_1 \in \Theta$ ,  $l > n$ ,  $t_0 \in [t_1 - h; t_1]$ ) описывается разностным уравнением

$$\mathbf{x}(t_f) = e^{\mathbf{A}_n \tau_f} \left( \sum_{j=1}^l \Phi^{l-j} \Gamma \mathbf{u}_j + \Phi^l \mathbf{A}_o \mathbf{x}(t_1 - 0) \right). \quad (3)$$

где  $\Phi = \mathbf{A}_o e^{\mathbf{A}_n h}$ ;  $\Gamma = [\mathbf{B}_o, \mathbf{B}_n]$  – блочная матрица, столбцы матрицы  $\Gamma$  получены из линейно независимых столбцов матрицы управляемости  $\mathbf{U}_n = [\mathbf{B}_n, \mathbf{A}_n \mathbf{B}_n, \dots, \mathbf{A}_n^{n-1} \mathbf{B}_n]$  ранга  $r$  ( $r \leq n$ );  $\mathbf{u}_k = [\mathbf{u}_o(t_k), \xi_k]^\top$ ; вектор  $\xi_k = e^{-\mathbf{A}_{11} \bar{h}_k} \int_0^{\bar{h}_k} e^{\mathbf{A}_{11}(\bar{h}_k - \tau)} \mathbf{B}_1 \mathbf{u}_n(t_k + \tau) d\tau$  может принимать любое значение, так как пара  $\{\mathbf{A}_{11}, \mathbf{B}_1\}$  – полностью управляемая пара, а матрица  $e^{-\mathbf{A}_{11} \bar{h}_k}$  – невырожденная;  $\bar{h}_k = \begin{cases} h, & k < l \\ \tau_f, & k = l \end{cases}$ .

**Необходимость.** Используя приведение линейной дискретной системы к канонической форме управляемости, состояние системы в момент  $t_f$  можно выразить через некоторый вектор  $\mathbf{c} \in \mathbf{R}^p$ , который зависит от управления:

$$\mathbf{x}(t_f) = e^{\mathbf{A}_n \tau_f} (\mathbf{T}_1 \mathbf{c} + \Phi^l \mathbf{A}_o \mathbf{x}(t_1 - 0)), \quad (4)$$

где столбцы матрицы  $\mathbf{T}_1$  размера  $[n \times p]$  состоят из линейно независимых столбцов составной матрицы  $[\Gamma, \Phi \Gamma, \dots, \Phi^{n-1} \Gamma]$ , имеющей ранг  $p$ ;  $\mathbf{c} = \sum_{j=1}^l \Phi_{11}^{l-j} \Gamma_1 \mathbf{u}_j$ . Чтобы

получить значения вектора  $\mathbf{c}$ , зная состояние системы в момент  $t_f$ , необходимо найти решение (хотя бы одно) системы линейных алгебраических уравнений из  $n$  уравнений с  $p \geq n$  неизвестными (элементами вектора  $\mathbf{c}$ )

$$\mathbf{T}_1 \cdot \mathbf{c} = \tilde{\mathbf{x}}, \quad \tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{e}^{-\mathbf{A}_{11} t_f} \mathbf{x}_f - \Phi' \mathbf{A}_o \mathbf{x}(t_1 - 0) \quad (5)$$

Допустим, что непрерывно-дискретная система (1) полностью управляема, т.е. её можно перевести из любого начального состояния  $\mathbf{x}(t_1 - 0)$  в любое конечное. Тогда система уравнений (5) совместна при всех значениях вектора  $\tilde{\mathbf{x}}$  и, в соответствии с теоремой Кронекера-Капелли,  $\text{rank}[\mathbf{T}_1, \tilde{\mathbf{x}}] = \text{rank}[\mathbf{T}_1] = n$ . С другой стороны,  $\text{rank}[\mathbf{T}_1] = \text{rank} \mathbf{U}$  и необходимость доказана.

**Достаточность.** Если условие теоремы выполняется, то существует матрица

$$\mathbf{W}: \mathbf{W}^{-1} = \sum_{j=1}^l \Phi^{l-j} \Gamma \Gamma^T (\Phi^{l-j})^T \text{ и закон управ-}$$

ления

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_n(t) &= \mathbf{B}_1^T \mathbf{e}^{\mathbf{A}_{11}^T(t_k + \bar{h}_k - t)} \Psi_k \Gamma_n^T (\Phi^{l-k})^T \mathbf{W} \tilde{\mathbf{x}}(t - t_1), \\ \mathbf{u}_o(t_k) &= \mathbf{B}_o^T (\Phi^{l-k})^T \mathbf{W} \cdot \tilde{\mathbf{x}}, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\text{где } \Psi_k^{-1} = \mathbf{e}^{-\mathbf{A}_{11} \bar{h}_k} \int_0^{\bar{h}_k} \mathbf{e}^{\mathbf{A}_{11}(\bar{h}_k - g)} \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1^T \mathbf{e}^{\mathbf{A}_{11}^T(\bar{h}_k - g)} dg.$$

$\Psi_k$  существует, так как  $\{\mathbf{A}_{11}, \mathbf{B}_1\}$  – полностью управляемая пара;  $k = \text{entier}\left[\frac{t - t_1}{h}\right]$ .

Легко проверить, что управление (6) переводит систему (1) из любого начального состояния  $\mathbf{x}(t_1 - 0)$  в любое состояние  $\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}_f$ . Следовательно, условие теоремы является также и достаточным. Теорема доказана полностью.

**Исследование ША.** В качестве примера был рассмотрен вопрос управляемости подводного ША, описываемый системой уравнений (1), со следующими параметрами:

$$\mathbf{A}_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 13.7 & 0 & -21.5 & 0 & 1.28 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4.95 & 0 & 23.2 & 0 & -0.46 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 6.52 & 0 & 10.77 & 0 & -14.03 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -0.91 & 0.91 \\ 0 & 0 \\ 18.9 & 18.9 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0.91 \end{bmatrix}$$

Получили

$$\tilde{\Gamma} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.91 & 0.91 & 0 & -418.62 \\ -0.91 & 0.91 & 0 & 0 & -418.62 & 0 \\ 0 & 0 & 18.9 & 18.9 & 0 & 443.1 \\ 18.9 & 18.9 & 0 & 0 & 443.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.91 & 0 & 197.75 \\ 0 & 0.91 & 0 & 0 & 197.75 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} 18.04 & 3.7 & -50.17 & -8.67 & 2.12 & 0.23 \\ 96.26 & 19.45 & -262.42 & -45.70 & 5.71 & 1.14 \\ -10.80 & -1.77 & 39.36 & 7.49 & -0.72 & -0.12 \\ -62.17 & -10.80 & 210.42 & 39.36 & -3.98 & -0.72 \\ -1.41 & -0.51 & -4.58 & -1.14 & 0.97 & 0.011 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

и  $\text{rank} \mathbf{U} = \text{rank}[\tilde{\Gamma}, \Phi \tilde{\Gamma}, \Phi^2 \tilde{\Gamma}, \dots, \Phi^{n-1} \tilde{\Gamma}] = 6 = n$ . То есть данный ША полностью управляем и соответствующим изменением моментов  $\mu_1$  и  $\mu_2$  вектор состояния системы может быть переведён из любого начального состояния в любое конечное состояние.

## ЛИТЕРАТУРА

- Ларин В.Б. Управление шагающими аппаратами– К.: Наук. думка, 1980. – 168 с.
- Белецкий В.В. Двуногая ходьба– М.: Наука, 1984. – 288 с.
- Лазарева Е.В., Старожилов Е.Ф. Критерий управляемости для линейных непрерывно-дискретных систем управления с постоянными коэффициентами // Вест. СевГТУ: Сб. научн. тр. — Севастополь, 2002.– Вып. 36.– С. 176–180.
- Квакернаак Х., Сиван Р. Линейные оптимальные системы управления.– М.: Мир, 1977. – 656 с.