

БАРОКЛИННЫЕ СЕЙШИ В БАССЕЙНЕ ПЕРЕМЕННОЙ ГЛУБИНЫ, ЗАПОЛНЕННОМ ТРЕХСЛОЙНОЙ ЖИДКОСТЬЮ

Д.В. Алексеев, О.А. Дымова,
Л.В. Черкесов

Морской гидрофизический институт
НАН Украины
г. Севастополь, ул. Капитанская, 2
E-mail: ocean@alpha.mhi.iuf.net

В рамках линейной теории длинных волн с учетом действия силы Кориолиса исследуются свободные волны (сейши) в двумерном бассейне с параболическим профилем дна и параболической формой поверхностей раздела слоев. Предполагается, что жидкость трехслойная с постоянной плотностью в каждом слое. Определены зависимости периодов баротропной и бароклинных волн от геометрии бассейна и параметров стратификации.

Спектр частот свободных длинных волн является важным элементом для понимания динамических процессов в замкнутых бассейнах. На его основе объясняются резонансные явления [1] и явления перехода от баротропного характера движения к бароклинному [2] при изменении периодичности воздействия внешних возмущений.

Для двумерного бассейна с параболическим профилем дна частоты низших наиболее часто возбуждаемых мод в рамках баротропной модели получены в [3], а в рамках бароклинной модели в предположении двухслойной стратификации – в [4]. В данной работе для аналогичного бассейна рассматриваются свободные волны при трехслойной стратификации жидкости.

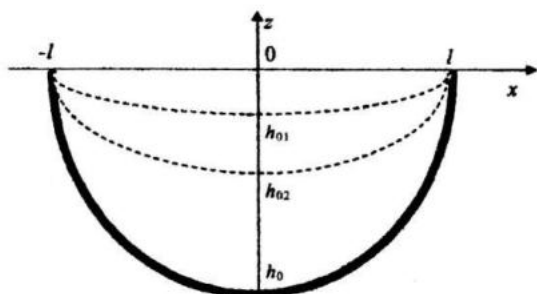


Рис. 1 Схема бассейна

1. Пусть двумерный бассейн заполнен стратифицированной жидкостью, состоящей из трех слоев с постоянной плотностью в каждом из них. При этом ρ_1, ρ_2, ρ_3 – плотности в верхнем, среднем и нижнем слоях. Глубина бассейна изменяется по параболическому закону:

$$h(x) = h_0 \left(1 - x^2/l^2\right) \quad (-l \leq x \leq l, 0 \leq h \leq h_0). \quad (1)$$

Предполагаем, что первая и вторая поверхности раздела являются параболическими. Плоскость $z = 0$ совпадает со свободной поверхностью в невозмущенном состоянии, ось z направлена вертикально вверх. Из массовых сил на жидкость действуют сила тяжести и сила Кориолиса (рис. 1). Данная стратификация оказывается устойчивой во времени в случае наличия во втором и третьем слоях системы стационарных течений, параллельных границам бассейна.

Для изучения волн на свободной поверхности и границах раздела слоев жидкости используются нелинейные уравнения теории длинных волн [5]. После их линеаризации была получена система девяти дифференциальных уравнений для определения нормальных $u_i(x,t)$ и касательных $v_i(x,t)$ к берегу волновых составляющих скорости, возвышений свободной поверхности $\zeta_1(x,t)$ и поверхностей раздела слоев жидкости $\zeta_2(x,t)$ и $\zeta_3(x,t)$. Решение этой системы искалось в виде периодических по времени функций:

$$u_i = \bar{u}_i(x) \sin \sigma t, \quad v_i = \bar{v}_i(x) \cos \sigma t, \quad (2)$$

$$\zeta_i = \bar{\zeta}_i(x) \cos \sigma t.$$

Индекс i соответствует номеру слоя, амплитудные функции обозначены чертой, σ частота волны. Также были введены следующие обозначения:

$$H_1(x) \bar{u}_1(x) = \varphi_1(x), \quad H_2(x) \bar{u}_2(x) = \varphi_2(x), \quad (3)$$

$$H_3(x) \bar{u}_3(x) = \varphi_3(x),$$

где H_1, H_2, H_3 – толщина первого, второго и третьего слоев соответственно. После подстановки выражений (2) и (3), система из девяти дифференциальных уравнений свелась к следующей системе:

$$\begin{aligned}
 (\sigma^2 - f^2)\varphi_1 &= -gH_1 \left(\frac{d^2\varphi_1}{dx^2} + \frac{d^2\varphi_2}{dx^2} + \frac{d^2\varphi_3}{dx^2} \right), \\
 (\sigma^2 - \bar{f}f)\varphi_2 &= -gH_2 \left(\gamma_1 \frac{d^2\varphi_1}{dx^2} + \frac{d^2\varphi_2}{dx^2} + \frac{d^2\varphi_3}{dx^2} \right), \\
 (\sigma^2 - \bar{f}_1f)\varphi_3 &= -gH_3 \left(\gamma_3 \frac{d^2\varphi_1}{dx^2} + \gamma_2 \frac{d^2\varphi_2}{dx^2} + \frac{d^2\varphi_3}{dx^2} \right).
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

Здесь f – параметр Кориолиса, $\gamma_1 = \rho_1/\rho_2$, $\gamma_2 = \rho_2/\rho_3$, $\gamma_3 = \gamma_1\gamma_2$, \bar{f} и \bar{f}_1 – коэффициенты, зависящие от характеристик бассейна и стратификации. Требуя ограниченности нормальных к берегу составляющих скорости при $x = \pm l$, получаем граничные условия для функции φ_i :

$$\varphi_i(\pm l) = 0. \tag{5}$$

Система (4) допускает решения в виде полиномов степени два и выше. Полиномы второй степени, удовлетворяющие граничным условиям (5), имеют следующий вид:

$$\varphi_i = A_i(x^2 - l^2). \tag{6}$$

Это решение соответствует первой моде свободных колебаний, второй моде соответствуют полиномы третьей степени:

$$\varphi_i = B_i(x^2 - l^2)(x + b_i). \tag{7}$$

Коэффициенты A_i , B_i , b_i – произвольные постоянные. После подстановки (6) или (7)

Таблица 1. Периоды баротропной и бароклиных волн при $h_{01} = 50$ м, $h_{02} = 100$ м

$2l$, км	номер моды	$\tau_{\text{бт}}$	$\tau_{\text{бк}_1}$	$\tau_{\text{бк}_2}$
100	1	26 мин 25 с	15 ч 39 мин 18 с	15 ч 57 мин 36 с
	2	15 мин 15 с	14 ч 28 мин 13 с	15 ч 13 мин 41 с
200	1	52 мин 47 с	16 ч 10 мин 50 с	16 ч 15 мин 47 с
	2	30 мин 30 с	15 ч 49 мин 27 с	16 ч 03 мин 33 с
300	1	1 ч 19 мин 02 с	16 ч 17 мин 02 с	16 ч 19 мин 16 с
	2	45 мин 43 с	16 ч 07 мин 10 с	16 ч 13 мин 43 с

В таблице 1 периоды баротропной и бароклиных волн вычислены для наибольшей толщины первого слоя 50 м ($h_{01} = 50$ м) и наибольшей толщины второго слоя тоже 50 м ($h_{02} = 100$ м) при $1-\gamma_1 = 1,5 \cdot 10^{-3}$ и $1-\gamma_2 = 6 \cdot 10^{-4}$. Из таблицы 1 видно, что расширение

в (4) система дифференциальных уравнений сводится к системе однородных алгебраических уравнений, которая имеет нетривиальное решение, если σ удовлетворяет дисперсионному соотношению:

$$(\sigma^2 - f^2)^3 + A(\sigma^2 - f^2)^2 + B(\sigma^2 - f^2) + C = 0. \tag{8}$$

Коэффициенты A , B , C зависят от геометрии бассейна и параметров стратификации жидкости.

2. Численные значения периодов колебаний ($\tau = 2\pi/\sigma$) были получены для трех бассейнов шириной 100, 200 и 300 км. Максимальная глубина каждого из них 2 км, параметр Кориолиса соответствует 47° северной широты. Рассматривались два случая стратификации жидкости: в первом случае максимальная толщина первого слоя равна 50 м, второго – тоже 50 м; во втором случае максимальная толщина первого слоя равна 50 м, а второго – 450 м. В результате решения уравнения (8) для каждой моды было найдено три периода свободных колебаний, один из которых с высокой степенью точности совпал с периодом свободных колебаний в аналогичном бассейне, заполненном однородной жидкостью. Таким образом, период $\tau_{\text{бт}}$ соответствует баротропной волне, а периоды $\tau_{\text{бк}_1}$ и $\tau_{\text{бк}_2}$, существенно зависящие от параметров стратификации, соответствуют первой бароклиной и второй бароклиной волнам. Результаты расчетов представлены в таблицах.

ние границ бассейна приводит к увеличению периодов волн. Так период баротропной волны (как для первой, так и для второй моды) увеличивается в 3 раза с изменением ширины от 100 до 300 км. Периоды бароклиных волн более чем на порядок

больше периодов баротропной волны. Их вариации отличаются меньшим разнообразием. Так с расширением бассейна от 100 до 300 км период первой бароклинной волны для первой моды увеличивается на 4%, для второй моды – на 10%; период второй бароклинной волны для первой моды увеличивается на 7%, для второй моды – на 6%. Периоды первой моды (баротропная

волна) почти на 42% превосходят периоды второй моды. Для первой бароклинной волны это отличие составляет 7% при ширине 100 км и 1% при ширине 300 км, для второй бароклинной волны – 5% при 100 км и менее 1% при 300 км. Таким образом, при расширении бассейна различие между периодами первой и второй мод бароклинных волн уменьшается.

Таблица 2. Периоды баротропной и бароклинных волн при $h_{01} = 50$ м, $h_{02} = 500$ м

2l, км	номер моды	τ_{bt}	τ_{bk1}	τ_{bk2}
100	1	26 мин 25 с	15 ч 27 мин 19 с	16 ч 01 мин 07 с
	2	15 мин 15 с	13 ч 27 мин 36 с	15 ч 27 мин 15 с
200	1	52 мин 47 с	16 ч 07 мин 29 с	16 ч 16 мин 42 с
	2	30 мин 30 с	15 ч 28 мин 06 с	16 ч 07 мин 27 с
300	1	1 ч 19 мин 02 с	16 ч 15 мин 30 с	16 ч 19 мин 40 с
	2	45 мин 43 с	15 ч 56 мин 57 с	16 ч 15 мин 30 с

Таблица 2 соответствует случаю, когда наибольшая толщина первого слоя составляет 50 м ($h_{01} = 50$ м), а наибольшая толщина второго слоя – 450 м ($h_{02} = 500$ м). При этом $1-\gamma_1 = 1,5 \cdot 10^{-3}$ и $1-\gamma_2 = 1 \cdot 10^{-4}$. Из таблицы 2 видно, что с увеличением ширины бассейна периоды волн также увеличиваются. Период баротропной волны не изменяется с изменением толщины второго слоя, т.е. он зависит только от геометрии бассейна и не зависит от параметров стратификации жидкости. Периоды бароклинных волн, как и в рассмотренном выше случае, значительно превосходят периоды баротропной волны и их изменения также менее разнообразны. Так с расширением бассейна от 100 до 300 км период первой бароклинной волны для первой моды увеличивается на 3,3%, для второй моды – на 15,6%; период второй бароклинной волны для первой моды увеличивается на 2%, для второй моды – на 5%. Периоды первой моды (первая бароклинная волна) на 13% превосходят периоды второй моды при ширине 100 км и на 2% при ширине 300 км; для второй бароклинной волны это отличие составляет 4% при 100 км и менее 1% при 300 км. При сравнении результатов, представленных в таблицах 1 и 2 получаем, что во втором случае периоды первой бароклинной волны уменьшаются, а периоды второй бароклинной волны увеличиваются.

Так, при 100 км период первой бароклинной волны (первая мода) уменьшается на 1%, при 300 км – на 0,2%; для второй моды – на 7% при 100 км и на 2% при 300 км. Период второй бароклинной волны (первая мода) увеличивается на 0,4% при 100 км и на 0,1% при 300 км; для второй моды – на 1,5% при 100 км и на 0,2% при 300 км.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ламб Г. Гидродинамика.–М.: Гостехиздат, 1947.–948 с.
2. Алексеев Д.В., Рублев П.В., Черкесов Л.В. Вынужденные волны в ограниченном бассейне, заполненном стратифицированной жидкостью // Доповіді Національної Академії наук України.–2001.–№7.–С. 105–109.
3. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика.–М.: Гостехиздат, 1955.–Т.1.–560 с.
4. Алексеев Д.В., Черкесов Л.В. Исследование бароклинных сейш в бассейне с параболическим профилем дна // Доповіді Національної Академії наук України.–2001.–№5.–С. 97 – 101.
5. Черкесов Л.В., Иванов В.А., Хартиев С.М. Введение в гидродинамику и теорию волн. – С-Пб.: Гидрометеиздат, 1992. – 264 с.