

**ИССЛЕДОВАНИЕ
ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СТРУКТУРЫ
ПРОФИЛЯ СВОБОДНОЙ
ПОВЕРХНОСТИ ВЫНУЖДЕННЫХ
ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ВОЛН В
КОЛЬЦЕВОМ БАССЕЙНЕ**

**Н.В. Маркова, Н.А. Миклашевская,
Л.В. Черкесов**

Морской гидрофизический институт
НАН Украины,
г. Севастополь, ул. Капитанская, 2
E-mail: ocean@alpha.mhi.iuf.net

Изучается пространственная структура вынужденных волн в кольцевом бассейне с параболическим профилем дна. Исследуется влияние геометрических параметров бассейна на характеристики волнового процесса. Получены зависимости структуры профиля свободной поверхности от периода возмущающих поверхностных давлений.

1. Постановка задачи. Исследуем вынужденные осесимметричные волны, возникающие на поверхности однородной невязкой жидкости, заполняющей кольцевой бассейн переменной глубины. Колебания генерируются периодическими по времени возмущениями атмосферного давления вида

$$p(r, t) = p_0 \psi(r) \sin \sigma t. \quad (1)$$

Здесь p_0 – амплитуда возмущений атмосферного давления, σ – частота вынужденных колебаний, $\psi(r)$ – безразмерная функция, максимум которой равен 1. Глубина бассейна h зависит только от одной пространственной координаты r . Будем полагать волны длинными, а колебания малыми. Учтем действие силы Кориолиса.

Пусть $\zeta(r, t)$ – возвышение свободной поверхности, $u(r, t)$ – нормальная составляющая скорости жидкости, $v(r, t)$ – тангенциальная составляющая, $h(r)$ – глубина бассейна, g – ускорение свободного падения, ρ – плотность жидкости. Тогда в полярных координатах уравнения движения для осесимметричных волн записываем следующим образом [1]:

$$u_t - fv = -g\zeta_r - \frac{1}{\rho} p_r, \quad (2)$$

$$v_t + fu = 0, \quad (3)$$

$$\zeta_t = -\frac{1}{r} (h u)_r, \quad (4)$$

Потребуем выполнения условий непротекания на вертикальных боковых стенках $r=a_1$, $r=a_2$:

$$u(a_1, t) = 0, \quad u(a_2, t) = 0. \quad (5)$$

Решение системы уравнений (2)–(4) будем искать в виде периодических по времени функций

$$\begin{aligned} \zeta(r, t) &= \bar{\zeta}(r) \sin \sigma t, & u(r, t) &= \bar{u}(r) \cos \sigma t, \\ v(r, t) &= \bar{v}(r) \sin \sigma t. \end{aligned} \quad (6)$$

Обозначим

$$\bar{p}(r) = \frac{1}{\rho} p_0 \psi(r), \quad (7)$$

где $\psi(r) = (r - a_1)/(a_2 - a_1)$.

Тогда (1) можно записать так:

$$p(r, t) = \rho \bar{p}(r) \sin \sigma t \quad (8)$$

Подставляя (6), (8) в (2), (3) и решая полученную систему, находим такие выражения для амплитуд нормальной и тангенциальной составляющих скорости:

$$\bar{u}(r) = \frac{g\sigma}{\sigma^2 - f^2} \left(\bar{\zeta}_r + d\psi_r \right), \quad (9)$$

$$\bar{v}(r) = -\frac{f}{\sigma} \bar{u}(r)$$

где $d = p_0/\rho g$.

Для определения амплитуды возвышения свободной поверхности $\bar{\zeta}(r)$ из (9) и (4) получаем следующее дифференциальное уравнение:

$$\begin{aligned} r^2 h \bar{\zeta}_{rr} + (r^2 h_r + rh) \bar{\zeta}_r + \frac{\sigma^2 - f^2}{g} r^2 \bar{\zeta} = \\ = -dr(rh\psi_{rr} + (rh_r + h)\psi_r) \end{aligned} \quad (10)$$

С учетом (6) граничные условия (5) перепишем так:

$$\left(\bar{\zeta}_r + d\psi_r \right)_{r=a_1, r=a_2} = 0. \quad (11)$$

Уравнение (10) имеет общее решение вида

$$\bar{\zeta}(r) = c_1 \bar{\zeta}_1(r) + c_2 \bar{\zeta}_2(r) + \bar{\zeta}_3(r), \quad (12)$$

где c_1, c_2 – произвольные постоянные, которые находятся из граничных условий (11);

$\bar{\zeta}_1(r), \bar{\zeta}_2(r)$ – фундаментальные решения однородного дифференциального уравнения, соответствующего (10); $\bar{\zeta}_3(r)$ – частное решение уравнения (10). Функции $\bar{\zeta}_j(r)$, ($j=1; 2; 3$) находим методом Рунге-Кutta четвертого порядка точности [2].

3. Численное моделирование и анализ полученных результатов. По представленной выше модели был проведен ряд численных экспериментов для кольцевого бассейна (рис.1), глубина которого меняется по параболическому закону

$$h(r) = h_2(r-a_1)^2 + h_1(r-a_1) + h_0, \quad (13)$$

Здесь a_1 – радиус внутренней границы бассейна; h_0 – глубина бассейна при $r=a_1$, h_1, h_2 – постоянные коэффициенты, определяемые из условий $h(a_1)=h_0$, $h(a_2)=h$, $h((a_1+a_2)/2)=h_m$; h_l – глубина при $r=a_2$; h_m – максимальная глубина водоема. Рассмотрим четыре кольцевых бассейна со следующими параметрами: для всех бассейнов расстояние от центра бассейна до внутренней границы $a_1 = 50$ км, глубины у вертикальных боковых стенок $h_0 = h_l = 1$ м. Варьировались радиус внешней границы кольца a_2 и максимальная глубина бассейна:

$$a_2=1000 \text{ км}, h_m=1000 \text{ м}; \quad (14)$$

$$a_2=1000 \text{ км}, h_m=4000 \text{ м}; \quad (15)$$

$$a_2=3000 \text{ км}, h_m=1000 \text{ м}; \quad (16)$$

$$a_2=3000 \text{ км}, h_m=4000 \text{ м}. \quad (17)$$

Параметр Корiolisa f соответствует 60° с.ш. (инерционный период $\tau_{\text{ин}} = 13$ ч 51 мин 23 с). Перепад атмосферного давления на границах бассейна выбирался равным 5 гПа ($d=5,0$ см).

Обозначим $[\tau_n^{\max}, \tau_n^{\min}]$ ($n=1, \dots, 4$) диапазоны периодов вынужденных колебаний (ВК), в которых профиль свободной поверхности имеет неизменное количество узлов. Проследим изменение количества

узловых точек и их координат r_{nk} с уменьшением периода вынуждающих давлений от τ_1^{\max} до τ_4^{\min} . Для всех рассматриваемых бассейнов τ_1^{\max} выбирался одинаковым – 13 ч 21 мин 00 с ($\tau_1^{\max} = \tau_{\text{ин}} - 30$ мин 23 с).

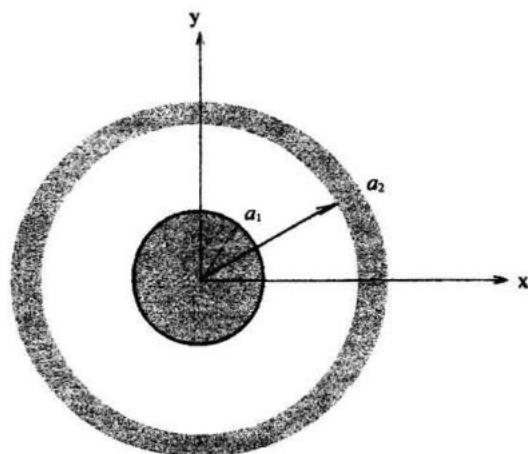


Рис.1 – Схема бассейна

В табл. 1 представлены границы диапазонов периодов ВК для бассейнов (14), (15), количество узловых точек свободной поверхности k , а также координаты узловых точек r_{nk} . Аналогичные данные для бассейнов (16), (17) содержатся в табл.2. Как видно из этих таблиц, сначала профили свободной поверхности рассматриваемых бассейнов имеют одну узловую точку r_{11} , которая перемещается в сторону внутренней границы с уменьшением периода колебаний от τ_1^{\max} до τ_1^{\min} , различного для всех бассейнов. Смещение координаты узловой точки для бассейнов (14) и (15) с шириной кольца 950 км составляет 184,8 км и 185,2 км, а для бассейнов (16) и (17) с шириной кольца 2950 км – 524,8 км и 526,5 км. При τ_2^{\max} у внешней границы бассейнов появляется вторая узловая точка r_{22} . С уменьшением периода оба узла смещаются к границе кольца a_1 , и при τ_2^{\min} один узел достигает внутренней границы. При τ_3^{\max} вновь остается одна узловая точка с координатой r_{31} . Она сначала смещается в прежнем направлении к a_1 , а затем начинает перемещаться к внешней границе бассейна a_2 . При τ_4^{\max} появляются еще два узла в промежутке между уже имевшимся ранее узлом и внутренней границей кольца. Расстояние между вновь появившимися узлами r_{41} и r_{42} составляет для различных бассейнов от 6,5 км

(16) до 96,5 км (17). С уменьшением периода ВК эти узловые точки удаляются друг от друга. При τ_4^{\max} профиль свободной поверхности имеет три узла, один из которых (r_{43}) находится у внешней границы кольцевого бассейна.

Таблица 1. Расположение узловых точек профилей свободной поверхности для бассейнов (14), (15)

| <i>Бассейн</i> | <i>Границы диапазона</i> | <i>k</i> | <i>Периоды ВК</i> | <i>r_{nk}, км</i> |
|----------------|--------------------------|----------|-------------------|---------------------------|
| (14) | τ_1^{\max} | 1 | 13 ч 21 мин 00 с | 668,2 |
| | τ_1^{\min} | | 3 ч 09 мин 41 с | 483,4 |
| | τ_2^{\max} | 2 | 3 ч 09 мин 40 с | 483,1 |
| | τ_2^{\min} | | 50,2 | 999,9 |
| | τ_3^{\max} | 1 | 2 ч 53 мин 46 с | 755,2 |
| | τ_3^{\min} | | 2 ч 18 мин 30 с | 832,0 |
| | τ_4^{\max} | 3 | 365,1 | |
| | | | 393,0 | |
| | τ_4^{\min} | | 832,3 | |
| (15) | τ_1^{\max} | 1 | 13 ч 21 мин 00 с | 668,3 |
| | τ_1^{\min} | | 1 ч 36 мин 46 с | 483,1 |
| | τ_2^{\max} | 2 | 482,5 | |
| | | | 999,0 | |
| | τ_2^{\min} | 1 | 50,8 | |
| | | | 755,8 | |
| | τ_3^{\max} | 1 | 1 ч 28 мин 26 с | 755,7 |
| | τ_3^{\min} | | 1 ч 10 мин 06 с | 831,7 |
| | τ_4^{\max} | 3 | 370,6 | |
| | | | 387,7 | |
| | τ_4^{\min} | | 832,6 | |

Как показал анализ численных результатов, изменение максимальной глубины бассейна очень слабо влияет на положение узловых точек профиля свободной поверхности. Так, для бассейнов (14), (15) при одном и том же периоде ВК τ_1^{\max} координаты узловых точек отличаются на 0,1 км. Для бассейнов (16) и (17) при τ_1^{\max} разница в положении узлов несколько больше – 0,6 км. В обоих случаях смещение узловых точек со-

ставляет менее 1,0% ширины кольца рассматриваемых бассейнов. В то же время изменение h_m существенно сказывается на значениях периодов τ_1^{\min} : с увеличением максимальной глубины бассейна они уменьшаются. Это приводит к изменению других диапазонов периодов $[\tau_n^{\max}, \tau_n^{\min}]$ ($n=2; 3; 4$).

Таблица 2. Расположение узловых точек профилей свободной поверхности для бассейнов (16), (17)

| <i>Бассейн</i> | <i>Границы диапазона</i> | <i>k</i> | <i>Периоды ВК</i> | <i>r_{nk}, км</i> |
|----------------|--------------------------|----------|-------------------|---------------------------|
| (16) | τ_1^{\max} | 1 | 13 ч 21 мин 00 с | 1999,8 |
| | τ_1^{\min} | | 7 ч 51 мин 36 с | 1475,0 |
| | τ_2^{\max} | 2 | 7 ч 51 мин 35 с | 1473,9 |
| | τ_2^{\min} | | 2999,6 | |
| | τ_3^{\max} | 1 | 52,0 | |
| | τ_3^{\min} | | 2254,6 | |
| | τ_4^{\max} | 3 | 2254,4 | |
| | | | 6 ч 13 мин 32 с | 2496,5 |
| | τ_4^{\min} | | 1211,8 | |
| (17) | τ_1^{\max} | 1 | 1218,3 | |
| | τ_1^{\min} | | 2497,9 | |
| | τ_2^{\max} | 2 | 311,6 | |
| | τ_2^{\min} | | 1865,7 | |
| | τ_3^{\max} | 1 | 2999,6 | |
| | τ_3^{\min} | | 2000,4 | |
| | τ_4^{\max} | 3 | 1473,9 | |
| | | | 4 ч 30 мин 44 с | |
| | τ_4^{\min} | | 1472,5 | |

ЛИТЕРАТУРА

1. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика: В 2-х т. – М.: Гостехиздат, 1955.– 560 с.
2. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 600 с.